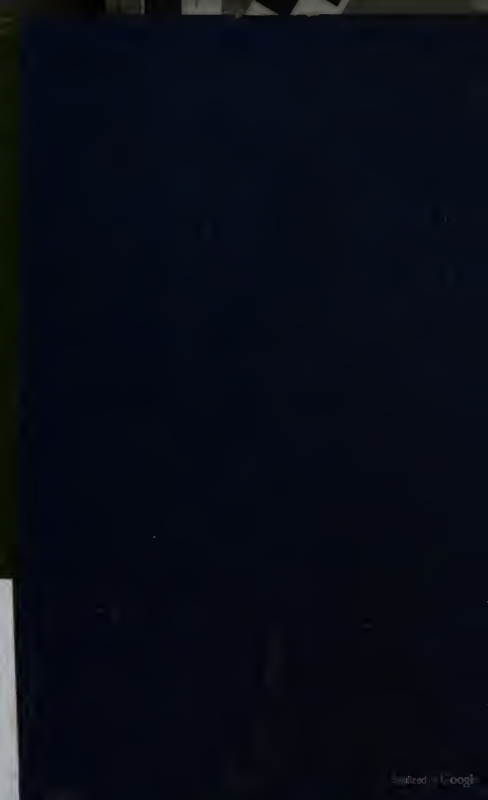




· BIBLIOTECA ·
· LVCCHESI · PALLI ·

COURS DE MACHINES.

COURS DE MACHINES

A L'USAGE

DES OFFICIERS D'ARTILLERIE,

DES

INGÉNIEURS ET DES PRATICIENS ;

PAR

J.-C. MIGOUT,

CHEF D'ESCADRON D'ARTILLERIE, ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

C.-L. BERGERY,

Ancien élève de l'école polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, professeur de sciences appliquées à l'école royale d'artillerie de Metz, membre correspondant de l'Institut de France, etc.





METZ,

VERRONNAIS, Imprimeur-Libraire et Lithographe.

PARIS,

GAULTIER-LAGUIONIE, Libraire, rue et passage Dauphine, 36.

STRASBOURG,

LEVRAULT, Imprimeur-Libraire.

1842.



AVANT-PROPOS.

Cet ouvrage forme la seconde partie du cours de machines employées par l'Artillerie, dont nous avons fait paraître la première partie sous le nom de *Théorie des affûts et des voitures*. Son titre annonce assez que nous n'avons point la prétention de publier un traité de mécanique appliquée. Notre but unique est d'être utiles à l'arme de l'artillerie, en offrant aux officiers employés dans les établissements, des exemples de calcul qui les mettent à même de déterminer brièvement le travail qu'exigent du moteur les machines placées sous leur direction, et d'arriver ainsi

à reconnaître les améliorations dont elles sont susceptibles.

Mais nous ne pouvions nous borner à rappeler la relation algébrique de la puissance et de la résistance. Il convenait de montrer, aussi succinctement qu'il était possible, comment la théorie est parvenue à établir les formules, afin surtout de rendre les applications plus intelligibles aux personnes qui n'auraient retenu de leurs études que les principes généraux de la mécanique rationnelle.

On sentira que notre travail aurait été beaucoup trop volumineux, s'il eût embrassé toutes les machines dont les établissements de l'Artillerie font usage. Nous avons dû le restreindre aux plus importantes, à celles qui, pour ainsi dire, tiennent la tête de chaque classe. Mais les considérations théoriques qui les concernent permettront toujours d'en appliquer aisément les formules aux machines analogues dont nous n'aurons point parlé. Ainsi, par exemple, après avoir étudié le tour à canons, on ne pourra éprouver aucune difficulté pour les calculs d'une aiguiserie, ni pour ceux des laminoirs étampés employés dans quelques clouteries.

Nous avons puisé les matériaux de notre cours dans tous les ouvrages de mécanique

appliquée publiés jusqu'à ce jour, et particulièrement dans ceux de Navier et de M. Poncelet, qu'on doit considérer en quelque sorte comme les créateurs de cette science. Bien que le cours fait par le dernier à l'école d'application de l'artillerie et du génie ne soit encore que lithographié, il a reçu une véritable publicité, car toutes les bibliothèques militaires le possèdent, et depuis sa rédaction, il a été constamment donné à chaque élève de l'école.

Nous reconnaissons donc formellement avoir fait de nombreux emprunts à M. Poncelet, notamment pour la théorie des roues à augets, l'écoulement des fluides, l'action de la vapeur dans les cylindres, celle de l'air dans les machines soufflantes; si nous ne l'avons pas cité plus souvent, c'est uniquement afin d'éviter de fastidieuses répétitions. Les seules choses de ce livre qui nous appartiennent sont le plan, l'exposition que nous avons tâché de rendre simple et claire, les descriptions des machines, les calculs, quelques détails, quelques explications ou démonstrations. Tout cela fait bien peu, nous en convenons volontiers; mais il fallait remplir notre tâche, et sous peine d'errer, nous devions imiter les bons auteurs.

Continuant la marche adoptée pour notre *Théorie des affûts et des voitures d'artillerie,* nous avons établi les formules de toutes les machines, des plus compliquées comme des plus simples, à l'aide du seul principe de l'*égalité des quantités d'action*. Il revient au principe très-ancien des *vitesses virtuelles*, quand la variation de l'effort oblige à considérer le travail fait le long d'un chemin infiniment petit, car ce qu'on appelle maintenant *quantité d'action élémentaire* est en réalité le moment virtuel d'autrefois. Le mouvement d'une bielle conduite par une manivelle offre un exemple du cas dont il s'agit; ses équations ont été données par M. Poncelet dans son cours oral, pour la première fois, croyons-nous.

C'est encore à l'imitation du même savant que les chocs sont, dans cette seconde partie, assimilés à des quantités de mouvement consommées en un temps infiniment court, et que leur équilibre est traité comme celui des forces de pression. Nous devions d'autant plus adopter une telle manière de voir, que déjà nous l'avions empruntée à Poisson pour analyser les effets du tir, dans notre première partie.

Après de telles déclarations et le complet désintéressement qui s'y montre, les per-

sonnes impartiales reconnaîtront, nous avons droit de l'espérer, que si notre théorie des affûts et des voitures eût dû quelque chose au *cours d'artillerie* professé à l'école d'application, nous l'aurions dit avec la même franchise. Mais *la vérité* est que toutes les idées de quelque valeur qui peuvent se trouver dans notre première partie, se trouvent aussi dans le manuscrit envoyé par nous au comité d'artillerie en 1829, conformément aux ordres du ministre de la guerre. Le fait est d'ailleurs facile à vérifier, car ce manuscrit existe encore dans les archives du comité. Or, le cours de l'école d'application n'a été commencé qu'en 1832 ou 1831. Comment donc aurions-nous pu en profiter? Au reste, une partie de ce cours est imprimée; la suite, jusqu'à la fin, existe lithographiée; chacun peut donc le comparer à notre ouvrage, et juger s'il y a réellement emprunt tacite.

Disons, pour terminer, que, malgré ses développements théoriques, le cours de machines offert aujourd'hui au public studieux nous semble pouvoir être utile même aux simples praticiens. Les exemples de calcul s'y trouvent effectivement fort multipliés, et dans tous les formules sont traduites en chiffres; de sorte qu'il suffit de substituer les données

d'une machine, construite ou projetée, aux nombres correspondants du livre, pour déterminer soit le travail de l'opérateur, soit celui auquel le moteur doit suffire.

CORRECTIONS.

Pages.	Lignes.	Au lieu de:	Lisez:
114	27	(P. I, F. 28)	(P. I, F. 30)
12	14	(P. I, F. 29).	(P. I, F. 31).
127	6	(P. I, F. 30);	(P. I, F. 32);
134	32	(P. I, F. 31).	(P. I, F. 33).
286	20	(P. III, F. 17),	(P. III, F. 19),
496	30	(P. VI, F. 7)	(P. VI, F. 17)

COURS

DE

MACHINES.

Il y a deux manières de traiter des machines connues. L'une purement théorique consiste à calculer, d'après les principes de la mécanique rationnelle, toutes les résistances accessoires, pour le cas du mouvement, et à exprimer que l'équilibre existe entre ces résistances, la résistance principale et la puissance, une fois que la machine a une marche régulière. Les équations qu'on obtient par là mettent à même de déterminer la quantité d'action qu'il faut dépenser pour exécuter un travail donné, ou le travail qui résultera de l'emploi d'un moteur connu.

L'autre méthode est en quelque sorte mixte; on y emploie bien des formules théoriques, mais on se sert aussi de données fournies par l'expérience: ces données sont les effets utiles produits par les moteurs au moyen de machines semblables à celles qui sont en question. On fait alors abstraction des résistances accessoires, et l'on se borne à exprimer qu'il y a équilibre entre la résistance principale et la partie de l'effort du moteur qui produit

l'effet utile. Il en résulte une équation qui permet de déterminer la force motrice à employer pour exécuter un travail proposé, ou le travail que fera une force motrice connue.

De ces deux méthodes, la première est sans contredit la plus savante; elle est indispensable, lorsqu'il s'agit d'une machine nouvelle ou d'une machine pour laquelle l'expérience n'a fourni encore aucune donnée; mais elle n'est en réalité qu'approximative, car il est impossible d'évaluer exactement les résistances accessoires: les nombres qu'il faut introduire dans les formules sont fournis par des observations faites sur les frottements et la raideur des cordes, dans des circonstances qui diffèrent ordinairement de celles où l'on se trouve; le désaccord qui existe entre ceux que donnent les divers auteurs prouve d'ailleurs que ces nombres ne sont pas fort exacts, ou qu'ils n'ont d'exactitude que pour un seul cas particulier.

La seconde méthode doit donc conduire à des résultats tout aussi certains que ceux de la première, et l'on y trouve l'avantage de n'avoir à effectuer que des calculs simples et peu nombreux.

Nous appliquerons toutefois les deux méthodes à chaque machine, du moins quand nous connaîtrons l'effet utile qu'elle permet de produire. Ce sera donner les moyens de comparer les résultats et de se déterminer dans le choix à faire.

MACHINES MUES PAR L'HOMME.

Les machines que nous étudierons d'abord sont celles que l'Artillerie met en mouvement au moyen d'hommes; elles forment trois classes distinctes: la première renferme les machines qui produisent des tractions; la

deuxième, celles qui exercent des chocs; la troisième, celles qui coupent. Toutes font éprouver aux moteurs animés une fatigue qui dépend de la quantité d'action produite; mais d'autres causes influent aussi sur cette fatigue, et il est important de les reconnaître, afin de les détruire ou de les affaiblir autant qu'il est possible.

FATIGUE DES MOTEURS ANIMÉS.

1. Les moteurs animés sont fréquemment employés dans les arts, bien que la quantité d'action qu'ils fournissent coûte en général plus cher que celle des moteurs inanimés. Les motifs de la préférence si souvent donnée aux premiers sont la facilité avec laquelle ils se transportent d'un lieu dans un autre, puis le pouvoir qu'ils ont de varier au besoin leur mode d'action, et même de changer la nature de leur travail.

Un moteur animé ne peut agir sur un récepteur qu'en exerçant une pression contre une certaine partie de cet organe; de là une pression égale et contraire contre une portion du corps du moteur, et par suite douleur ou fatigue d'autant plus intense que les points de contact sont moins nombreux.

Il faut donc que la partie du récepteur à laquelle est immédiatement appliqué le moteur, ait la plus grande étendue possible; il faut aussi que, dans certains cas, elle soit garnie d'une substance élastique et douce qui rende le contact intime et peu douloureux.

La sensation pénible qui résulte pour un moteur animé, de la pression qu'il exerce, augmente avec le temps et peut finir par devenir insupportable, à cause de la tension continuelle de tous les muscles. Un tel moteur peut donc fatiguer beaucoup, sans avoir à produire aucune quantité d'action; aussi ne doit-il être

que très-rarement employé à maintenir l'équilibre dans une machine. Il fatigue même quand il marche librement, sans exercer ou supporter ni pression, ni traction, et cela vient de ce que son corps est analogue aux machines, qui, tout en fonctionnant à vide, ont à vaincre les résistances accessoires auxquelles donne lieu le jeu de leurs organes.

2. Toutes les fois qu'un moteur animé qui se meut, exerce une pression dans un sens perpendiculaire à sa direction, il éprouve évidemment deux sortes de fatigues, comme dans tout autre cas : l'une qui naît du mouvement, l'autre qui résulte de la pression ; mais il les éprouve sans produire aucune quantité d'action. C'est dans une telle circonstance que se trouve un homme chargé d'empêcher la chute d'une voiture qui roule sur un plan incliné dans le sens de l'essieu.

3. Si un moteur animé exerce en marchant un effort dont la direction soit oblique à celle de son mouvement, la fatigue dépend de la ligne que suit le point d'application. Supposons, pour le faire voir, que deux hommes tirent également un corps A (Pl. I, Fig. 1) au moyen de cordons BC, BD qui font chacun un angle θ avec le prolongement du câble AB.

Les tensions des cordons et la résistance R seront représentées, dès que le mouvement se trouvera uniforme, par les côtés d'un triangle isocèle B*ce*, et l'on aura $Bc : Be :: \sin Bec : \sin Bce$, ou $Bc : Be :: \sin \theta : \sin 2\theta$, ce qui donnera $Bc = R\frac{\sin\theta}{\sin 2\theta} = R\frac{\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{R}{2\cos\theta}$, pour l'effort que chaque homme devra exercer dans le sens de son cordon.

Or, si l'on fait cheminer les deux moteurs selon des directions CC′, DD′ parallèles à AB, comme dans le halage, la tension B*c* ou C*c*′ aura deux compo-

santes constantes, l'une $Cc' \cos\theta = \frac{R}{2}$ dans le sens CC', l'autre $Cc' \sin\theta = \frac{R \tang \theta}{2}$ dans le sens CC'', et, en représentant par l le chemin BE, on trouvera que chaque homme dépensera pour le faire parcourir à la résistance, une quantité d'action $\frac{lR}{2}$, comme s'il suivait précisément ce chemin; mais en outre il devra exercer continuellement l'effort $\frac{R \tang \theta}{2}$, perpendiculaire à sa direction, pour empêcher son point d'application C ou D de se rapprocher de BE.

Les moteurs marchent-ils selon CC'', DD'', directions d'équerre aux précédentes? la tension $Cc' = \frac{R}{2 \cos\theta}$ se décompose comme tout à l'heure; de sorte que chaque homme fait parallèlement à CC' un effort constant $\frac{R}{2}$, pour empêcher son point d'application de quitter $C''D''$, et en outre un effort $\frac{R \tang \theta}{2}$ selon la direction de la marche. Mais ce dernier effort varie, parce que θ augmente à mesure que C s'éloigne de E. Représentons CE par z et BC par k, nous aurons $\tang \theta = \frac{z}{l} = \frac{z}{\sqrt{k^2 - z^2}}$, et pour obtenir la quantité d'action dépensée utilement, il faudra intégrer l'expression $\frac{R}{2} \frac{z\,dz}{\sqrt{(k^2 - z^2)}}$ qui donne la quantité d'action relative au chemin infiniment petit dz.

Or, $\int \frac{R}{2} z dz (k^2 - z^2)^{-1/2} = -\frac{R}{2} (k^2 - z^2)^{1/2} + C$, et comme le mouvement doit durer depuis $z = \sqrt{k^2 - l^2}$ jusqu'à $z = k$, pour que B parcoure BE, on a

$$-\frac{R}{2}(k^2-z^2)^{1/2}+C=$$
$$-\frac{R}{2}(k^2-k^2)^{1/2}-\left\{-\frac{R}{2}(k^2-k^2+l^2)^{1/2}\right\}=\frac{lR}{2}.$$

Ainsi, et cela doit être en effet, la quantité d'action dépensée utilement par chaque homme selon CC′,DD″, est encore la moitié de celle qui se consomme sur la résistance R le long du chemin BE.

4. La fatigue d'un moteur animé dépend en outre de la vitesse du mouvement ou du temps employé à parcourir un chemin déterminé.

Admettons en premier lieu que les temps soient les mêmes, et voyons ce qui advient, quand $\theta=45^\circ$ pendant toute la durée du premier mouvement et à l'origine du second. Comme alors le chemin $CC''=BC-CE=\sqrt{2l^2}-l=l(\sqrt{2}-1)=0,414l$, tandis que $CC'=l$, la vitesse du premier cas sera plus que double de celle du deuxième; et puisqu'un moteur animé n'est pas capable de la même quantité d'action qu'un autre d'égale force qui travaille moins vite, la quantité d'action $\frac{lR}{2}$ fatiguera plus les hommes lorsqu'ils chemineront parallèlement à BE, que dans le cas où ils suivront une direction d'équerre à celle-là. En outre, l'effort perpendiculaire au sens de la marche sera le même dans les deux circonstances, car $\frac{R\tang\theta}{2}=\frac{R\tang 45^\circ}{2}=\frac{R}{2}$; mais exercé pendant une marche plus vive le long de CC′ que sur le chemin CC″, et durant le même temps, il sera nécessairement plus pénible. Pour deux raisons donc, la fatigue causée par la première direction surpassera celle qui aura lieu sur la seconde.

Si les vitesses étaient les mêmes, les temps se trouveraient différents; et comme un travail est évidemment d'autant moins pénible qu'il est réparti sur un plus grand nombre d'heures, ce serait en marchant paral-

lèlement à BE que les hommes éprouveraient le moins de fatigue relativement à la quantité d'action $\frac{lR}{2}$; mais l'effort perpendiculaire $\frac{R}{2}$ se trouverait exercé pendant plus de temps dans le même cas, et cette circonstance rapprocherait de l'égalité les deux fatigues.

Lorsque θ surpassera 45°, on aura $\tang \theta > 1$, $\frac{R \tang \theta}{2} > \frac{R}{2}$, $CE > l$, $CC'' < 0,414\, l$; la différence des vitesses en causera une plus grande que précédemment entre les fatigues, et celle des temps, une moindre. Enfin, ce sera le contraire, lorsque θ se trouvera plus petit que 45°.

A la vérité, ce n'est guère que dans le halage qu'on fasse cheminer le moteur parallèlement à la direction de la résistance, sans autre appareil qu'une simple corde BC attachée au bateau B. Ordinairement, et surtout dans les attelages, on empêche le rapprochement des points C, D au moyen d'une barre incompressible; le système CBD devient invariable; les moteurs n'ont plus à exercer l'effort $\frac{R \tang \theta}{2}$, en cheminant selon CC', DD', et ils éprouvent seulement la fatigue qui résulte de la quantité d'action totale lR consommée sur la résistance.

5. Il est visible, d'après ce qui précède, que pour une même quantité d'action à produire le long d'un chemin donné et avec une vitesse prescrite, le minimum de la fatigue a lieu quand le moteur animé fait seulement effort dans la direction de son mouvement; mais souvent on ne peut employer un tel mode d'action sans sacrifier d'autres avantages.

Si la vitesse peut être choisie à volonté, le minimum de la fatigue exigera encore une certaine relation entre

cette vitesse et la pression à exercer, car il est de fait que la variation du rapport de ces deux choses occasionne celle de la quantité d'action qui peut être produite par le moteur dans un temps donné. Mais l'expérience seule peut faire connaître le nombre qui, pour un travail déterminé, rend la fatigue un minimum : ce serait en vain qu'on voudrait le déduire de considérations physiologiques.

Les tableaux I, II, III indiquent les résultats moyens qu'a fournis l'expérience, et que Navier regarde comme les plus probables, quant aux poids qu'un homme ou un cheval peut transporter ou élever soit immédiatement, soit à l'aide d'une machine, quant aux vitesses qui peuvent être soutenues par le moteur, et quant à la durée journalière de l'action, relativement au maximum du travail et au minimum de la fatigue.

Nous ferons observer qu'il n'y aurait pas grand inconvénient à augmenter ou à diminuer un peu les poids ou les efforts indiqués par les tableaux, si l'on compensait cette variation par une diminution ou une augmentation de la vitesse ou de la durée du travail, car aux environs du maximum les petites variations de ses éléments n'ont pas une influence sensible.

Les expériences ont été faites de manière que les moteurs animés éprouvassent seulement la fatigue que la nourriture et le repos ordinaire peuvent faire complétement disparaître ; de sorte que ces moteurs seraient capables de produire pendant long-temps, sans nuire à leur santé, le travail indiqué par les tableaux. On pourrait donc exiger et obtenir davantage, si à une certaine durée d'action devait succéder un long repos qui permît aux moteurs de recouvrer l'énergie vitale que la nourriture et le repos journalier ne leur rendraient pas.

Nous ferons remarquer encore que différentes causes

physiques ou morales, dont il est impossible de tenir compte dans les expériences, parce qu'on ne saurait les prévoir, peuvent influer sur la quantité d'action que produisent des hommes ou des animaux donnés : elle est alors plus grande ou plus petite que la moyenne observée. Le mode de nourriture, la qualité des aliments, l'état de l'atmosphère et par conséquent le climat, la composition des ateliers ou des attelages, enfin le point de vue sous lequel les hommes envisagent leur travail, sont au nombre des causes dont nous voulons parler.

MACHINES A TRACTION.

Les machines qu'on emploie dans les établissements de l'Artillerie, pour exercer une traction, sont les treuils, le cabestan, les poulies, la chèvre et la grue.

TREUIL A MANIVELLE.

6. La plus simple des machines à traction est le treuil, et surtout le treuil à manivelle. Il transforme le mouvement circulaire continu du moteur en un mouvement rectiligne de même nature pour la résistance, et sert soit à élever un poids, soit à faire cheminer un corps sur la surface du sol. Il a seulement 4 organes.

Le récepteur est une manivelle en bois ou en fer ; le modificateur est un cylindre en bois qui porte deux tourillons de bois ou de fer à l'un desquels la manivelle se trouve adaptée ; le communicateur est une corde ou une chaîne qui lie à ce cylindre la masse qu'on doit mouvoir ; les supports sont deux coussinets en bois, en fer ou en bronze, établis sur une charpente ou sur un massif de maçonnerie, et dans lesquels tournent les tourillons.

Il y a des cas où la résistance principale exige que deux hommes agissent à la fois sur le treuil; on adapte alors une manivelle à chacun des tourillons, et l'on dirige en sens contraires les bras des deux récepteurs, afin que le moment maximum de l'effort d'un des moteurs ait lieu à l'instant même où le moment de l'effort de l'autre est à son minimum, et qu'il n'y ait aucun *point-mort*, c'est-à-dire aucune position où la résistance l'emporte sur la puissance.

7. La longueur du bras d'une manivelle peut être plus grande pour des hommes d'une haute stature que pour ceux d'une petite taille; elle est ordinairement comprise entre $0^m,36$ et $0^m,42$.

Le rayon du cylindre et celui de la corde dépendent de la résistance principale, mais le premier est ordinairement de $0^m,1$; le rayon des tourillons doit être aussi petit que le permet la force de la matière dont ils sont faits, afin que leur frottement s'exerçant plus près de l'axe diminue moins l'effet utile du moteur. Pour la même raison, on doit éviter d'employer une corde plus grosse qu'il n'est nécessaire; car son rayon entre dans le bras de levier de la résistance principale, et d'ailleurs la résistance accessoire qui provient de la raideur, est une certaine fonction du même rayon.

8. Il convient de déterminer cette fonction avant d'aller plus loin. Nous remarquerons d'abord que, dans une corde qui s'enroule sur un cylindre, la partie convexe s'alonge, tandis que la partie concave se raccourcit, et nous admettrons que l'alongement de la première se fait aux dépens de la seconde.

Comme les fils forment des hélices les uns autour des autres, le mouvement d'extension doit occasionner entre eux un frottement proportionné à la pression qu'ils se font subir mutuellement; et dans le cas où la ré-

sistance nommée *raideur des cordes* serait due tout entière à ce frottement, elle se trouverait aussi proportionnelle à la même pression, et par suite à la tension des fils. Or cette tension se compose de celle qu'ils ont acquise dans la fabrication de la corde et de celle qu'opère la traction. Si donc t désigne cette dernière, l'effort à faire pour enrouler une corde sur un cylindre sera le même que si, la raideur devenant nulle, t se trouvait augmenté de $a+bt$, a et b étant deux constantes qui dépendent de la nature du chanvre, des procédés de fabrication, du diamètre de la corde et de celui du cylindre.

Coulomb a trouvé que la raideur est proportionnelle à une certaine puissance μ du diamètre d de la corde, et l'on conçoit effectivement que l'alongement doit augmenter et diminuer avec ce diamètre. Il est évident du reste que l'angle dont chaque élément de la corde est obligé de s'infléchir pour s'appliquer sur un cylindre, varie en raison inverse du rayon ou du diamètre de ce cylindre. L'augmentation qu'il faut faire subir à la tension t, pour tenir compte de la raideur, doit donc être exprimée par

$$\frac{d^{\mu}}{D}(a+bt),$$

a et b ne dépendant plus que de la nature du chanvre et des procédés de fabrication.

Quant à l'exposant μ, Coulomb l'a trouvé égal à 1 pour les ficelles très-molles, égal à 2 pour les cordes neuves de plusieurs torons, et égal à 1,5 pour les mêmes cordes à demi-usées. Si l'usure est plus avancée, on prend 1,4 pour μ, et si la corde, sans être neuve, se trouve encore en bon état de service, $\mu=1,75$.

Comme le degré d'usure n'influe pas sensiblement sur la raideur des cordes goudronnées, il est aussi

exact et plus commode, selon le même physicien, de remplacer d^{μ} par le nombre n des fils de caret qui entrent dans la composition de ces cordes. L'augmentation de la tension t a donc alors pour expression

$$\frac{n}{D}(a'+b't).$$

Ces formules ayant été déduites d'expériences, méritent toute confiance; mais il n'en est pas de même des hypothèses que nous avons faites pour les expliquer. La corde qui embrasse une poulie A s'en écarte du côté de la résistance principale P (P. I, F. 2), de sorte que son contact B n'est pas sur la direction de la partie verticale PC; et au contraire du côté de la puissance Q, le contact se fait à l'extrémité du rayon perpendiculaire à la direction DQ de cette force. La raideur qui s'oppose au ploiement de la corde, ne contrarie donc pas d'une manière sensible le redressement. Or elle devrait y mettre obstacle, si elle était l'effet d'un simple frottement des fils. Il est donc probable qu'il y a extension réelle de quelques-uns de ces fils, et que leur élasticité s'unit au frottement pour constituer la raideur dans le cas du ploiement, tandis que dans celui du redressement, cette élasticité, agissant en sens inverse du frottement, dispense à peu près de tout effort.

Toutefois, les formules précédemment établies s'accordent encore avec ces nouvelles considérations, si l'on admet que l'alongement d'un fil soit proportionné à la tension.

Afin de rendre plus simples les formules dans lesquelles entrera la raideur des cordes, nous avons remplacé, au tableau VII, le diamètre D du cylindre par $2r$, double du rayon de ce cylindre augmenté du rayon de la corde. Ainsi, notre diviseur surpasse celui de Coulomb du diamètre de la corde, toujours fort petit par rapport à D.

Les nombres des deux dernières colonnes du même tableau exprimant des kilogrammes dans le cas où $2r = 1^m$, doivent exprimer des kilogrammes-mètres dans tout autre cas, afin que $\frac{d^\mu}{2r}(a + bt)$ donne des kilogrammes: t devient alors un nombre abstrait; ou bien si t conserve l'indication kilogrammes, $d^\mu b$ représente des mètres.

Lorsque le diamètre d' d'une corde diffère de ceux de la première colonne que représente d, la raideur vaut évidemment $\frac{d^\mu}{2r}(a + bt)\frac{d'^\mu}{d^\mu}$ ou $\frac{d^\mu}{2r}(a + bt)\left(\frac{d'}{d}\right)^\mu$ ou $\frac{1}{2r}(d^\mu a + d^\mu bt)\left(\frac{d'}{d}\right)^\mu$. Ainsi, après avoir remplacé $d^\mu a, d^\mu b$ par les nombres des deux dernières colonnes, $2r$ et t par leurs valeurs, il faut multiplier le résultat par la puissance μ du rapport qui existe entre le diamètre d' de la corde employée et le diamètre d de la corde analogue mentionnée au tableau.

9. Nous pouvons maintenant calculer le rapport de la puissance Q du treuil à la résistance principale P, en tenant compte de toutes les résistances accessoires, et en supposant le mouvement devenu uniforme.

L'effort Q peut être regardé comme constant, bien qu'il ne le soit pas en réalité, à cause des diverses positions du bras de l'homme; sa direction peut aussi être supposée tangente à la circonférence décrite par la manivelle (P. I, F. 3).

La résistance P est ordinairement un poids; mais pour embrasser tous les cas possibles, nous admettrons que sa direction fait un angle constant β avec la verticale, sans cesser pourtant d'être, comme celle de Q, dans un

plan perpendiculaire à l'axe du cylindre : si l'une ou l'autre des deux forces se trouvait dans un plan oblique, elle se décomposerait en deux parties, qui se dirigeraient l'une dans un plan perpendiculaire à l'axe, l'autre parallèlement à cet axe, et la dernière ne servirait qu'à faire frotter l'une des faces planes du cylindre contre le support placé du même côté.

Enfin, nous désignerons par R le bras de manivelle, par r le rayon du cylindre augmenté de celui de la corde, par ρ celui des tourillons, par p le poids de toute la machine, les supports exceptés, par f' le rapport du frottement à la résultante de toutes les forces qui agissent sur le treuil, et par θ la longueur de l'arc variable compris entre la direction de Q et la verticale, sur la circonférence dont le rayon est l'unité. Cet arc est évidemment le même que celui qui se trouve entre chaque position du bras de manivelle et l'horizontale AB. Lorsqu'on voudra connaître le nombre des degrés de l'un ou de l'autre, il suffira de multiplier la longueur θ par $\frac{360}{2\pi}$.

Quant à f', sa valeur est $\frac{f}{\sqrt{(1+f^2)}}$, si f désigne le rapport du frottement à la pression qui le cause. En effet, la direction de la résultante X à laquelle est dû le frottement circulaire d'un tourillon, ne rencontre point l'axe : elle se trouve oblique sur les surfaces frottantes. Soit α l'angle qu'elle forme avec la normale au contact de ces surfaces. On a deux forces : X cos α normale, qui cause le frottement ; X sin α tangente, qui le détruit, puisqu'il y a mouvement. Par conséquent, $X \sin \alpha = f X \cos \alpha$ et $\tang \alpha = f$. Ainsi, *l'angle du frottement*, c'est-à-dire l'angle sous lequel doit agir une puissance oblique, pour surmonter le frottement qu'elle fait naître, a pour tangente le coefficient du frottement produit par une force normale.

Mais le frottement valant $X \sin\alpha$, a $\sin\alpha$ pour rapport avec la puissance X. Donc,

$$f' = \sin\alpha = \frac{\tang\alpha}{\sqrt{(1+\tang^2\alpha)}} = \frac{f}{\sqrt{(1+f^2)}}.$$

Cela posé, si nous prenons AB pour origine du mouvement, la quantité d'action produite à chaque instant par la puissance est $QRd\theta$.

Comme la résistance agit à l'extrémité d'une corde, il faut, pour tenir compte de la raideur (8), ajouter à P l'expression $\frac{d^\mu}{2r}(a+bP)$, et alors la quantité d'action élémentaire de la résistance est $\left[P+\frac{d^\mu}{2r}(a+bP)\right]rd\theta$.

Les forces auxquelles la machine est soumise sont Q, P, p. Décomposées, elles donnent un groupe vertical $P\cos\beta - Q\cos\theta + p$, et un groupe horizontal $Q\sin\theta - P\sin\beta$. La résultante de ces deux groupes est $\sqrt{[(P\cos\beta - Q\cos\theta + p)^2 + (Q\sin\theta - P\sin\beta)^2]}$, et parce que le premier terme du radical est toujours plus grand que le second, on a pour valeur approchée du frottement des tourillons, à moins de $1/_{25}$ près (tableau IX), $f'[0,96(P\cos\beta - Q\cos\theta + p) + 0,4(Q\sin\theta - P\sin\beta)]$. La quantité d'action que dépense ce frottement à chaque instant est donc

$$f'\rho d\theta[0,96(P\cos\beta - Q\cos\theta + p) + 0,4(Q\sin\theta - P\sin\beta)].$$

Mais la quantité d'action produite par la puissance doit toujours égaler la somme de celles qu'exigent la résistance principale et les résistances accessoires; par conséquent,

$$QRd\theta = rd\theta\left[P+\frac{d^\mu}{2r}(a+bP)\right]$$
$$+f'\rho d\theta\left[0,96(P\cos\beta - Q\cos\theta + p) + 0,4(Q\sin\theta - P\sin\beta)\right].$$

L'intégration donne

$$QR\theta = r\theta\left[P+\frac{d^{\mu}}{2r}(a+bP)\right]$$
$$+f'\rho\theta(0{,}96\,P\cos\beta+0{,}96\,p-0{,}4\,P\sin\beta)$$
$$+f'\rho(-0{,}96\,Q\sin\theta-0{,}4\,Q\cos\theta)+C.$$

Avant de rendre cette équation relative à un tour complet, nous remarquerons que $\sin\theta$, positif de $\theta=0$ jusqu'à $\theta=\pi$, prend les mêmes valeurs négatives de π à 2π ; autrement, l'augmentation que produit dans l'effet du frottement des tourillons le terme $f'\rho(-0{,}96Q\sin\theta)$ pendant un demi-tour, est compensée par la diminution égale qu'opère le même terme pendant le demi-tour suivant. Il en doit être ainsi effectivement, car cette quantité d'action finie provient de la quantité d'action élémentaire $f'\rho d\theta(-0{,}96Q\cos\theta)$; c'est l'effort vertical $-0{,}96f'Q\cos\theta$ qui l'engendre ; or cet effort, après avoir pressé les tourillons pendant le demi-tour où $\cos\theta$ est négatif, tend à les soulever dans le demi-tour suivant, et diminue la composante $P\cos\beta$. Il n'y a donc pas lieu de considérer le produit de l'effort $0{,}96f'Q$ par le chemin vertical $\rho\sin\theta$, quand il s'agit d'un tour complet.

Il n'en est pas de même pour la quantité $f'\rho(-0{,}4Q\cos\theta)$. Comme elle provient de la composante horizontale $0{,}4\,Q\sin\theta$, l'effort qui l'engendre presse les tourillons de B vers A pendant le premier demi-tour, de A vers B pendant le second, et cause toujours un frottement. Sans doute la force $P\sin\beta$ tantôt s'ajoute à cet effort et tantôt le contrarie ; mais attendu que la petitesse ordinaire de l'angle β la rend très-faible, il y a toujours pression horizontale des tourillons contre les coussinets, soit dans un sens, soit dans le sens opposé, et par conséquent la quantité d'action consommée par le frottement qui en résulte ne se réduit jamais à zéro.

Or, à cause des changements de signe de $\cos\theta$, le

terme $f'\rho(0,4\,Q\cos\theta)$ disparaîtrait si l'on intégrait de $\theta=0$ à $\theta=2\pi$. Considérant donc que les quantités d'action dépensées dans un demi-tour le sont aussi dans le suivant, nous prendrons seulement l'intégrale de $\theta=0$ à $\theta=\pi$, puis nous doublerons le résultat.

On a pour $\theta=\pi$ qui donne $\sin\theta=0$, $\cos\theta=-1$,

$$QR\pi=r\pi\left[P+\frac{d^{\mu}}{2r}(a+bP)\right]$$
$$+f'\rho\pi(0,96P\cos\beta+0,96p-0,4\,P\sin\beta)+0,4f'\rho Q+C,$$

et pour $\theta=0$ qui donne $\sin\theta=0$, $\cos\theta=1$,

$$0=-0,4f'\rho Q+C.$$

Retranchant la seconde équation de la première, on obtient, pour un demi-tour,

$$QR\pi=r\pi\left[P+\frac{d^{\mu}}{2r}(a+bP)\right]$$
$$+f'\rho\pi(0,96P\cos\beta+0,96\,p-0,4P\sin\beta)+0,8f'\rho Q,$$

et pour un tour complet,

$$2\pi RQ=2\pi r\left[P+\frac{d^{\mu}}{2r}(a+bP)\right]$$
$$+2\pi\rho f'(0,96\,P\cos\beta+0,96p-0,4\,P\sin\beta)+1,6f'\rho Q,$$

ou $$RQ=r\left[P+\frac{d^{\mu}}{2r}(a+bP)\right]$$
$$+\rho f'(0,96\,P\cos\beta+0,96\,p-0,4P\sin\beta)+0,2546f'\rho\,Q,$$

ou enfin

$$Q=\frac{P\left[r+\frac{d^{\mu}b}{2}+\rho f'(0,96\cos\beta-0,4\sin\beta)\right]+\frac{d^{\mu}}{2}+0,96\rho f'p}{R-0,2546f'\rho}.$$

Si la résistance principale P est un poids qu'il s'agisse d'élever verticalement, $\beta=0$, $\cos\beta=1$, $\sin\beta=0$, et l'on peut poser, en portant 0,96 à 1,

$$Q=\frac{P\left(r+\frac{d^{\mu}b}{2}+\rho f'\right)+\frac{d^{\mu}a}{2}+\rho f'p}{R-0,2546f'\rho}.$$

Dans le cas de deux manivelles, la puissance Q n'exerce aucune pression sur les tourillons, puisqu'elle se compose alors de deux forces toujours égales, parallèles et de sens inverses. Le terme $0,2546 f'\rho Q$ disparait donc, et

$$Q = \frac{P\left[r + \frac{d^{\mu} b}{2} + \rho f'(0,96 \cos\beta - 0,4 \sin\beta)\right] + \frac{d^{\mu} a}{2} + 0,96 \rho f' p}{R}$$

ou, pour un poids, $Q = \dfrac{P\left(r + \frac{d^{\mu} b}{2} + \rho f'\right) + \frac{d^{\mu} a}{2} + \rho f' p}{R}$.

10. Lorsqu'au lieu de l'effort total du moteur, on considère seulement la partie que consomme la quantité d'action communiquée à la résistance, partie qu'on est convenu d'appeler *effort utile*, il n'y a plus lieu de s'occuper des résistances accessoires : ces résistances sont détruites à chaque instant par la portion d'effort dont on fait abstraction. Conséquemment, l'effort utile Q' fait constamment équilibre à la résistance P, une fois que le mouvement de la machine est devenu uniforme, et la relation de ces deux forces reste pendant le mouvement ce qu'elle serait pour le cas d'équilibre au repos.

On a donc dans ce cas la simple équation des moments

$$Q'R = Pr.$$

11. Le tableau III nous apprend qu'un manœuvre agissant sur la manivelle d'un treuil, peut produire moyennement un effort utile de 8^{kg}, c'est-à-dire qu'il détruit les résistances accessoires, et qu'il exerce en outre une pression de 8^{kg} sur son point d'application, en lui faisant parcourir $0^{m},75$ par seconde.

Si donc nous remplaçons dans l'équation $Q'R = Pr$

l'effort Q' par 8^{kg}, et R par un nombre compris entre $0^m,36$ et $0^m,42$, nous obtiendrons, par exemple, $8^{kg} \times 0^m,4 = Pr$ pour relation entre la résistance principale et le rayon du cylindre augmenté de celui de la corde.

Lorsque la résistance P sera connue en kilogrammes, la valeur numérique de Pr fournira le rayon qu'il faudra donner au cylindre, pour qu'un homme puisse manœuvrer tout un jour avec une vitesse constante de $0^m,75$, ou communiquer à la masse de P une vitesse de $0^m,75 \frac{r}{R}$; car les vitesses sont proportionnelles aux bras de levier, puisque la puissance et la résistance agissent autour du même axe de rotation.

Quand on voudra employer un treuil construit, dans lequel $r = 0^m,1$, par exemple, la valeur numérique de Pr fera connaître la résistance qu'un homme pourra vaincre à chaque instant d'une journée de travail, et avec une vitesse constante de $0^m,75$ par seconde : on trouvera que $P = 32^{kg}$, et que le poids parcourra environ $0^m,19$ par seconde.

Dans les deux cas, le travail du moteur ou la quantité d'action produite chaque jour différera peu du maximum. Il est du reste évident que si l'on voulait employer deux hommes, il faudrait se servir de l'équation $8^{kg} \times 2 \times 0^m,4 = Pr$.

De ce que le produit Pr est constant pour le même moteur et la même manivelle, il résulte que, dans le cas où le fardeau se trouve susceptible d'être fractionné arbitrairement, on peut élever un grand poids au moyen d'un petit cylindre, ou un faible poids au moyen d'un grand cylindre, sans altérer le travail total, pourvu qu'on ne change pas la longueur du bras de manivelle; car la quantité d'action produite

en $1''$ est $P \times 0^m,75\frac{r}{R}$, et si Pr ne varie pas, ni R non plus, le produit est constant.

Mais, comme le premier mode augmenterait les résistances accessoires, et que le second multiplierait les pertes de temps qu'on fait pour attacher et détacher la corde à chaque ascension, il convient de se tenir dans un juste milieu.

On peut avoir à élever un poids donné à une hauteur déterminée. Dans un tel cas, le produit du poids exprimé en kilogrammes, par la hauteur exprimée en mètres, est la quantité d'action à dépenser. Divisant par 172800^k, quantité d'action que peut fournir l'homme dans une journée de huit heures, au moyen d'un treuil, on a le nombre de jours nécessaire à un seul homme pour exécuter le travail. La moitié du quotient donne le temps qu'emploierait un treuil à deux hommes, ou bien le nombre de treuils à deux manivelles qu'il faudrait pour faire le travail en une journée.

12. La résistance n'est plus seulement le poids P à élever, lorsque le trajet qu'il doit parcourir se trouve un peu long. Alors, il faut tenir compte du poids de la partie du cordage comprise entre le cylindre et le fardeau, et comme la longueur de cette partie diminue à mesure que P monte, la résistance va sans cesse en s'affaiblissant. L'effort du moteur serait donc variable, si le modificateur était cylindrique. Or, il importe de le rendre constant, afin qu'à chaque instant il soit précisément égal à celui dont l'homme est capable dans un travail journalier, que le moteur n'ait rien de surabondant, ou que sa fatigue ne surpasse jamais celle qu'il peut éprouver sans inconvénient.

Le moyen employé pour prévenir la variation de la puissance consiste à faire croître le bras de levier de la

résistance principale proportionnellement à la diminution de cette force. On y parvient en se servant d'un modificateur tronc-conique, et en fixant l'extrémité de la corde près de la petite base ; mais les deux rayons extrêmes doivent être convenablement déterminés.

Soit p' le poids de la corde par unité de longueur, et x la longueur variable de la partie déroulée ; la relation de la puissance au vrai fardeau est alors $QR=(P+p'x)r$, attendu que les résistances accessoires n'étant pas sensiblement augmentées par la valeur de x peuvent être supprimées dans les deux membres de l'équation. On tire de là $r=\frac{QR}{P+p'x}$. Pour déduire de cette équation le plus petit rayon r_1 du modificateur, il suffit évidemment d'y faire $x=l$, longueur de toute la corde à dérouler, et pour obtenir le plus grand rayon r_2, il faut rendre x nul. Alors, on aura toujours $Pr_2=(P+p'l)r_1=(P+p'x)r$, l'effort Q sera constant, et l'on pourra négliger, dans les calculs, la partie de fardeau provenant de la corde déroulée, moyennant qu'on emploie pour r le plus grand rayon du modificateur, augmenté du rayon de la corde.

Mais l'effort de la puissance n'est pas encore rendu uniforme pendant toute la durée du travail, car pour que le mouvement ne s'accélère pas dans la descente, il suffit de retenir la manivelle avec une force $\frac{p''r_2}{R}$ diminuée des résistances accessoires, p'' étant le poids de l'opérateur déchargé.

C'est l'emploi de deux opérateurs égaux en poids qui rend la puissance la même dans l'ascension et dans la descente : l'un monte chargé, tandis que l'autre descend à vide ; les deux cordes sont enroulées en sens inverses, et le modificateur est formé de deux troncs de

cône égaux, dont les grandes bases se confondent : il est alors appelé *baritel.* Cet appareil favorise la puissance, malgré l'augmentation qu'il cause aux résistances accessoires, car l'effort nécessaire, abstraction faite de ces résistances, est seulement $\frac{(P-p'')r_2}{R}$.

13. Il nous reste maintenant à faire l'application des formules établies pour le treuil à manivelle, afin de montrer comment on doit s'en servir.

Supposons d'abord que le treuil chargé d'un poids ait une seule manivelle. Nous devrons employer l'équation

$$Q=\frac{P\left(r+\frac{d''b}{2}+\rho f'\right)+\frac{d''a}{2}+\rho f'p}{R-0{,}2546f'\rho}.$$

Soit $P=1500^{kg}$ suspendus à une corde de chanvre, neuve, sèche, et d'un diamètre $d=0^m{,}04$. D'après le tableau VII, $\frac{d''b}{2}=\left(\frac{0^m{,}04}{0^m{,}02}\right)^2\times\frac{0^k{,}0097382}{2}=0^k{,}0195$, et $\frac{d''a}{2}=\left(\frac{0^m{,}04}{0^m{,}02}\right)^2\times\frac{0^k{,}22246}{2}=0^k{,}445$. Comme $\frac{d''b}{2}$ provient de la raideur pour 1^{kg} de charge, on a pour 1500^{kg} le produit $0^k{,}0195\times1500=1500^{kg}\times0^m{,}0195$.

Donc, dans la valeur de Q, $\frac{d''b}{2}=0^m{,}0195$.

Donnons un rayon de $0^m{,}075$ au modificateur. Il en résultera $r=0^m{,}075+0^m{,}02=0^m{,}095$.

Admettons que les tourillons sont en fer et roulent dans des encastrements en cuivre ou en bronze. Leur rayon pourra être $0^m{,}015=\rho$, et d'après le tableau VI, on aura $f'=0{,}155$ ou $0{,}16$.

Soient enfin $R = 0^{m},4$ et $p = 100^{kg}$. Il viendra

$$Q = \frac{1500^{kg}(0^{m},095 + 0^{m},0195 + 0^{m},015 \times 0,16) + 0^{k},445 + 0^{m},15 \times 0,16 \times 100^{kg}}{0^{m},4 - 0,2546 \times 0,16 \times 0^{m},015},$$

d'où $Q = \dfrac{1500^{kg} \times 0^{m},1169 + 0^{k},445 + 0^{k},24}{0^{m},399\,388\,96} = \dfrac{175^{k},35 + 0^{k},685}{0^{m},399}$
$= \dfrac{176^{k},035}{0^{m},399} = 441^{kg},19.$

Si l'on négligeait les résistances accessoires, on aurait
$Q' = \dfrac{Pr}{R} = \dfrac{1500^{k} \times 0^{m},095}{0^{m},4} = 356^{kg},25.$

Conséquemment, les résistances accessoires valent en somme $441^{kg},19 - 356^{kg},25 = 84^{kg},94$ et prennent à peu près les 0,2 de la puissance nécessaire ou les 0,24 de celle qui suffirait, si elles n'existaient pas.

Il est bon de reconnaître pour combien la raideur de la corde entre dans les $84^{kg},94$ de résistances accessoires. Nous devrons évidemment employer à cet effet l'équation

$$Q = \frac{P(r + \rho f') + \rho f' p}{R - 0,2546 f' \rho}.$$

Elle donne

$$Q = \frac{1500^{kg}(0^{m},095 + 0^{m},015 \times 0,16) + 0^{m},015 \times 0,16 \times 100^{kg}}{0^{m},399}$$
$= 366^{kg},77.$

La raideur exige donc $441^{kg},19 - 366^{kg},77 = 74^{kg},42$, et le frottement des tourillons s'élève seulement à $84^{kg},94 - 74^{kg},42 = 10^{kg},52$. Ainsi, environ $1/6$ de l'effort $441^{kg},19$ serait économisé, si la corde était remplacée par une chaîne qui s'enroulât et se déroulât sans donner lieu à l'arqueboutement ni au glissement des chaînons l'un sur l'autre, ou par une chaîne à chaînons larges et peu gros dont le frottement est assez faible pour être négligé. Mais on devrait faire entrer dans P le poids de la chaîne qui, supérieur à celui d'une corde de même résistance, augmenterait le frottement des tourillons.

Dans le cas de deux manivelles, on emploierait l'équation

$$Q = \frac{P\left(r + \frac{d''b}{2} + \rho f'\right) + \frac{d''a}{2} + \rho f' p}{R},$$

et avec les données précédentes, on trouverait

$$Q = \frac{176^{k},035}{0^{m},4} = 440^{kg},09,$$

valeur qui, différant très-peu de $441^{k},19$, montre qu'il n'y aurait nul inconvénient à négliger, dans le cas d'une seule manivelle, le deuxième terme du dénominateur de la puissance Q.

TREUIL A ÉCHELONS.

14. Le treuil à manivelle est fréquemment employé, à cause de sa simplicité et de la facilité avec laquelle on peut le construire, l'établir et le changer de place; mais sous le rapport de la quantité d'action produite, on préfère le treuil à échelons. Le tableau III montre en effet qu'un homme peut, au moyen d'une semblable machine, exécuter un travail de $259\,200^{k}$, au lieu des $172\,800^{k}$, qu'il donne sur un treuil à manivelle; de sorte que le changement de récepteur suffit pour procurer une augmentation de moitié dans le travail du moteur : cet avantage provient du mode d'action.

Les échelons forment les génératrices d'un cylindre et sont portés par deux anneaux composés de jantes. Il en résulte une espèce de roue qui a même axe que le cylindre modificateur. Les autres organes sont semblables à ceux du treuil à manivelle.

L'homme moteur est placé à l'extérieur de la roue, de manière que ses pieds se trouvent au niveau de l'axe. Il se tient à une barre fixe, quand il se borne à employer

son poids pour faire tourner; il presse contre cette barre de bas en haut, lorsqu'il doit produire, au moyen de ses muscles, un effort supérieur à son poids; enfin la même barre lui sert d'appui, s'il veut diminuer la pression et ralentir la rotation de la roue. Le premier mode d'action est celui qui produit le plus grand travail journalier.

15. Le diamètre de la circonférence sur laquelle se trouvent les axes des échelons est de 3^m au moins et de 6^m au plus. On préfère le treuil qui a des leviers pour récepteurs, à une roue dont le diamètre serait moindre que la limite inférieure, et si le diamètre surpassait la limite supérieure, le poids de la roue rendrait trop grandes les résistances accessoires.

La longueur des échelons doit être de 82 centimètres par homme; leur écartement est d'à peu près 3 décimètres, et leur diamètre surpasse celui dont ils auraient besoin pour équilibrer par leur résistance le poids des moteurs.

Quant au diamètre du cylindre modificateur, il est toujours le douzième de celui de la roue.

16. Nous considérerons le cas le plus général, pour déterminer le rapport de la puissance Q à la résistance P. Ainsi, la première sera supposée agir dans une direction constante, tangente à la roue (P. I, F. 4) et inclinée sous un angle α par rapport à la verticale du contact. La direction de la résistance, toujours tangente au cylindre modificateur, fera un angle β avec la verticale de son contact. Nous désignerons par θ la longueur variable de l'arc compris entre le rayon qui aboutit à une position quelconque du contact de Q et la verticale du centre, sur une circonférence de rayon 1, concentrique à celles de la machine. Le rayon de la roue, celui du cylindre, celui des tourillons, et le rapport du

frottement à la pression, seront encore représentés respectivement par R, r, ρ, f'. Enfin, toutes les forces agiront dans des plans perpendiculaires à l'axe de la machine.

Si la verticale du centre est prise pour origine du mouvement, la puissance produira, dans chaque instant, une quantité d'action $QRd\theta$, car le point de la roue auquel cette force se trouve appliquée, parcourra un arc $Rd\theta$.

Si, pour plus de généralité, la machine est supposée au repos, il faudra communiquer à la masse $\frac{P}{g}$ une vitesse v, selon la direction de la corde, et aux pièces de rotation une vitesse angulaire ω.

Or, dans chaque instant dt, la masse $\frac{P}{g}$ recevra un accroissement de vitesse dv, ou une quantité de mouvement $\frac{P}{g}dv$; l'effort nécessaire pour la produire est $\frac{P}{g}\frac{dv}{dt}$, et comme d'après, les formules du mouvement varié, le chemin parcouru en un instant par la masse sera vdt, elle consommera une quantité d'action $\frac{P}{g}\frac{dv}{dt}vdt=\frac{P}{g}vdv$.

On peut dire aussi que la quantité d'action à consommer en un temps fini est $\frac{P}{g}\frac{v^2}{2}$, et que, par conséquent, il faut dépenser dans un instant la différentielle de $\frac{P}{g}\frac{v^2}{2}$, qui est $\frac{P}{g}vdv$.

Soit maintenant dm un élément des pièces tournantes, et r' sa distance à l'axe de rotation. Il recevra, dans chaque instant, un accroissement de vitesse $r'd\omega$ ou une quantité de mouvement $r'd\omega dm$; l'effort nécessaire pour la produire est $\frac{r'd\omega dm}{dt}$, et parce que le chemin parcouru

pendant dt, par l'élément dm, sera $r'\omega dt$, cet élément consommera une quantité d'action
$\frac{r'd\omega dm}{dt}r'\omega dt = \omega d\omega r'^2 dm$. La mise en mouvement de toutes les pièces de rotation exige donc à chaque instant, jusqu'à ce que la vitesse soit constante, une quantité d'action $\omega d\omega \int r'^2 dm$. Le facteur $\int r'^2 dm$ est le moment d'inertie de l'ensemble des cylindres et facile à calculer. On sait en effet que si le rayon d'un cylindre est r_1, l sa longueur et δ sa densité $\int r'^2 dm = \frac{1}{2}\pi r_1^4 l\delta$.

La résistance P agissant sur une corde, doit être augmentée de $\frac{d^\mu}{2r}(a+bP)$, en raison de la raideur; et comme son point d'application parcourt un arc $rd\theta$ dans le même temps que celui de Q décrit l'arc $Rd\theta$, elle consomme une quantité d'action $\left[P+\frac{d^\mu}{2r}(a+bP)\right]rd\theta$.

Reste à déterminer la quantité d'action qu'exige le frottement des tourillons. A cet effet, nous décomposerons Q, P en forces verticales $Q\cos\alpha$, $P\cos\beta$, et en forces horizontales $Q\sin\alpha$, $P\sin\beta$; puis, donnant le signe — à la dernière toujours opposée à la précédente, ordinairement fort petite et souvent nulle, nous trouverons, en désignant par p le poids de toute la machine, que les tourillons exercent sur leurs appuis une pression égale à $\sqrt{(Q\cos\alpha+P\cos\beta+p)^2+(Q\sin\alpha-P\sin\beta)^2}$. Comme le premier quarré est évidemment supérieur au second, la valeur du radical, à moins de $1/25$ près, est $0{,}96\,(Q\cos\alpha+P\cos\beta+p)+0{,}4\,(Q\sin\alpha-P\sin\beta)$. Multipliant par f', nous aurons l'effort qui fera équilibre au frottement, et cet effort multiplié par le chemin $\rho d\theta$ que parcourent dans un instant les génératrices de con-

tact des tourillons, nous donnera pour la quantité d'action consommée par le frottement,

$[0,96(Q\cos\alpha+P\cos\beta+p)+0,4(Q\sin\alpha-P\sin\beta)]f'\rho d\theta.$

Exprimant enfin que la quantité d'action produite par la puissance égale la somme de toutes celles qui sont dépensées dans le même temps, nous aurons la relation générale

$$QRd\theta=\frac{P}{g}vdv+\omega d\omega fr'^2dm+\left[P+\frac{d^\mu}{2r}(a+bP)\right]rd\theta$$
$$+[0,96(Q\cos\alpha+P\cos\beta+p)$$
$$+0,4(Q\sin\alpha-P\sin\beta)]f'\rho d\theta.$$

Si l'on observe que P, Q, p, α, β, sont invariables, on trouve par intégration,

$$QR\theta=\frac{P}{g}\frac{v^2}{2}+\frac{\omega^2}{2}fr'^2dm+\left[P+\frac{d^\mu}{2r}(a+bP)\right]r\theta$$
$$+[0,96(Q\cos\alpha+P\cos\beta+p)$$
$$+0,4(Q\sin\alpha-P\sin\beta)]f'\rho\theta+C.$$

Pour considérer un tour complet, il faut prendre l'intégrale depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=2\pi$. Soient, dans la première circonstance, $v=v'$, $\omega=\omega'$, et dans la seconde, $v=v''$, $\omega=\omega''$. Il viendra

$$2\pi RQ=\frac{P}{g}\frac{v''^2-v'^2}{2}+\frac{\omega''^2-\omega'^2}{2}fr'^2dm$$
$$+\left[P+\frac{d^\mu}{2r}(a+bP)\right]2\pi r$$
$$+[0,96(Q\cos\alpha+P\cos\beta+p)+0,4(Q\sin\alpha-P\sin\beta)]2\pi\rho f'.$$

Cette équation se simplifie beaucoup, lorsque l'on considère la machine à l'époque où le mouvement est devenu à peu près uniforme, car $v''=v'$, $\omega''=\omega'$, et par suite

$$RQ=\left[P+\frac{d^\mu}{2r}(a+bP)\right]r$$
$$+[0,96(Q\cos\alpha+P\cos\beta+p)+0,4(Q\sin\alpha-P\sin\beta)]\rho f',$$

d'où l'on tire

$$Q=\frac{P\left[r+\frac{d^{\mu}b}{2}+(0{,}96\cos\beta-0{,}4\sin\beta)\,\rho f'\right]+\frac{d^{\mu}a}{2}+0{,}96\,p\,\rho f'}{R-(0{,}96\cos\alpha+0{,}4\sin\alpha)\,\rho f'}.\quad(1)$$

Une autre simplification s'opère, quand la résistance est un poids suspendu à une corde verticale. Alors en effet $\beta=0$, $\cos\beta=1$, $\sin\beta=0$,

et $$Q=\frac{P\left[r+\frac{d^{\mu}b}{2}+0{,}96\,\rho f'\right]+\frac{d^{\mu}a}{2}+0{,}96\,p\rho f'}{R-(0{,}96\cos\alpha+0{,}4\sin\alpha)\,\rho f'}.\quad(2)$$

17. Si nous supposons que, dans ces circonstances, Q soit de nature à pouvoir être appliquée en un point quelconque de la roue, il faudra, pour déterminer la valeur de α qui rend cette puissance un minimum, faire d'abord $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ négatifs, afin de changer le signe du deuxième terme du dénominateur, puis chercher le maximum de la fonction $0{,}96\cos\alpha+0{,}4\sin\alpha=F$. Nous trouverons $\frac{dF}{d\alpha}=-0{,}96\sin\alpha+0{,}4\cos\alpha=0$ et $\operatorname{tang}\alpha=\frac{0{,}4}{0{,}96}=0{,}416$ dont le logarithme est $\bar{1}{,}6190933$ ou $9{,}6190933$, si l'on prend le rayon $(10)^{10}$ des tables. Il en résulte $\alpha=22^\circ\,33'$ à peu près, et cette valeur porte bien F au maximum, puisqu'une seconde différentiation donne $\frac{d^2F}{(d\alpha)^2}=-0{,}96\cos\alpha-0{,}4\sin\alpha$, quantité nécessairement négative.

Mais la supposition de $\cos\alpha$ et de $\sin\alpha$ négatifs veut que α surpasse 180°. Conséquemment le minimum de Q répond à $\alpha=180^\circ+22^\circ\,33'=202^\circ\,33'$. Retranchant de cette valeur l'angle droit compris entre la direction de Q et le rayon du contact, nous verrons que, pour déterminer le point d'application propre au minimum, on doit mener un rayon AB (P. I, F. 4) qui fasse avec la verticale AC du centre un angle de $202^\circ\,33'-90^\circ=112^\circ\,33'$.

On conçoit effectivement qu'une telle position de la puissance tangentielle rend la pression des tourillons et par suite leur frottement moindres que dans le cas où la puissance et la résistance se trouvent séparées par l'axe de rotation.

Il est d'ailleurs facile de voir, par le calcul de F, que la moindre valeur de la puissance est

$$Q = \frac{P\left(r + \frac{d^{\mu}b}{2} + 0{,}96\,\varrho f'\right) + \frac{d^{\mu}a}{2} + 0{,}96\,p\varrho f'}{R + 1{,}04\,\varrho f'}.$$

Mais, dans le treuil à échelons, les deux forces ne peuvent être du même côté de l'axe ; il faut que cet axe se trouve dans l'angle qu'elles forment entre elles ; la puissance tangentielle ne peut pas même être appliquée au point culminant C de la roue, puisqu'elle y serait horizontale. On ne saurait donc faire cos α et sin α négatifs ; par suite la valeur $\alpha = 22° 35'$ qui rend F un maximum, produit sur Q le même effet, attendu que le dénominateur de cette puissance se trouve alors aussi petit qu'il est possible.

Pour déterminer, dans ce cas, le point d'application relatif au maximum, on mènera un rayon AB' qui fasse avec la verticale AC du centre un angle de $90° - 22° 35' = 67° 25'$, supplément de l'angle $112° 35'$ du minimum. Ainsi, les contacts propres aux deux valeurs extrêmes de la puissance sont diamétralement opposés, et les directions des efforts qui doivent s'y exercer sont parallèles, mais contraires.

On a, du reste, pour le maximum de la puissance,

$$Q = \frac{P\left(r + \frac{d^{\mu}b}{2} + 0{,}96\,\varrho f'\right) + \frac{d^{\mu}a}{2} + 0{,}96\,p\varrho f'}{R - 1{,}04\,\varrho f'}.$$

La direction verticale de haut en bas donnerait donc

une valeur moindre. Faisant $\alpha = 0$, on trouve en effet que

$$Q = \frac{P\left(r + \frac{d^{\mu}b}{2} + 0{,}96\,\rho f'\right) + \frac{d^{\mu}a}{2} + 0{,}96\,p\rho f'}{R - 0{,}96\,\rho f'}.$$

Ainsi, l'homme moteur doit être placé sur les échelons de manière que la direction de son effort tangentiel soit verticale ; plus élevé, il aurait moins d'avantage, et en outre une partie de son poids ne servirait qu'à augmenter le frottement des tourillons.

18. La relation entre la résistance principale et l'effort utile du moteur est encore ici l'équation des moments

$$Q'R = Pr.$$

Mais R exprime le rayon de la surface cylindrique formée par les axes des échelons, et il varie (15) de $1^m,50$ à 3^m, ce qui fait varier r de $0^m,125$ à $0^m,25$.

L'effort utile exercé sur la roue est, d'après l'expérience, de 60^{kg}. Comme un homme pèse, terme moyen, 65^{kg}, il y a 5^{kg} consommés par les résistances accessoires.

Substituons l'effort et les rayons à la place de Q', R, r ; il viendra, par exemple, l'équation $60^{kg} \times 3^m = P \times 0^m,25$, et nous verrons qu'un homme peut, au moyen d'un treuil à échelons, élever un poids de 720^{kg} avec une vitesse de $0^m,15$ par seconde (tableau III), ou en communiquant à ce poids une vitesse de $0^m,15\,\frac{0,25}{3} = 0^m,0125$.

Si l'on voulait que la vitesse du fardeau fût plus grande, on serait obligé de déterminer r au moyen de l'équation $\frac{v}{0,15} = \frac{r}{R}$, autrement le travail du moteur ne serait plus au maximum.

TREUIL A CHEVILLES.

19. Assez souvent les échelons sur lesquels agit la puissance sont portés par un seul anneau, au lieu de l'être par deux. Le récepteur est alors appelé *roue à chevilles*. On le dispose ainsi dans les cas où l'effort doit éprouver de fortes variations : lorsque la résistance est faible, les hommes, placés sur le sol, agissent avec leurs bras seulement et communiquent à la roue une grande vitesse ; quand la résistance se trouve considérable, ils montent sur les chevilles, et ils exercent un effort égal à leur poids, comme sur la roue à échelons ; le moteur est ainsi à même d'établir une compensation qui rende à peu près constante la quantité d'action relative à l'unité de temps.

Dans plusieurs machines à presser, on emploie avec avantage une roue à chevilles pour récepteur ; mais toutes les fois qu'il s'agit d'un travail où l'effort doit être continu et constant, la roue à échelons est préférable.

TREUIL A TAMBOUR.

20. Le treuil à tambour ne diffère des précédents que par le récepteur : cet organe est un cylindre creux sur la surface concave duquel se trouvent des liteaux. Au moyen de ces liteaux, les hommes peuvent marcher dans l'intérieur du tambour et faire tourner le treuil par l'action de leur poids.

Le diamètre de la roue est ordinairement de 5 à 6 mètres. Il ne peut jamais être moindre que 4^{m}, car les hommes seraient exposés à se heurter la tête contre le cylindre modificateur. Le diamètre de ce cylindre est, comme dans le treuil à échelons, le douzième du diamètre de la roue.

La meilleure manière de placer les hommes dans le tambour étant de les mettre de front, sur une même génératrice, il faut que la longueur du cylindre creux soit proportionnée au nombre des hommes qu'on veut employer : chaque homme a besoin d'une longueur de 82 centimètres.

21. Le tableau III montre qu'un homme qui met en mouvement un tambour, peut lui imprimer une vitesse de $0^{m},7$ par seconde, exercer une pression tangentielle de 12 kilog., et soutenir ce travail pendant 8 heures chaque jour.

Or, puisque l'effort utile est connu, on pourra employer, comme dans les cas précédents, la relation $QR = Pr$ pour déterminer le poids qu'un homme peut élever au moyen du treuil à tambour.

Substituant donc pour R et r les longueurs 3^{m} et $0^{m},25$, nous trouverons que ce poids $P = 12^{kg}\frac{3}{0,25} = 144^{kg}$. L'équation $v = V\frac{r}{R}$ nous apprend en outre qu'il parcourra $0^{m},058$ environ par seconde, tandis que le moteur parcourra $0^{m},7$. Ainsi le treuil à tambour ne donne par seconde que $8^{k},352$, tandis que le treuil à échelons fournit 9^{k} ; la première de ces deux machines est donc moins avantageuse que la deuxième, et l'on ne doit l'employer que dans le cas où le moteur est un animal incapable d'agir sur la seconde. L'infériorité du tambour provient de ce que, par suite de la position obligée du moteur, le bras de levier de la puissance n'est guère que le tiers de R, et de ce que l'homme ne pourrait prendre une vitesse supérieure à $0^{m},7$ sans éprouver contre les liteaux des chocs qui l'empêchassent de soutenir long-temps le travail.

TREUIL A LEVIERS.

22. Le treuil à leviers, qu'on nomme parfois *virevau*, est plus fréquemment employé que les treuils à roue, bien qu'il ne soit pas aussi favorable au développement des forces de l'homme. La préférence qu'il obtient est fondée sur la facilité qu'y trouve le moteur de varier son travail selon les circonstances, sur une grande simplicité, sur l'économie de l'espace et sur la facilité du déplacement.

Le cylindre modificateur se termine de chaque côté par une embase prismatique qui est percée de mortaises à jour sur toutes ses faces. Ces mortaises sont destinées à recevoir les pinces des leviers sur lesquels les hommes agissent, soit par la force de leurs muscles, soit par le poids de leur corps. Il faut au moins deux hommes pour manœuvrer un virevau : l'un embarre, quand l'autre a cessé d'abattre et pendant qu'il fait effort pour empêcher le mouvement rétrograde du cylindre.

Les dimensions les plus ordinaires sont à peu près les suivantes : longueur du cylindre, $2^m,45$; rayon, $0^m,125$; rayon des tourillons, $0^m,04$; longueur des leviers, $1^m,58$; diamètre de la corde, $0^m,04$. L'axe du cylindre est élevé au-dessus du sol d'environ $1^m,05$.

23. Si l'on admet que l'homme, agissant avec ses bras seulement, exerce un effort toujours perpendiculaire au levier ou tangent à la circonférence décrite par le point d'application, le treuil à leviers pourra être assimilé au treuil à manivelle, et la relation des quantités d'action relatives à un instant s'établira comme dans le n.° 9. Mais ici (P. I, F. 5), les forces verticales sont $P\cos\beta$, $Q\sin\theta$, p, et les forces horizontales sont $Q\cos\theta_1 - P\sin\beta$. On aura donc à l'époque de l'uniformité du mouvement,

$$QRd\theta = rd\theta\left[P+\frac{d^{\mu}}{2r}(a+bP)\right]$$
$$+f'p\,d\theta\,[0,96(P\cos\beta+Q\sin\theta+p)+0,4(Q\cos\theta-P\sin\beta)].$$

Lorsque la résistance principale agira verticalement, cette équation deviendra

$$QRd\theta = rd\theta\left[P+\frac{d^{\mu}}{2r}(a+bP)\right]$$
$$+f'p\,d\theta\,[0,96(P+Q\sin\theta+p)+0,4Q\cos\theta].$$

Intégrant, on obtient

$$QR\theta = r\theta\left[P+\frac{d^{\mu}}{2r}(a+bP)\right]$$
$$+f'p\,\theta(0,96P+0,96p)-f'p\,(0,96Q\cos\theta-0,4Q\sin\theta).$$

L'arc que désigne θ est compris entre la verticale du centre C et la position AC la plus élevée du levier. Or cette position forme ordinairement un angle de 45° avec l'horizontale CB, et il en est de même pour l'autre position extrême A'C. Conséquemment, les limites de θ sont $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3}{4}\pi$.

Comme il y a égalité entre le sinus et le cosinus de $\frac{\pi}{4}$, $2\sin^2\frac{\pi}{4}=1$, et $\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{0,5}=0,7$. Le sinus et le cosinus de $\frac{3}{4}\pi$ sont les mêmes que ceux de $\frac{\pi}{4}$, mais le dernier est négatif. On a donc pour la première limite de θ,

$$QR\frac{\pi}{4} = r\frac{\pi}{4}\left[P+\frac{d^{\mu}}{2r}(a+bP)\right]$$
$$+f'p\frac{\pi}{4}(P+p)0,96-f'p\,(0,96Q\times0,7-0,4Q\times0,7)+C,$$

et pour la seconde,

$$QR\frac{3\pi}{4} = r\frac{3\pi}{4}\left[P+\frac{d^{\mu}}{2r}(a+bP)\right]$$
$$+f'p\frac{3\pi}{4}(P+p)0,96+f'p\,(0,96Q\times0,7+0,4Q\times0,7)+C.$$

La différence de ces deux états de l'intégrale établit entre les quantités d'action relatives à un abattage la relation

$$QR\,\frac{\pi}{2} = r\,\frac{\pi}{2}\left[P + \frac{d^{\mu}}{2r}(a+bP)\right]$$
$$+0{,}96 f'\rho\,\frac{\pi}{2}(P+p) + 2f'\rho \times 0{,}96\,Q \times 0{,}7,$$

ou
$$QR = r\left[P + \frac{d^{\mu}}{2r}(a+bP)\right]$$
$$+0{,}96 f'\rho\,(P+p) + 0{,}856\, f'\rho\, Q,$$

d'où l'on tire

$$Q = \frac{P\left(r + \frac{d^{\mu} b}{2} + 0{,}96 f'\rho\right) + \frac{d^{\mu} a}{2} + 0{,}96 f'\rho\, p}{R - 0{,}856 f'\rho}.$$

24. La véritable résistance principale P est le poids P′ du fardeau à élever, augmenté du poids p' de la corde déroulée, et diminué d'un poids p'' capable d'équilibrer p_1, celui du levier AC. Il faut donc calculer le second membre de l'équation $P = P' + p' - p''$.

Laissons P′ indéterminé, et prenons p' dans un cas moyen, c'est-à-dire dans celui où le fardeau se trouve parvenu au milieu de son ascension. Si cette ascension doit être de 6^{m}, il y aura 3^{m} de corde enroulée et 3^{m} qui augmenteront le poids P′. Or, d'après le tableau VII, une corde blanche dont le diamètre est $0^{m},02$, pèse par mètre $0^{kg},28$ à peu près. Le câble du treuil pèsera donc par mètre $\frac{0^{kg},28}{(0^{m},02)^2} \times (0^{m},04)^2 = 1^{kg},12$, et les 3^{m} déroulés donneront $1^{kg},12 \times 3 = 3^{kg},36 = p'$.

Le poids p_1, appliqué au centre de gravité du levier, se décompose : la partie $p_1 \cos\theta$ ne sert qu'à presser les tourillons contre leurs encastrements, et c'est seulement la partie $p_1 \sin\theta$ qui, agissant tangentiellement à la circonférence décrite par le centre de gravité du le-

vier, équilibre une portion p'' de P'. Soit r' le rayon de cette circonférence, $p_1 \sin\theta \times r' d\theta$ sera la quantité d'action produite par p_1 dans un instant; et comme celle que consomme p'' dans le même temps est $p'' r d\theta$, nous aurons

$$p'' r d\theta = p_1 r' \sin\theta d\theta.$$

L'intégration donne $p'' r \theta = - p_1 r' \cos\theta + C$.

Prenant cette intégrale depuis $\theta = \frac{\pi}{4}$ jusqu'à $\theta = \frac{3\pi}{4}$, on obtient successivement

$$p'' r \frac{\pi}{4} = - p_1 r' \times 0{,}7 + C,$$

$$p'' r \frac{3\pi}{4} = p_1 r' \times 0{,}7 + C,$$

$$p'' r \frac{\pi}{2} = 1{,}4 p_1 r',$$

$$p'' = \frac{1{,}4 p_1 r'}{r \frac{\pi}{2}}.$$

Un levier de manœuvre pèse un peu plus de 7^{kg}. Mais ce levier traverse tout à fait le cylindre modificateur, et la partie de la pince qui dépasse l'axe ne doit pas être comprise dans p_1. Posons donc $p_1 = 7^{kg}$.

Quant à r, il se compose du rayon du cylindre $0^m,125$ et du rayon de la corde $0^m,02$. Par conséquent,

$$r = 0^m,125 + 0^m,02 = 0^m,145.$$

Reste à trouver r'. Comme le levier est sensiblement conique, le centre de gravité de la partie p_1 est au quart de la longueur, à partir de l'axe du cylindre. Cette longueur égale celle du levier diminuée du rayon $0^m,125$.

Donc $r' = \frac{1^m,58 - 0^m,125}{4} = \frac{1^m,455}{4} = 0^m,36$ à peu près,

$$p'' = \frac{2{,}8 \times 7^{kg} \times 0^m,36}{0^m,145 \times 3{,}1416} = 15^{kg},49,$$

et $P = P' + 3^{kg},36 - 15^{kg},49 = P' - 12^{kg},13$.

Agissant comme dans l'application du treuil à manivelle (13), nous trouverons

$$\frac{d''b}{2} = 0^{m},0195 \quad \text{et} \quad \frac{d''a}{2} = 0^{k},445.$$

Supposons les tourillons et leurs encastrements en bois d'orme, nous verrons par le tableau V que $f = {}^{1}/_{10}$, et nous en déduirons $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$ ou $f' = {}^{1}/_{10}$ à fort peu près. D'ailleurs,

$$\rho = 0^{m},04, \text{ et } R = 1^{m},58 - 0^{m},125 = 1^{m},455.$$

Enfin, le poids p de la machine se compose de celui du cylindre, de $2p'$ celui de la corde entière et de celui du levier. Or le volume du cylindre, si nous admettons que les embases et les tourillons compensent le vide des mortaises, est $\pi(0^{m},125)^2 \times 2^{m},45 = 0^{mc},1232$, et comme le mètre cube d'orme pèse 671^{kg}, la première partie de p vaut $82^{kg},67$. La seconde étant $2p' = 3^{kg},36 \times 2 = 6^{kg},72$, et la troisième formant 7^{kg}, il vient $p = 82^{kg},67 + 6^{kg},72 + 7^{kg} = 96^{kg},39$, ou, en nombre rond, 96^{kg}.

Remplaçant maintenant toutes les quantités de l'expression de Q par leurs valeurs, on obtient pour l'effort à faire dans l'abattage,

$$Q = \frac{(P' - 12^{kg},13)(0^{m},145 + 0^{m},0195 + 0,96 \times 0,1 \times 0^{m},04) + 0^{k},445 + 0,96 \times 0,1 \times 0^{m},04 \times 96^{kg}}{1^{m},455 - 0,856 \times 0,1 \times 0^{m},04}$$

$$= \frac{(P' - 12^{kg},13) \times 0^{m},16834 + 0^{k},814}{1^{m},45}$$

$$= (P' - 12^{kg},13) \times 0,116 + 0^{kg},56$$

$$= 0,116\,P' - 1^{kg},41 + 0^{kg},56 = 0,116\,P' - 0^{kg},85.$$

Supposons que le fardeau $P' = 600^{kg}$, poids de la pièce de 8 à peu près. On trouvera que $Q = 68^{kg},75$.

Si l'on faisait abstraction de toutes les résistances ac-

cessoires, la relation entre la puissance et la résistance serait simplement

$$Q'R = Pr.$$

Elle donnerait

$$Q' = \frac{Pr}{R} = \frac{(P' - 12^{kg},13)\,0^{m},145}{1^{m},455} = 0,0996\,P' - 1^{kg},21.$$

Conséquemment, la machine augmente l'effort d'abattage de $Q - Q' = 0,0164\,P' + 0^{kg},56$, ou bien les 0,14 à peu près de l'effort d'abattage Q sont employés à détruire les résistances accessoires.

25. Il nous reste à comparer la quantité d'action dépensée par le moteur à celle qui est transmise au fardeau, ou le travail réel du moteur à celui dont le fardeau serait capable, s'il retombait de la hauteur à laquelle il a été élevé.

Considérons seulement ce qui a lieu dans un abattage. Le chemin que parcourt le point d'application de la puissance est le quart d'une circonférence dont le rayon $R = 1^{m},455$. Par conséquent, la quantité d'action dépensée ou le travail de cette puissance est

$$T = (0,116\,P' - 0^{kg},85)\,\frac{2 \times 3,1416 \times 1^{m},455}{4}$$
$$= (0,116\,P' - 0^{kg},85)\,2^{m},29 = 0^{m},2656\,P' - 1^{k},946.$$

Il n'y a pas lieu d'ajouter à T la quantité d'action dépensée par le moteur pour élever le levier de la position inférieure à la supérieure, car elle est restituée dans l'abattage par celle que produit la descente de la même pièce, et cette dernière quantité d'action a été retranchée de celle que consomme le fardeau, lorsque nous avons déterminé la résistance principale P.

La hauteur verticale que parcourt le fardeau P' pendant l'abattage équivaut au quart d'une circonférence dont le rayon $r = 0^{m},145$. Cette hauteur est donc $\frac{2 \times 3,1416 \times 0^{m},145}{4} = 0^{m},228$, et la quantité d'action transmise au fardeau ou le travail $t = 0^{m},228\,P'$.

Conséquemment, la machine occasionne une perte de quantité d'action

$$T-t=0^{m},2656\,P'-1^{k},946-0^{m},228\,P'$$
$$=0^{m},0376\,P'-1^{k},946,$$

ou à peu près les 0,16 de celle qu'exige le fardeau. Mais, en compensation, elle permet d'exécuter un travail que le poids du fardeau et la hauteur d'ascension pourraient rendre impossible à un moteur qui agirait sans intermédiaire sur la masse à élever.

On déterminerait aisément le fardeau P′ que pourraient élever les deux hommes nécessaires à la manœuvre du virevau, si l'on connaissait l'effort constant dont chacun d'eux est capable, appliqué à cette machine. Supposons qu'il soit de 18^{kg}, avec une vitesse de $0^{m},2$ par seconde, pendant 6^{h}, comme dans le cas de l'ascension d'un fardeau à l'aide d'une poulie fixe (tableau II). La valeur de Q précédemment trouvée donnera

$$18^{kg}=0,116\,P'-0^{kg},85,$$

d'où nous tirerons

$$P'=\frac{18^{kg}+0^{kg},85}{0,116}=\frac{18^{kg},85}{0,116}=162^{kg},5.$$

Ainsi, deux hommes, soumis à un travail journalier de six heures, peuvent, au moyen d'un virevau, élever un fardeau de $162^{kg},5$, en imprimant au petit bout du levier une vitesse de $0^{m},2$ par seconde, et au poids une vitesse de $\frac{0^{m},2}{1^{m},455}\times 0^{m},145=0^{m},02$ à peu près.

La perte de quantité d'action est donc, dans chaque abattage,

$$T-t=0^{m},0376\times 162^{kg},5-1^{kg},946=4^{kg},164.$$

Or, le petit bout du levier parcourt dans le même temps un quart de circonférence, qui vaut $2^{m},29$. La durée de l'abattage est, par conséquent, $\frac{2^{m},29}{0^{m},2}=11'',45$.

Supposons qu'il faille $4''$ pour débarrer et embarrer; les ascensions partielles dureront chacune $15'',45$ et, dans les six heures de travail, il y en aura $\frac{21600''}{15'',45}=1398$. La perte journalière de quantité d'action serait donc $4^k,164\times1398=5821^k,272$. Comme les deux hommes pourraient, d'après le tableau II, produire en six heures une quantité d'action de $77760^k\times2=155520^k$, on voit que la manœuvre du virevau consomme au moins les 0,037 ou à peu près $1/_{27}$ de la quantité d'action journalière du moteur.

TREUIL A BIELLE.

26. Le treuil à bielle ne diffère du treuil à manivelle qu'en ce que son moteur agit en ligne droite, au lieu d'agir circulairement. Une tringle AB (P. I, F. 6), nommée *bielle*, est liée par articulation, d'un bout à la poignée de la manivelle BC, de l'autre à un *curseur* AD engagé dans une coulisse, et c'est en imprimant à ce curseur un mouvement de va-et-vient soit vertical, soit horizontal, que le moteur fait tourner le treuil. Ainsi, dans cette machine, la manivelle n'est plus qu'un modificateur; la bielle est un communicateur, et c'est le curseur qui forme le récepteur.

Il est clair qu'au repos, la manivelle doit avoir la position CE. Le moteur ne pourrait donc mettre la machine en mouvement, si l'on ne venait à son secours, en écartant de la verticale CE l'articulation B. Il est visible aussi qu'il existe deux points morts (6), l'un E où la manivelle est dirigée verticalement de haut en bas, l'autre F où elle est encore verticale, mais dirigée de bas en haut. Pour ces deux positions, le moteur ne pourrait que presser les tourillons contre leurs encas-

trements, s'il continuait de faire descendre ou monter le curseur. La limite de la descente est donc indiquée par EG=AB, et la limite de l'ascension par FH=AB ou par GH=EF.

Ainsi, un treuil à bielle a besoin, pour fonctionner à peu près uniformément, d'un volant qui, animé d'une force-vive suffisante, fasse franchir à la manivelle les positions CE, CF, malgré la résistance, puisque le moteur cesse alors de la détruire et d'entretenir le mouvement.

27. Pour déterminer l'effort moyen Q à exercer sur le curseur, il faut chercher d'abord la traction moyenne T qu'opère la bielle sur le boulon B. A cet effet, nous désignerons par θ la longueur de l'arc compris, sur la circonférence de rayon 1, entre une position quelconque BC de la manivelle et la verticale CE; par α, β, les arcs de même rayon, indications des angles que forme la bielle avec la verticale AC et la manivelle BC; par R, la longueur de cette manivelle; par r, ρ, les rayons du cylindre et des tourillons; par P, p, la résistance principale et le poids du treuil; par l, la longueur AB de la bielle, et nous ferons abstraction du frottement peu important du boulon B, sauf à l'introduire plus tard dans la formule. Quant au poids de la bielle, on peut le négliger, car la quantité d'action que consomme son ascension est restituée pendant la descente.

La traction T se décompose en deux parties, l'une $T\sin\beta$ tangente à la circonférence que décrit B, l'autre dirigée selon BC. La première est la seule qui fasse un travail mécanique, et pour le temps dt, elle donne $T\sin\beta \times Rd\theta$, produit qui doit égaler la somme des quantités d'action consommées par toutes les résistances dans le même temps dt.

La résistance principale P parcourt un chemin $rd\theta$.

Ajoutant $\frac{d^{\mu}}{2r}(a+bP)$ pour la raideur de la corde, on trouve que $\left[P+\frac{d^{\mu}}{2r}(a+bP)\right]rd\theta=P'rd\theta$ est la quantité d'action dépensée par l'ascension de P, pendant dt.

Les forces verticales qui pressent les tourillons sont P, p et $-T\cos\alpha$, et il n'y a que $T\sin\alpha$ qui les presse horizontalement. La pression totale est donc

$$\sqrt{(P+p-T\cos\alpha)^2+(T\sin\alpha)^2}$$
$$=0,96(P+p-T\cos\alpha)+0,4\,T\sin\alpha\,;$$

et comme le point d'application du frottement parcourt le chemin $\rho\,d\theta$, il consomme une quantité d'action

$$f'\rho\,d\theta\,[0,96(P+p-T\cos\alpha)+0,4\,T\sin\alpha].$$

Donc $TR\sin\beta\,d\theta=P'r\,d\theta+f'\rho\,d\theta[0,96(P+p-T\cos\alpha)+0,4\,T\sin\alpha]$.

Mais, pour intégrer, il faut remplacer α et β par leurs valeurs en fonction de θ. Ces trois arcs sont liés par les relations $l\sin\alpha=R\sin\theta$, $\theta=\alpha+\beta$. La première donne $\sin\alpha=\frac{R}{l}\sin\theta$, et $\cos\alpha=\left(1-\frac{R^2}{l^2}\sin^2\theta\right)^{1/2}$

$$=1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{l^2}\sin^2\theta=1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{l^2}(1-\cos^2\theta)=1-\frac{R^2}{2l^2}+\frac{R^2}{2l^2}\cos^2\theta$$

approximativement. On tire de la seconde, $\beta=\theta-\alpha$, et par suite $\sin\beta=\sin\theta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\theta$

$$=\sin\theta\left(1-\frac{R^2}{2l^2}+\frac{R^2}{2l^2}\cos^2\theta\right)-\frac{R}{l}\sin\theta\cos\theta\,.$$

Le premier membre de l'équation différentielle devient donc

$$TR\left(\sin\theta d\theta-\frac{R^2}{2l^2}\sin\theta d\theta+\frac{R^2}{2l^2}\cos^2\theta\sin\theta d\theta-\frac{R}{l}\sin\theta\cos\theta d\theta\right),$$

et son intégrale est

$$TR\left(-\cos\theta+\frac{R^2}{2l^2}\cos\theta-\frac{R^2}{6l^2}\cos^3\theta-\frac{R}{2l}\sin^2\theta\right)+C.$$

Il faut prendre cette intégrale depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=\pi$, si l'on veut considérer seulement l'ascension.

La seconde limite donne

$$\sin\theta=0,\ \cos\theta=-1,\quad \text{et}\quad \mathrm{TR}\left(1-\frac{\mathrm{R}^2}{2l^2}+\frac{\mathrm{R}^2}{6l^2}\right)+\mathrm{C};$$

la seconde conduit à

$$\sin\theta=0,\ \cos\theta=1,\ \mathrm{TR}\left(-1+\frac{\mathrm{R}^2}{2l^2}-\frac{\mathrm{R}^2}{6l^2}\right)+\mathrm{C},$$

et par conséquent, pour une ascension,

$$\int \mathrm{TR}\sin\beta\, d\theta=\mathrm{TR}\left(2-\frac{\mathrm{R}^2}{l^2}+\frac{\mathrm{R}^2}{3l^2}\right)=\mathrm{TR}\left(2-\frac{2\mathrm{R}^2}{3l^2}\right).$$

Quant au second membre de l'équation différentielle, on a, en intégrant successivement les divers termes,

$$\int \mathrm{P}'r\,d\theta=\mathrm{P}'r\theta+\mathrm{C}=\mathrm{P}'r\pi;$$

$$\int f'\rho\,d\theta\,[0,96\,(\mathrm{P}+p)]=0,96\,f'\rho\pi\,(\mathrm{P}+p);$$

$$\int(-0,96\,f'\rho\mathrm{T}\cos\alpha\,d\theta)$$

$$=\int\left[-0,96\,f'\rho\mathrm{T}\left(d\theta-\frac{\mathrm{R}^2}{2l^2}d\theta+\frac{\mathrm{R}^2}{2l^2}\cos^2\theta\,d\theta\right)\right]$$

$$=-0,96\,f'\rho\pi\mathrm{T}+0,96\,\frac{\mathrm{R}^2}{2l^2}f'\rho\pi\mathrm{T}$$

$$-0,96\,\frac{\mathrm{R}^2}{2l^2}f'\rho\mathrm{T}\int\cos\theta\cos\theta d\theta.$$

$$\text{Or}\ \int\cos\theta\cos\theta\,d\theta=\int(1-\sin^2\theta)^{1/2}\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int\left(\cos\theta\,d\theta-\frac{1}{2}\sin^2\theta\,d\sin\theta\right)$$

$$=\sin\theta-\frac{1}{6}\sin^3\theta+\mathrm{C},$$

et cette quantité prise de 0 à π donne 0. Donc

$$\int(-0,96\,f'\rho\mathrm{T}\cos\alpha\,d\theta)=0,96\,f'\rho\pi\mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{R}^2}{2l^2}-1\right).$$

$$\text{Enfin}\ \int 0,4\,f'\rho\mathrm{T}\sin\alpha\,d\theta=\int 0,4\,f'\rho\mathrm{T}\frac{\mathrm{R}}{l}\sin\theta\,d\theta$$

$$=-0,4\,f'\rho\mathrm{T}\frac{\mathrm{R}}{l}\cos\theta+\mathrm{C}$$

$$=0,4\,f'\rho\mathrm{T}\frac{\mathrm{R}}{l}-\left(-0,4\,f'\rho\mathrm{T}\frac{\mathrm{R}}{l}\right)=0,8\,f'\rho\mathrm{T}\frac{\mathrm{R}}{l}.$$

L'intégration de l'équation des quantités d'action élémentaires donne donc

$$2\mathrm{TR}\left(1-\frac{\mathrm{R}^2}{3l^2}\right)=\mathrm{P}'r\pi+0,96f'\rho\pi(\mathrm{P}+p)$$
$$+0,96f'\rho\pi\mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{R}^2}{2l^2}-1\right)+0,8f'\rho\mathrm{T}\frac{\mathrm{R}}{l};$$

et par conséquent,

$$\mathrm{T}=\frac{\left[\mathrm{P}+\frac{d^{\mu}}{2r}(a+b\mathrm{P})\right]r\pi+0,96f'\rho\pi(\mathrm{P}+p)}{2\mathrm{R}-\frac{\mathrm{R}}{l}\left(\frac{2\mathrm{R}^2}{3l}+0,96f'\rho\pi\frac{\mathrm{R}}{2l}+0,8f'\rho\right)+0,96f'\rho\pi},$$

ou bien

$$\mathrm{T}=\frac{\mathrm{P}\pi\left(r+\frac{d^{\mu}b}{2}+0,96f'\rho\right)+0,96f'\rho\pi p+\frac{d^{\mu}a\pi}{2}}{2\mathrm{R}-\frac{\mathrm{R}}{l}\left(\frac{2\mathrm{R}^2}{3l}+0,96f'\rho\pi\frac{\mathrm{R}}{2l}+0,8f'\rho\right)+0,96f'\rho\pi}.$$

28. L'effort moyen T n'est pas tout à fait le même dans la descente que dans l'ascension; la traction se change alors en pression, et la composante verticale $\mathrm{T}\cos\alpha$ s'ajoute à $\mathrm{P}+p$, pour comprimer les tourillons. Mais il est visible que la valeur de T conviendra au cas de la pression, si l'on y change les signes des deux termes $0,96f'\rho\pi\frac{\mathrm{R}}{2l}$ et $0,96f'\rho\pi$ qui proviennent de $\mathrm{T}\cos\alpha$.

29. Voulons-nous maintenant tenir compte du frottement qui a lieu sur le boulon de l'articulation B? Il suffira d'ajouter au deuxième membre de l'équation des quantités d'action finies le terme $f'\mathrm{T}\rho'\pi$, ou au dénominateur de la valeur de T le terme $-f'\rho'\pi$; car pendant l'ascensiou, comme pendant la descente, le point d'application du frottement $f'\mathrm{T}$ parcourt évidemment sur le boulon B une demi-circonférence dont la longueur est $\rho'\pi$, si ρ' désigne le rayon de ce boulon.

30. Reste enfin à déterminer l'effort moyen Q que le

moteur doit exercer sur le curseur. Cet effort se compose de deux autres, l'un qui fait équilibre à $T\cos\alpha$, l'autre qui vainc le frottement produit dans la coulisse par la pression horizontale $T\sin\alpha$. Comme ce frottement a lieu en ligne droite, son rapport à la pression est f, et par conséquent

$$Q = T\cos\alpha + fT\sin\alpha = T\left(1 - \frac{R^2}{2l^2}\sin^2\theta + f\frac{R}{l}\sin\theta\right),$$

T représentant la traction ou la pression moyenne de la bielle.

Il s'ensuit que $Q = T$ quand $\theta = 0$ ou π, et que $Q = T\left(1 - \frac{R^2}{2l^2} + f\frac{R}{l}\right)$, quand $\theta = \frac{\pi}{2}$. Cette seconde valeur surpasse la première ou en est surpassée, selon qu'on a $\frac{R}{2l} < f$ ou $\frac{R}{2l} > f$; mais elles n'en sont pas moins évidemment deux limites. On peut donc prendre, sans grande erreur, leur demi-somme pour la valeur moyenne de Q, et il vient $Q = T\left(1 - \frac{R^2}{4l^2} + f\frac{R}{2l}\right)$.

Il faudrait, à la rigueur, ajouter à Q l'effort qu'exige le frottement du boulon de l'articulation A, mais ce frottement a visiblement moins d'importance encore que celui du boulon B.

CABESTAN.

31. Le virevau prend le nom de *cabestan* ou de *vindax*, quand le cylindre modificateur est vertical (P. I, F. 7), et que les leviers sont tous engagés dans le bout supérieur. Ce bout se nomme *tête;* en le coiffant d'une rondelle à mortaises, percées jusqu'à la surface du cylindre, on peut employer plus de quatre leviers et faire manœuvrer le cabestan par un grand nombre d'hommes. Ils agissent tous soit en poussant, soit en tirant.

Comme l'axe d'un cabestan n'a guère qu'un mètre, et qu'on emploie cette machine pour faire parcourir d'assez grandes distances à des fardeaux, la corde doit se dérouler à mesure qu'elle s'enroule, de façon qu'elle ne fasse pas plus de trois à quatre tours sur le cylindre. Au lieu donc de fixer l'un des bouts du câble au modificateur, on le fait tenir par un manœuvre, et dès que l'enroulement ne peut plus s'effectuer, on *choque*, c'est-à-dire qu'en frappant sur la corde avec un levier, on force la partie enroulée à reprendre la position qu'elle avait au commencement de la manœuvre, vers l'extrémité inférieure du modificateur; aussi cette pièce est-elle légèrement conique, afin que la descente du manchon de cordage soit plus facile.

Pour que le cabestan puisse être transporté, le pivot et le tourillon du modificateur tournent, le premier sur une crapaudine, le second dans un collier que porte un appareil de charpente nommé *chèvre*. Cet appareil présente deux semelles croisées à angle droit, desquelles s'élèvent des arcs-boutants. La crapaudine est placée à l'intersection des axes des semelles, et le collier est maintenu par l'extrémité supérieure de chacun des 4 arcs-boutants. Deux piquets plantés dans le sol, à l'opposite du fardeau, donnent à la chèvre une position fixe.

Les dimensions du cabestan sont fort variables; les plus importantes dépendent de la grandeur des masses à mouvoir; mais d'ordinaire, elles égalent à peu près les dimensions analogues du treuil à échelons. Ainsi, le point du levier auquel s'applique le moteur, se trouve à 3^{m} de l'axe du cylindre, terme moyen, et le rayon de ce cylindre, y compris celui de la corde, est de $0^{m},25$.

52. Le cabestan peut, comme le virevau, être assimilé au treuil à manivelle. Il nous suffira donc, pour établir la relation de la puissance et de la résistance

principale, de modifier d'après les conditions particulières à la machine qui nous occupe, la valeur de l'effort moyen qu'on doit exercer sur une manivelle. Nous avons trouvé (9) que, dans le cas d'un seul moteur, et d'une résistance principale dirigée verticalement, cet effort

$$Q = \frac{P\left(r + \frac{d^{\mu}b}{2} + \rho f'\right) + \frac{d^{\mu}a}{2} + \rho f' p}{R - 0{,}2546 f' \rho}.$$

Dans le cabestan, le poids p de la machine ne contribue en rien au frottement du tourillon, et par conséquent le terme $\rho f' p$ doit être supprimé. Mais le même poids p produit un frottement sur le palier de la crapaudine. Soient ρ' le moindre rayon du pivot et f'' le coefficient de son frottement. La pression p, uniformément répartie sur toute la superficie du petit cercle de contact, donnera une pression élémentaire dp sur un secteur d'un nombre de degrés infiniment petit, et l'on pourra considérer cette pression dp comme agissant au centre de gravité du secteur, c'est-à-dire à une distance $\frac{2}{3}\rho'$ de l'axe. Le point d'application du frottement élémentaire $f''\,dp$ parcourra donc un chemin $\frac{2}{3}\rho' \times 2\pi$ pendant un tour complet, et la quantité d'action consommée sera $f''dp \times \frac{2}{3}\rho' \times 2\pi$. Conséquemment, le frottement total consommera, dans un tour complet, une quantité d'action $\frac{2}{3}\rho' f'' p \times 2\pi$. Tel est le terme qu'il faudrait ajouter au second membre de l'équation des quantités d'action finies, qui donne $2\pi RQ$. Il s'ensuit qu'on doit ajouter $\frac{2}{3}\rho' f'' p$ au numérateur de la valeur de Q. On a ainsi

$$Q = \frac{P\left(r + \frac{d''b}{2} + \rho f'\right) + \frac{d''a}{2} + {}^2/_3\,\rho' f'' p}{R - 0{,}2546 f' \rho}.$$

33. Lorsque les manœuvres sont symétriquement placés autour de l'axe, au lieu d'être appliqués tous à l'extrémité d'un seul levier, le cabestan se rapporte au treuil à double manivelle,

et $$Q = \frac{P\left(r + \frac{d''b}{2} + \rho f'\right) + \frac{d''a}{2} + {}^2/_3\,\rho' f'' p}{R}.$$

34. Supposons enfin qu'on emploie deux leviers disposés selon un diamètre de la piste, que n manœuvres soient appliqués à l'un et $n+1$ manœuvres à l'autre, R étant le bras de levier moyen du premier groupe. Le manœuvre qui n'aura pas son symétrique, contribuera seul au frottement du tourillon; le terme $0{,}2546 f' \rho\, Q$ devra être remplacé par $0{,}2546 f' \rho \frac{Q}{2n+1}$, et par conséquent, on aura

$$Q = \frac{P\left(r + \frac{d''b}{2} + \rho f'\right) + \frac{d''a}{2} + {}^2/_3\,\rho' f'' p}{R + 0{,}2546 \frac{f'\rho}{2n+1}}.$$

35. Nous avons admis pour tout ce qui précède, que le câble fût constamment horizontal, et l'hypothèse est permise tant que le fardeau, mû sur un plan de niveau, se trouve assez éloigné du cylindre; mais quand il en est au contraire très-voisin, ou qu'il suit un plan incliné, la tension P du câble a une composante parallèle à l'axe, qui augmente notablement le frottement du pivot. On tiendra compte de l'augmentation, dans le cas d'un chemin horizontal, en remplaçant p par $p + P\frac{\cos\alpha + \cos\alpha'}{2}$, α et α' étant les angles formés avec

la verticale par une droite menée du milieu de l'axe au point d'attache du câble sur le fardeau placé d'abord dans sa position la plus éloignée, puis dans sa position la plus rapprochée. On considère ainsi une composante moyenne entre les extrêmes, vu l'impossibilité où l'on est, à cause du choquement (31), d'avoir égard à toutes les variations de l'angle.

Dans le cas d'un plan incliné (P. I, F. 8), il faudra remplacer p par $p + P \sin\beta$, β étant l'angle que forment ce plan et l'horizon.

Quant à la tension P, si le transport se fait sans rouleaux, elle égale fP' sur un terrain de niveau, P' étant le poids du fardeau et f le coefficient du frottement qui résulte d'une pression normale. Sur un plan incliné, $P = P' \sin\beta + fP' \cos\beta$, car dans le cas du mouvement ascensionnel, le frottement $fP' \cos\beta$ étant constamment détruit par la puissance motrice, n'atténue point la composante $P' \sin\beta$ parallèle au plan, comme dans la descente spontanée.

Voyons maintenant quelle est la valeur de P, lorsque le fardeau chemine horizontalement sur des rouleaux. Il y en a au moins deux d'engagés à la fois, l'un A vers le milieu de la longueur du corps (P. I, F. 9), l'autre B près de l'extrémité antérieure. Si le rouleau A pivotait seulement sur son axe, de manière que le point C, en contact avec le sol, fût remplacé par D, le diamètre DE prendrait la position verticale CH; E se trouverait en contact avec le fardeau en un point G tel que GH égalerait l'arc HE ou CD, et G, ainsi que tout autre point du corps, aurait parcouru un chemin GH.

Si, au lieu de tourner, le rouleau A glissait sur le sol, il emporterait avec lui le fardeau, sans cesser de le toucher en H, et quand l'axe aurait parcouru un chemin AA' = CD', le point H se trouverait en H'. Chaque

point du corps aurait donc parcouru aussi un chemin égal à CD'.

Or le roulement produit le même effet que la rotation et le glissement simultanés, quant au cheminement du fardeau : lorsque, par suite du roulement, tous les points de l'arc CD se seront appliqués sur le sol, D se trouvera en D', si CD'=CD ; A sera en A', et le rouleau aura tourné sur son axe de la quantité CD ou EH, puisque DE aura la position verticale D'H'. Le fardeau aura donc avancé de EH ou de GH, en vertu de la rotation du rouleau, et dans le même temps, il aura parcouru un chemin CD' ou HH' égal à EH, en vertu de la translation de l'axe A. Par conséquent, le trajet total GH' du fardeau est double de AA', celui du rouleau.

D'ailleurs il est clair que les frottements F,F' des rouleaux sur le sol et sur le corps sont les résistances qui produisent la tension P ; ces résistances s'exerçant tangentiellement aux rouleaux pour les empêcher de tourner, font le même effet qu'une seule résistance tangentielle aussi, égale à leur somme et dirigée de H' vers H, par exemple. Conséquemment, la résistance est $F+F'$, et la quantité d'action qu'elle consommera sera $(F+F')C$, si C représente le chemin parcouru par un rouleau. Mais le fardeau, ou le point d'application de la tension, parcourra 2C dans le même temps, et la quantité d'action que produira cette tension sera $P\times 2C$. Nous aurons donc $2PC=(F+F')C$ et $P=\frac{F+F'}{2}$.

Ainsi l'effort qu'exige le transport sur rouleaux, en terrain horizontal, est la demi-somme des deux frottements des rouleaux.

Sur un plan incliné, la tension P sera produite évidemment par la demi-somme des deux frottements que feront naître les composantes normales des poids du

fardeau et des deux rouleaux, et par la somme des composantes parallèles au plan.

36. Nous supposerons, pour faire une application de la théorie du cabestan, qu'il s'agisse de monter un bloc de pierre sur des rouleaux d'orme, le long d'un chemin ferme et uni, incliné à 30°, et que les manœuvres soient symétriquement répartis sur les leviers. C'est en conséquence l'équation

$$Q=\frac{P\left(r+\frac{d''b}{2}+\rho f'\right)+\frac{d''a}{2}-{}^2/_3\rho' f'' p}{R}$$ qu'il faudra employer.

Désignons par P', p' les poids du bloc et de chacun des deux rouleaux. Leurs composantes parallèles au plan incliné donneront en somme $(P'+2p')\sin 30^\circ = 0,5(P'+2p')$; la pression normale aux rouleaux sera $P'\cos 30^\circ = 0,866\,P'$, et la pression normale au sol, $(P'+2p')\cos 30^\circ = 0,866\,(P'+2p')$.

On sait que le coefficient du frottement de roulement, pour une roue en fonte, sur un terrain ferme et uni, est 0,0185. Comme un rouleau s'enfonce moins qu'une roue, nous pouvons prendre seulement 0,01, et parce que le frottement est inversement proportionnel au rayon du corps roulant, nous aurons pour le frottement des rouleaux sur le sol, si leur rayon est $0^m,1$,

$$F=\frac{0,866(P'+2p')0,01}{0,1}=0,0866\,(P'+2p').$$

Le roulement des rouleaux sur le bloc est analogue à celui qui aurait lieu sur un pavé uni. Le coefficient à employer est conséquemment 0,0074, et le frottement

$$F'=\frac{0,866\,P'\times 0,0074}{0,1}=0,0641\,P'.$$

Donc $P = \frac{F+F'}{2} + 0,5(P'+2p')$

$$= \frac{0,0866(P'+2p')+0,0641P'}{2} + 0,5(P'+2p')$$

$$= 0,57535\,P' + 1,0866\,p'.$$

Nous savons d'ailleurs (31) que $r = 0^m,25$ et $R = 3^m$; nous avons trouvé, dans l'application du treuil à manivelle (13), pour une corde neuve d'un diamètre de $0^m,04$, $\frac{d^\mu b}{2} = 0^m,0195$, $\frac{d^\mu a}{2} = 0^k,445$; on peut prendre $\rho = 0^m,12$, $\rho' = 0^m,01$; si le tourillon est en chêne et le collier en fer, $f' = 0,08$; comme le pivot est en fer et la crapaudine en bronze, $f'' = 0,1$; enfin il faut remplacer p par $p + P \sin 30° = p + (0,57535\,P' + 1,0866p')\,0,5 = p + 0,287675\,P' + 0,5433p'$.

Il en résulte

$$Q = \frac{\begin{array}{c}(0,57535\,P' + 1,0866\,p')\,(0^m,25 + 0^m,0195 + 0^m,12 \times 0,08) \\ + 0^k 445 + {}^2/_3 \times 0^m,01 \times 0,1\,(p + 0,287675P' + 0,5433p')\end{array}}{3^m}$$

$$= \frac{\begin{array}{c}(0,57535P' + 1,0866p')\,0^m,2791 + 0^k,445 \\ + 0^m,0007\,(p + 0,287675P' + 0,5433p')\end{array}}{3^m}$$

$$= 0,0536\,P' + 0,1012p' + 0,0002p + 0^{kg},148.$$

En négligeant les résistances accessoires, on aurait $Q'R = Pr$ et $Q' = \frac{Pr}{R} = \frac{(0,57535P' + 1,0866p')\,0^m,25}{3^m}$

$$= 0,0479\,P' + 0,09p'.$$

Ainsi, la machine consomme une force

$$Q - Q' = 0,0057\,P' + 0,0112p' + 0,0002p + 0^{kg},148.$$

37. Le tableau III indique qu'un manœuvre poussant ou tirant dans une direction droite et horizontale peut exercer un effort de 12^{kg}, en parcourant $0^m,6$ par seconde pendant huit heures. Si nous réduisons la vitesse à $0^m,5$, pour avoir égard au changement continuel de direction qu'exige un chemin circulaire, nous verrons

qu'un homme peut imprimer au câble d'un cabestan, pendant toute une journée de huit heures, une vitesse de $\frac{0^m,5}{3} \times 0,25 = 0^m,042$ à peu près, et en même temps exercer sur le levier un effort de 12^{kg}. Quant à la tension qui en résulterait pour le câble, on la trouverait, dans le cas où les manœuvres seraient placés symétriquement, par l'équation

$$12^{kg} = \frac{P\left(r + \frac{d''b}{2} + \rho f'\right) + \frac{d''a}{2} + {}^2/_3\rho' f'' p}{R}$$

dans laquelle P serait la seule inconnue.

Il serait facile ensuite, au moyen de la relation qui existe entre la tension P et le poids P′ du fardeau, de trouver le poids qu'un homme pourrait mouvoir, et par suite le nombre d'hommes qu'exigerait un fardeau déterminé. On aurait, par exemple, dans le cas du transport sans rouleaux, sur un terrain horizontal, $P = fP'$ et $P' = \frac{P}{f}$, pour le fardeau d'un seul homme.

Dans le cas d'un transport horizontal sur rouleaux, le câble étant considéré comme parallèle au terrain, il faudrait employer l'équation $P = \frac{(P'+2p')0,01+0,0074P'}{0,1}$, si le fardeau et les rouleaux étaient tels que nous les avons supposés dans l'application, et l'on en tirerait $P' = \frac{0,1P - 0,02p'}{0,0174}$.

Pour le cas d'un plan incliné, sans rouleaux, on poserait $P = fP'\cos\beta + P'\sin\beta$, d'où résulterait $P' = \frac{P}{f\cos\beta + \sin\beta}$.

Enfin, s'il s'agissait d'un transport pareil à celui de l'application précédente, on trouverait

$$P = 0,57535\,P' + 1,0866p' \text{ et } P' = \frac{P - 1,0866p'}{0,57535}.$$

POULIE FIXE.

38. La poulie est une roue qui a sa surface cylindrique creusée en gorge pour recevoir une corde. Le profil de cette gorge présente un angle aigu ou une double équerre; mais c'est toujours la seconde forme qu'on adopte pour les machines soignées, parce que la première gêne le dégagement de la corde. La roue est percée à son centre d'un trou nommé œil, qui se trouve garni d'une boîte en bronze. Cette boîte reçoit un essieu en fer fixé par les deux bouts aux joues de la chape, pièce de fer fourchue que termine un crochet. La poulie est dite *fixe*, quand le crochet est attaché à un point résistant (P. I, F. 10 et 11); l'essieu se trouve alors au-dessous du crochet; c'est la partie supérieure de la roue qui passe entre les joues de la chape; le fardeau est suspendu à l'un des bouts de la corde, et le moteur tirant l'autre bout élève ce fardeau, en faisant tourner la poulie sur l'essieu.

On voit que la poulie fixe serait un simple modificateur du mouvement, si la corde, par suite de la résistance qu'elle oppose à son ploiement, ne maintenait pas l'axe du cordon de la résistance à une distance du centre de rotation, plus grande que celle de l'axe du cordon de la puissance. Mais, en raison de la différence de ces deux distances, la poulie fixe modifie aussi l'effort: elle rend celui du moteur plus grand que celui de la résistance principale. Cette machine est néanmoins regardée comme avantageuse, parce qu'elle permet d'agir sur le fardeau en tirant de haut en bas, ce qui est plus facile que de tirer de bas en haut, et qu'elle diminue encore la fatigue du moteur, en le mettant à même de s'aider du poids de la partie supérieure du corps.

Les dimensions d'une poulie fixe sont assez arbitraires : le rayon du cylindre de la gorge et celui de l'essieu ou de l'œil n'ont à la rigueur aucune condition à remplir. Remarquons cependant que le ploiement de la corde se fait moins difficilement sur une grande roue, ou que la valeur de la raideur est moins grande, et qu'il faut d'autant moins d'effort pour équilibrer le frottement, qu'il existe un plus grand rapport entre le rayon de la roue et celui de l'œil. A la vérité, une grande poulie a plus de poids qu'une petite, et conséquemment, toutes choses égales d'ailleurs, le frottement de l'œil sur l'essieu y est plus intense ; mais, on le sent bien, les variations d'un poids aussi peu considérable que celui d'une poulie, en produisent de très-faibles dans les résistances accessoires qu'elles affectent. Il y a donc avantage à augmenter le bras de levier de la puissance, quoiqu'il en résulte un accroissement dans le frottement de l'œil.

39. La poulie fixe revient évidemment au treuil à échelons chargé d'un poids. La relation de la puissance Q et du fardeau P est donc pour la première machine, ainsi que pour la seconde (16),

$$Q = \frac{P\left(r + \frac{d^{\mu}b}{2} + 0{,}96 f'\rho\right) + \frac{d^{\mu}a}{2} + 0{,}96\, p f'\rho}{R - (0{,}96 \cos\alpha + 0{,}4 \sin\alpha) f'\rho}.$$

Mais ici R vaut, comme r, la distance R' du fond de la gorge au centre de la poulie, plus le rayon de la corde.

Puisque la rotation de la roue se fait autour du centre de l'œil, c'est le rayon de ce cylindre creux que représente ρ, bras de levier du frottement.

Enfin p est seulement le poids de la roue, car celui de la chape jointe à l'essieu se trouve détruit par le point fixe auquel la machine est accrochée.

Ainsi, dans la poulie fixe, quand le moteur n'a pas une direction verticale, comme la résistance principale, son effort

$$Q=\frac{P\left(R+\frac{d''b}{2}+0{,}96f'\rho\right)+\frac{d''a}{2}+0{,}96pf'\rho}{R-(0{,}96\cos\alpha+0{,}4\sin\alpha)f'\rho}.$$

Si, au contraire, la puissauce agit parallèlement à la résistance, $\alpha=0$, $\cos\alpha=1$, $\sin\alpha=0$, et

$$Q=\frac{P\left(R+\frac{d''b}{2}+0{,}96f'\rho\right)+\frac{d''a}{2}+0{,}96pf'\rho}{R-0{,}96f'\rho}.$$

40. Nous appliquerons ces formules à la poulie fixe de la chèvre d'artillerie. Elle donne $R'=0^m{,}09$, $d=0^m{,}04$, $\rho=0^m{,}018$; on peut prendre $f'=0{,}19$, coefficient relatif à un essieu en fer qui frotte sur une boîte en bronze dépourvue d'enduit; $\alpha=20^\circ$, angle que fait à peu près le cordon qui va de la poulie fixe au treuil de la chèvre, avec une parallèle à l'autre partie du câble supposée verticale; $P=660^{kg}$, poids à peu près égal à la tension du cordon qui descend de la poulie fixe, quand la chèvre, équipée à 4 brins, élève une pièce de 16 dont le poids est de 2000^{kg}; le poids de la roue en bronze $p=10^{kg}$; nous avons trouvé, dans l'application du treuil à manivelle (13); pour une corde neuve de même diamètre, $\frac{d''b}{2}=0^m{,}0195$ et $\frac{d''a}{2}=0^k{,}445$; enfin $\cos 20^\circ=0{,}94$ et $\sin 20^\circ=0{,}34$.

Il résulte de ces données

$$Q=\frac{660^{kg}(0^m{,}11+0^m{,}0195+0{,}96\times0^m{,}018\times0{,}19)+0^k{,}445+0{,}96\times10^{kg}\times0^m{,}018\times0{,}19}{0^m{,}11-(0{,}96\times0{,}94+0{,}4\times0{,}34)0^m{,}018\times0{,}19}=827^{kg}{,}76.$$

Lorsque la puissance agira verticalement, sur la même résistance et à l'aide de la même poulie, on aura

$$Q_1=\frac{88^{kg}{,}115}{0^m{,}11-0{,}96\times0{,}19\times0^m{,}018}=823^{kg}{,}5.$$

Conséquemment, l'inclinaison à 20° de la direction de Q n'augmente Q_1 que de $4^{kg},26$, ce qui forme seulement un peu plus des 0,005.

Si l'on fait abstraction des résistances accessoires, on a simplement, pour le cas où $\alpha = 0$,

$$Q' = \frac{660^{kg} \times 0^m,11}{0^m,11} = 660^{kg}.$$

La machine consomme donc un effort $Q_1 - Q' = 163^{kg},5$, ou bien elle augmente l'effort Q' d'un peu moins du quart. Comme la puissance et la résistance principale parcourent le même chemin dans le même temps, la quantité d'action dépensée et celle qui est transmise au fardeau sont aussi dans le même rapport $^5/_4$.

POULIE MOBILE.

41. La poulie est dite *mobile*, lorsque la résistance principale se trouve appliquée au crochet. Dans ce cas, l'essieu est au-dessus de ce crochet; c'est la partie inférieure de la roue qui passe entre les joues de la chape; un des bouts de la corde engagée dans la gorge est attaché à un point fixe; le moteur tirant l'autre bout fait cheminer la résistance et toute la poulie, en imprimant à la roue un mouvement de rotation autour de l'essieu.

La poulie mobile est employée pour élever des fardeaux et pour produire des tractions selon une direction inclinée; mais la discussion relative au premier emploi n'exige qu'une modification très-simple pour s'appliquer au second.

Le mouvement ne peut être autant modifié par la poulie mobile que par la poulie fixe : bien loin de lui donner une direction inverse, la première machine ne saurait même rendre celui du moteur perpendiculaire à

celui de la résistance. Aussi, sert-elle plutôt à modifier l'effort, qu'elle atténue considérablement. Il est très-rare toutefois que, dans l'élévation des fardeaux, le moteur soit appliqué immédiatement au cordon qui laisse le point fixe et la poulie du même côté; car tirant alors de bas en haut, il éprouverait, par suite de la direction de son mouvement, une fatigue qui peut-être compenserait la diminution de son effort.

42. Comme la puissance Q doit renfermer une partie capable d'équilibrer la raideur du cordon attaché au point fixe A et le frottement de l'œil sur l'essieu, elle surpasse la tension T (P. I, F. 12). La résultante des deux forces ne divise donc pas en deux parties égales l'angle de leurs directions tangentielles, et conséquemment elle ne passe point par le centre de l'œil. Or, la direction de la résistance P doit être directement opposée à celle de la résultante de Q et de T, puisque la première de ces forces est équilibrée pendant tout le mouvement par une partie de la seconde. Donc, la droite qui joint le milieu de l'axe de l'essieu au point d'application de P, ne passe pas non plus par le centre de l'œil : en d'autres termes, le contact de l'œil et de l'essieu n'est point sur la direction de P.

Supposons que P soit le poids d'un fardeau, et désignons par p celui de la roue, par p' celui de la chape jointe à la corde que porte le crochet, par α et β les angles que forment respectivement les directions de Q, T avec celle de P. Le poids à élever sera $P+p+p'$, et la pression de l'essieu sur l'œil vaudra $P+p'$, si nous négligeons le très-petit angle compris entre la direction de P et le rayon du contact.

Ce sont les composantes $Q\cos\alpha$ et $T\cos\beta$ qui élèvent le fardeau, en lui faisant parcourir un chemin tout à fait égal à celui qu'elles parcourent elles-mêmes simultané-

ment. L'égalité des quantités d'action revient donc ici à l'égalité des efforts, et l'on a

$$Q\cos\alpha + T\cos\beta = P + p + p'.$$

Quant aux autres composantes, elles doivent se détruire pour que P ne change point de direction, et de là résulte la relation

$$Q\sin\alpha = T\sin\beta\ ,$$

qui rend l'angle β dépendant de α.

Reste, pour déterminer Q, à remplacer T par sa valeur en fonction de la puissance, dans l'expression du fardeau total. Or, évidemment,

$$Q = T + \frac{d^{\mu}}{2R}(a + bT) + f'(P + p')\frac{\rho}{R},$$

le second terme exprimant la raideur, et le troisième le frottement de l'œil rapporté au bras de levier R du moteur. Il en résulte

$$T = \frac{QR - \frac{d^{\mu}a}{2} - f'\rho(P + p')}{R + \frac{d^{\mu}b}{2}},$$

$$Q\cos\alpha + \frac{QR - \frac{d^{\mu}a}{2} - f'\rho(P + p')}{R + \frac{d^{\mu}b}{2}}\cos\beta = P + p + p',$$

$$QR\cos\alpha + Q\frac{d^{\mu}b}{2}\cos\alpha + QR\cos\beta - \frac{d^{\mu}a}{2}\cos\beta$$
$$- f'\rho(P + p')\cos\beta = (P + p + p')\left(R + \frac{d^{\mu}b}{2}\right)$$

$$\text{et } Q = \frac{(P+p')\left(R+\frac{d^{\mu}b}{2}+f'\rho\cos\beta\right)+p\left(R+\frac{d^{\mu}b}{2}\right)+\frac{d^{\mu}a}{2}\cos\beta}{R(\cos\alpha+\cos\beta)+\frac{d^{\mu}b}{2}\cos\alpha}.$$

On pourrait faire disparaître β de cette équation, en y substituant, pour $\cos\beta$, sa valeur tirée de la relation $Q\sin\alpha = T\sin\beta$, qui donne $\sin\beta = \frac{Q}{T}\sin\alpha$, puis $\cos\beta = \left(1-\frac{Q^2}{T^2}\sin^2\alpha\right)^{1/2} = 1-\frac{Q^2\sin^2\alpha}{2T^2}$ approximativement. Mais il en résulterait une équation du second degré très-longue à résoudre, et une valeur de Q fort compliquée. Il vaut donc mieux supposer $\beta=\alpha$, bien qu'il soit un peu plus grand : comme la différence est faible, et que $\cos\beta$ entre à la fois dans le dénominateur et dans le numérateur de Q, l'erreur ne sera pas considérable. On obtient ainsi

$$Q = \frac{(P+p')\left(R+\frac{d^{\mu}b}{2}+f'\rho\cos\alpha\right)+p\left(R+\frac{d^{\mu}b}{2}\right)+\frac{d^{\mu}a}{2}\cos\alpha}{\left(2R+\frac{d^{\mu}b}{2}\right)\cos\alpha}.$$

Lorsque les deux cordons sont parallèles à la direction de la résistance principale, $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = 1$, et l'une ou l'autre valeur de Q devient

$$Q = \frac{(P+p')\left(R+\frac{d^{\mu}b}{2}+f'\rho\right)+p\left(R+\frac{d^{\mu}b}{2}\right)+\frac{d^{\mu}a}{2}}{2R+\frac{d^{\mu}b}{2}}.$$

Enfin, si la poulie mobile était employée à produire une traction selon une direction inclinée, les mêmes formules serviraient, moyennant qu'on y remplaçât P par la tension de la corde attachée au crochet, p' et p par celles de leurs composantes qui agiraient dans la direction donnée.

43. Il est bon de comparer l'emploi de la poulie mobile à celui de la poulie fixe, sous le rapport des efforts nécessaires. A cet effet, nous ferons une application de la première machine, en nous servant des données prises précédemment pour la seconde (40), et nous supposerons les trois cordons verticaux. Nous aurons ainsi $P+p'=660^{kg}$, $R=0^m,11$, $f'=0,19$, $\rho=0^m,018$, $p=10^{kg}$, $\frac{d^{\mu}a}{2}=0^k,445$, $\frac{d^{\mu}b}{2}=0^m,0195$, et

$$Q=\frac{660^{kg}(0^m,11+0^m,0195+0,19\times 0^m,018)+10^{kg}(0^m,11+0^m,0195)+0^k,445}{2\times 0^m,11+0^m,0195}=373^{kg},56.$$

La poulie mobile considérée exige donc un effort d'environ les 0,566 du fardeau à élever, tandis que la même poulie rendue fixe demande $823^{kg},5$ pour en élever aussi 660, ce qui fait à peu près les 1,248 du fardeau. Conséquemment, le premier effort n'est que les 0,454 du second.

44. Rien de plus facile que de déterminer la traction à laquelle doit résister le point fixe : au lieu de recourir à la valeur générale de T précédemment établie, on la tire de l'équation $Q+T=P+p+p'$ relative au cas des cordons parallèles. Alors il vient $T=(P+p')+p-Q$.

Substituant les données ci-dessus, nous trouverons $T=660^{kg}+10^{kg}-373^{kg},56=296^{kg},44$.

Ainsi la tension du cordon attaché au point fixe peut être estimée aux 0,79 de celle du cordon de la puissance.

S'il n'y avait pas de résistances accessoires, on aurait $T'=Q'$ et $2Q'=(P+p')+p$ ou $Q'=\frac{(P+p')+p}{2}$. Par conséquent Q' et T' seraient chacun de $\frac{670^{kg}}{2}$ ou de 335^{kg}, ce qui montre que la raideur et le frottement augmentent l'effort moteur précisément de $38^{kg},56$ qu'ils ôtent à la traction sur le point fixe. Il faut en conclure aussi que les mêmes causes accroissent la puissance d'environ les 0,115 de ce qu'elle serait sans leur existence.

45. Voyons enfin le cas où, pour changer la direction pénible du moteur de la poulie mobile, on joint une poulie fixe à cette machine. Il faudra combiner alors l'équation relative à la poulie mobile (42),

$$Q=\frac{(P+p')\left(R+\frac{d^{\mu}b}{2}+f'\rho\cos\beta\right)+p\left(R+\frac{d^{\mu}b}{2}\right)+\frac{d^{\mu}a}{2}\cos\beta}{R(\cos\alpha+\cos\beta)+\frac{d^{\mu}b}{2}\cos\alpha},$$

qui donne la tension du cordon AB tangent aux deux roues (P. I, F. 13), avec l'équation

$$Q_1=\frac{P_1\left(R+\frac{d^{\mu}b}{2}+0,96f'\rho\right)+\frac{d^{\mu}a}{2}+0,96pf'\rho}{R-(0,96\cos\alpha+0,4\sin\alpha)f'\rho},$$

relative à la poulie fixe, pour le cas où la traction P_1 s'exerce verticalement (39). La combinaison consiste à remplacer la résistance principale P_1 par la valeur de Q.

Si les trois cordons étaient parallèles, il faudrait combiner l'équation

$$Q=\frac{(P+p')\left(R+\frac{d^{\mu}b}{2}+f'\rho\right)+p\left(R+\frac{d^{\mu}b}{2}\right)+\frac{d^{\mu}a}{2}}{2R+\frac{d^{\mu}b}{2}},$$

relative à la poulie mobile, avec l'équation

$$Q_1 = \frac{P_1\left(R+\frac{d^{\mu}b}{2}+0{,}96f'\rho\right)+\frac{d^{\mu}a}{2}+0{,}96pf'\rho}{R-0{,}96f'\rho}$$

que donne la poulie fixe.

46. Ce n'est guère que dans la suspension de certains corps, dans celle des réverbères par exemple, qu'on rencontre la combinaison d'une poulie fixe et d'une poulie mobile à cordons non parallèles. Supposons donc que le parallélisme existe. Nous aurons $Q=373^{kg},56$, si le poids $P+p'=660^{kg}$, comme dans l'application relative à la poulie mobile (43).

Substituant dans la valeur de Q_1, nous trouverons

$$Q_1 = \frac{373^{kg},56\,(0^{m},11+0^{m},0195+0{,}96\times 0{,}19\times 0^{m},018)+0^{k},445+0{,}96\times 10^{kg}\times 0{,}19\times 0^{m},018}{0^{m},11-0{,}96\times 0{,}19\times 0^{m},018}$$

$=468^{kg},037$.

Ainsi, l'effort nécessaire pour élever un fardeau de 660^{kg}, avec le système d'une poulie mobile et d'une poulie fixe, est seulement les 0,568 de celui qu'exige la poulie fixe isolée, pour le même poids. On est donc en droit de conclure qu'il y a grande économie de force à combiner les deux espèces de poulie, au lieu d'employer seule celle qui est fixe.

MOUFLES.

47. Les moufles sont des combinaisons de poulies. Il y en a de deux sortes : dans l'une, les poulies ont toutes la même chape et le même essieu ; dans l'autre, les poulies ont bien encore la même chape, mais elles sont montées sur des essieux différents, disposés comme les échelons d'une échelle. Le premier appareil a peu de hauteur, et permet de donner le même diamètre à

toutes les poulies; le second prend beaucoup plus d'espace, et il exige que les diamètres soient différents. Deux moufles sont employés à la fois, et tous deux appartiennent à la même espèce. L'un, attaché à un point inébranlable, se nomme pour cela *moufle fixe ;* l'autre, qui peut se mouvoir, s'appelle *moufle mobile.* C'est à la chape de ce dernier qu'est suspendu le fardeau. Le système de deux moufles de la première espèce forme le *palan* de la marine; le système de deux moufles de la deuxième espèce donne la *mouflette* des architectes.

La corde sur laquelle agit le moteur embrasse d'abord une des poulies fixes, puis une poulie mobile, puis la poulie fixe suivante, et va toujours ainsi d'un moufle à l'autre, jusqu'à ce que toutes les poulies soient embrassées.

Les deux moufles combinés peuvent contenir le même nombre de poulies, et alors la corde s'attache à la chape du moufle fixe par le bout que ne tient pas le moteur. Mais il peut y avoir dans le moufle mobile une poulie de moins que dans l'autre, et alors la corde s'attache à la chape du premier ou au fardeau. Il résulte de là, qu'à part le cordon de la puissance, il y a toujours autant de cordons ou *brins* qui vont d'un moufle à l'autre, que de poulies dans le système des deux moufles.

48. Les cordons d'un palan ne sont jamais parallèles; un plan ne saurait même contenir deux cordons consécutifs. Il en résulte des frottements du cordage sur les faces latérales des gorges des poulies; mais on peut fort bien n'y avoir pas égard, et regarder le parallélisme des cordons comme réel, tant que les deux moufles ne se trouvent pas très-voisins.

Quant à la mouflette, tous ses cordons peuvent être rigoureusement parallèles pendant la durée entière de

l'ascension du fardeau ; il suffit pour cela qu'il y ait des rapports convenables entre les rayons des poulies, et que le point d'attache du câble reçoive une certaine position.

Nommons R le rayon de la plus grande des poulies fixes, et δ la différence arbitraire mise entre les rayons de ces poulies. Celui de la moyenne sera $R-\delta$ et celui de la plus petite, $R-2\delta$. Désignons en outre par r, r', r'', d, respectivement le rayon de la plus grande des poulies mobiles, celui de la moyenne, celui de la plus petite, et la distance du point d'attache à la ligne milieu de la chape du moufle fixe. Pour que le cordon AB, qui joint les deux grandes poulies (P. 1, F. 14), soit parallèle au cordon CD, il faut évidemment poser $2r = 2(R-\delta)+\delta = 2R-\delta$, ce qui donne $r = R - \frac{\delta}{2}$. Pour que EF soit parallèle à AB, on doit avoir $r - r' = \delta$, ou $r' = r - \delta$, et la même relation rend GH parallèle à CD. Le cordon IK sera parallèle à EF, si $r' - r'' = \delta$, ce qui exige $r'' = r' - \delta = r - 2\delta$. Enfin, le cordon LM ne peut être parallèle à GH, sans qu'on ait $r' - r'' = R - 2\delta - d$, ou $r - \delta - (r - 2\delta) = R - 2\delta - d$ ou $\delta = R - 2\delta - d$, ou $d = R - 3\delta$.

Ainsi, le rayon de la plus grande des poulies mobiles doit différer du rayon de la plus grande des poulies fixes d'une quantité égale à la moitié de la différence qui existe entre les rayons du moufle supérieur; les rayons du moufle mobile doivent avoir entre eux les mêmes relations que ceux du moufle fixe; enfin la distance du point d'attache à la ligne milieu de la chape supérieure à la valeur qu'aurait le rayon d'une quatrième poulie fixe.

Il est d'ailleurs assez visible que si le cordon LM n'existait pas, le cordon IK s'attacherait à la chape du moufle mobile, et que la distance de la ligne milieu de cette chape au point d'attache devrait remplacer le

rayon de la plus petite des poulies mobiles; elle aurait par conséquent pour valeur $r - 2\delta$, comme r''.

49. C'est aux formules établies pour la poulie fixe et la poulie mobile qu'il faut recourir, à l'effet de découvrir la relation de la puissance et de la résistance principale, soit dans la mouflette, soit dans le palan.

La poulie fixe à cordons parallèles nous a donné (39)

$$Q = \frac{P\left(R + \frac{d^{\mu}b}{2} + 0{,}96 f'\rho\right) + \frac{d^{\mu}a}{2} + 0{,}96\, p f'\rho}{R - 0{,}96 f'\rho},$$

formule dans laquelle P désigne la tension du cordon qui soutient le fardeau. Le terme $0{,}96\, p f'\rho$, toujours fort petit, peut être supprimé, surtout si le coefficient 0,96 de $f'\rho$ est remplacé par l'unité. On a ainsi, pour valeur approchée de la puissance,

$$Q = \frac{P\left(R + \frac{d^{\mu}b}{2} + f'\rho\right) + \frac{d^{\mu}a}{2}}{R - f'\rho} = A + BP,$$

posant pour abréger,

$$\frac{\frac{d^{\mu}a}{2}}{R - f'\rho} = A, \text{ et } \frac{R + \frac{d^{\mu}b}{2} + f'\rho}{R - f'\rho} = B.$$

La poulie mobile nous a fourni, pour relation entre les tensions de ses deux cordons (42), l'équation

$$Q = T + \frac{d^{\mu}}{2R}(a + bT) + f'(P + p')\frac{\rho}{R}.$$

Or, dans le cas des cordons parallèles, $Q + T = P + p' + p$, ou $P + p' = Q + T - p$. Par conséquent,

$$RQ = RT + \frac{d^{\mu}a}{2} + \frac{d^{\mu}b}{2}T + f'\rho Q + f'\rho T - p f'\rho, \text{ ou}$$

bien $$Q = \frac{T\left(R + \frac{d^{\mu}b}{2} + f'\rho\right) + \frac{d^{\mu}a}{2} - p f'\rho}{R - f'\rho}.$$

Négligeant le terme $-pf'\rho$, ce qui ne fait qu'augmenter la tension Q, on a

$$Q = A + BT,$$

comme pour la poulie fixe. Et l'on conçoit qu'il en doit être ainsi, quand le poids p de la roue est négligé; car au moment où le mouvement est sur le point de naître, une poulie mobile peut être considérée comme une poulie fixe dont le point d'attache est remplacé par la résistance du fardeau : la tension T devient alors la résistance principale.

Maintenant désignons par $t_1, t_2, t_3, \ldots . t_n$, les tensions respectives des cordons LM, IK, GH, ... AB (P. I, F. 14) d'une mouflette ou d'un palan. Les poulies mobiles et les poulies fixes donneront successivement

$$\begin{aligned} t_2 &= A + Bt_1 \\ t_3 &= A + Bt_2 \\ t_4 &= A + Bt_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{n-1} &= A + Bt_{n-2} \\ t_n &= A + Bt_{n-1} \\ Q &= A + Bt_n, \end{aligned}$$

si, dans le cas d'une mouflette, on adopte pour R la moyenne de tous les rayons.

Par la substitution, nous tirerons de ces équations

$$t_n = A + AB + B^2 t_{n-2} = A + AB + AB^2 + B^3 t_{n-3} = \text{etc.}$$
$$= A + AB + AB^2 + AB^3 \ldots . + AB^{n-2} + B^{n-1} t_1.$$

Les termes en A formant une progression par quotient, ont pour somme $\frac{AB^{n-1} - A}{B - 1}$. Conséquemment,

$t_n = \frac{AB^{n-1} - A}{B - 1} + B^{n-1} t_1$. Mais, en additionnant les mêmes équations, et observant que la somme des tensions des n cordons égale le fardeau P, le poids du moufle mobile compris, on obtient

$$P - t_1 = (n-1)A + B(P - t_n), \quad \text{et par suite}$$

$$t_1 = P + (1-n)A + B(t_n - P) = (1-n)A + (1-B)P + Bt_n.$$

Donc

$$t_n = \frac{AB^{n-1}-A}{B-1} + (1-n)AB^{n-1} + (1-B)B^{n-1}P + B^n t_n,$$

ou bien

$$t_n(B^n-1) = \frac{A - AB^{n-1} + (n-1)(B-1)AB^{n-1}}{B-1} + (B-1)B^{n-1}P,$$

ou encore

$$t_n = \frac{n(B-1)AB^{n-1} - A(B^n-1)}{(B-1)(B^n-1)} + \frac{(B-1)B^{n-1}}{B^n-1}P$$

$$= A\left(\frac{nB^{n-1}}{B^n-1} - \frac{1}{B-1}\right) + \frac{(B-1)B^{n-1}}{B^n-1}P.$$

Substituant dans la valeur de Q, on trouve enfin

$$Q = A + A\left(\frac{nB^n}{B^n-1} - \frac{B}{B-1}\right) + \frac{(B-1)B^n}{B^n-1}P$$

$$= A\left(\frac{nB^n}{B^n-1} - \frac{1}{B-1}\right) + \frac{(B-1)B^n}{B^n-1}P.$$

50. Nous appliquerons cette formule au palan de la chèvre d'artillerie équipée à quatre brins. Les données seront, comme dans les applications des poulies (40), $R_1 = 0^m,09$, $d = 0^m,04$, $R = 0^m,11$, $\rho = 0^m,018$, $f' = 0,19$. Nous aurons en outre

$$n = 4,\ \frac{d^\mu a}{2} = \frac{0^k,2225}{2}\left(\frac{0,04}{0,02}\right)^{1,75} = 0^k,3742$$

et

$$\frac{d^\mu b}{2} = \frac{0^m,00974}{2}\left(\frac{0,04}{0,02}\right)^{1,75} = 0^m,01638,$$

prenant $\mu = 1,75$, valeur relative à une corde en bon état, mais qui a déjà servi (8).

Il en résulte $A = \dfrac{0^k,3742}{0^m,11 - 0,19 \times 0^m,018} = 3^{kg},51$,

$$B = \frac{0^m,11 + 0^m,01638 + 0,19 \times 0^m,018}{0^m,11 - 0,19 \times 0^m,018} = 1,217$$

et

$$Q = 3^{kg},51\left(\frac{4(1,217)^4}{(1,217)^4-1} - \frac{1}{0,217}\right) + \frac{0,217(1,217)^4}{(1,217)^4-1}P$$

$$= 9^{kg},617 + 0,3988\,P.$$

S'il s'agissait d'élever une pièce de 24, qui pèse 2 800^{kg}, on trouverait, en négligeant le poids du moufle mobile compris dans P,

$$Q = 9^{kg},617 + 0,3988 \times 2800^{kg} = 1126^{kg},257.$$

Sans les résistances accessoires, on aurait $Q' = t_4 = \frac{2800^{kg}}{4} = 700^{kg}$. Elles augmentent donc l'effort du moteur d'environ 426^{kg}, ou des 0,61 de ce qu'il serait pour une machine qui ne présenterait ni raideur de corde, ni frottements.

Quant aux quantités d'action, celle qui est transmise au fardeau, dans une ascension de h mètres, vaut $(2800\,h)^{k}$, et celle que dépense le moteur, égale $(1126 \times 4\,h)^{k}$ $=(4504\,h)^{k}$, puisque chacun des quatre cordons doit évidemment se raccourcir de h mètres et leur ensemble de $4\,h$ mètres, pour que le fardeau s'élève de h mètres.

Le travail mécanique produit est donc au plus les 0,622 du travail effectué. Or nous avons trouvé que dans la poulie fixe (40) le premier forme les $^4/_5$ ou les 0,8 du second. Il est donc plus avantageux d'élever un fardeau à l'aide d'une simple poulie fixe qu'au moyen de 4 poulies mouflées deux à deux, toutes les fois que ce fardeau peut être fractionné en parties qui n'exigent pas des efforts supérieurs à celui du moteur de la première machine.

51. Dans certains cas, le nombre des manœuvres disponibles est connu, ainsi que le poids à élever, et il reste à déterminer les moufles qu'on doit employer. Comme un homme peut exercer un effort de 18^{kg}, en tirant de haut en bas sur le câble d'une poulie, pendant une journée de 6 heures, les m manœuvres formeront une force de $(18\,m)^{kg}$. Substituant cette valeur de Q dans la relation établie entre la puissance et la résistance principale P; mettant à la place de A, B, leurs

valeurs déduites des diamètres des poulies et de la corde, et calculant par logarithmes, nous obtiendrons le nombre n des cordons, qui est aussi celui des poulies. Si n se trouve un nombre entier et pair, sa moitié indique le nombre des poulies de chaque moufle. Si n est entier et impair, on le partage en deux parties dont l'une surpasse l'autre d'une unité : la plus grande exprime le nombre des poulies du moufle fixe, et la plus petite celui des poulies du moufle mobile. Si enfin n est fractionnaire, on prend pour le nombre des poulies le nombre entier immédiatement supérieur.

Mais, quand il s'agit d'une mouflette, la valeur de R, fixée pour déterminer celle de A et celle de B, n'est qu'une moyenne entre les rayons de toutes les poulies, augmentée du rayon de la corde (49). Soit R_1 cette moyenne; on a, pour déterminer les rayons, la relation

$$R_1 = \frac{R + R' + \text{etc.} + r + r' + \text{etc.}}{n}.$$

Supposons, par exemple, $n = 4$ et $R_1 = 0^m,09$. Il viendra $0^m,09 = \frac{R + R' + r + r'}{4} = \frac{R + R - \delta + r + r - \delta}{4} =$

$$\frac{2R - \delta + R - \frac{\delta}{2} + R - \frac{\delta}{2} - \delta}{4} = \frac{4R - 3\delta}{4}, \text{ et } R = \frac{0^m,09 \times 4 + 3\delta}{4}.$$

$= 0^m,09 + \frac{3}{4}\delta.$

Fixant arbitrairement la différence δ des rayons consécutifs à $0^m,01$ par exemple, on trouvera $R = 0^m,09 + \frac{3}{4} 0^m,01 = 0^m,09 + 0^m,0075 = 0^m,0975$, et l'on en conclura $R' = R - \delta = 0^m,0875$, $r = R - \frac{\delta}{2} = 0^m,0975 - 0^m,005 = 0^m,0925$, $r' = r - \delta = 0^m,0825$.

CHÈVRE D'ARTILLERIE.

52. La chèvre d'artillerie se compose d'un système de poulies et d'un treuil à leviers; les tourillons du treuil sont soutenues par deux *pieds* inclinés et concourants qu'unissent trois épars, et qu'un troisième pied arc-boute à l'endroit où ils se joignent; cet endroit est la *tête* de la chèvre.

Quelquefois pourtant la machine ne renferme qu'une seule poulie fixée à la tête; le câble est alors attaché au fardeau, et la chèvre se trouve *équipée à un seul brin.* Mais, lorsque le poids à élever est un peu lourd, on l'accroche à la chape d'une poulie mobile; le câble s'attache à la tête de la chèvre et la *coiffe*, puis il embrasse la poulie inférieure et passe sur la supérieure, pour aller s'enrouler autour du cylindre du treuil: c'est là l'équipement à 2 brins. Enfin, quand le fardeau est très-pesant, on emploie un palan ou une mouflette; le moufle fixe s'accroche à la tête; le nombre des brins égale celui des poulies; le câble coiffe la chèvre, si ce nombre est pair, et il est attaché au fardeau dans le cas contraire.

53. On voit par cette description sommaire que la discussion de la chèvre d'artillerie revient à considérer séparément le système des poulies et le treuil: après avoir déterminé l'effort nécessaire pour élever le fardeau à l'aide des poulies seulement, on regarde cet effort comme la résistance que doivent vaincre les hommes appliqués aux leviers, et il en résulte évidemment une relation entre la puissance motrice et le poids à élever.

Ainsi, nous n'avons qu'à poser la formule qui donne la traction Q' à exercer sur le câble d'un système de n poulies, pour élever un poids P, puis la formule qui

fournit l'effort Q à faire sur les leviers, pour donner la tension Q' au câble du treuil.

La première (49) est

$$Q' = A\left(\frac{nB^n}{B^n-1} - \frac{1}{B-1}\right) + \frac{(B-1)B^n}{B^n-1}P,$$

$$\text{et } A = \frac{\frac{d^\mu a}{2}}{R - f'\rho}, \quad B = \frac{R + \frac{d^\mu b}{2} + f'\rho}{R - f'\rho}.$$

A la vérité, cette valeur de Q' a été obtenue dans l'hypothèse de la verticalité du cordon que tire le moteur du système des poulies, tandis que le câble de la chèvre s'incline d'environ 20° de la tête au cylindre (P. I, F. 15). Mais les applications de la poulie fixe nous ont montré le peu d'influence de cette faible inclinaison (40), et par conséquent, nous pouvons bien la négliger à l'effet d'avoir une équation plus simple.

Quant à la formule relative au treuil, nous ne pouvons l'emprunter au n.° 23, car la résistance principale influe ici sur le frottement en sens inverse de la puissance, et d'ailleurs il faut tenir compte de l'inclinaison du câble, puisque nous ignorons son effet sur l'effort. Mais la notation du numéro cité peut être employée, à cela près que la tension Q', résistance principale, doit remplacer le poids P.

Ainsi, la quantité d'action dépensée par la puissance Q dans un instant est $QR\,d\theta$; celle de la résistance principale est $r\,d\theta\left[Q' + \frac{d^\mu}{2r}(a + bQ')\right]$; le groupe des forces verticales a pour résultante $Q'\cos\beta - Q\sin\theta - p$, et celui des forces horizontales, $Q'\sin\beta - Q\cos\theta$. Comme le premier terme du trinôme est bien supérieur au premier du binôme, et que, pour une position du levier, les deux seconds termes sont égaux, le groupe

vertical surpasse le groupe horizontal; leur résultante vaut approximativement $0,96\,(Q'\cos\beta - Q\sin\theta - p) + 0,4\,(Q'\sin\beta - Q\cos\theta)$, et la quantité d'action consommée par le frottement des tourillons est

$$f'\rho\, d\theta[0,96\,(Q'\cos\beta - Q\sin\theta - p) + 0,4\,(Q'\sin\beta - Q\cos\theta)].$$

Donc,

$$QR\,d\theta = r\,d\theta\left[Q' + \frac{d^{\mu}}{2r}(a + b\,Q')\right] + f'\rho\, d\theta[0,96(Q'\cos\beta - Q\sin\theta - p) + 0,4\,(Q'\sin\beta - Q\cos\theta)],$$

et

$$QR\,\theta = r\,\theta\left[Q' + \frac{d^{\mu}}{2r}(a + b\,Q')\right] + f'\rho\,\theta\,(0,96\,Q'\cos\beta - 0,96\,p + 0,4\,Q'\sin\beta) + f'\rho\,Q\,(0,96\cos\theta - 0,4\sin\theta) + C.$$

Prenant l'intégrale depuis $\theta = \frac{\pi}{4}$ jusqu'à $\theta = \frac{3\pi}{4}$, et observant que $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = 0,7$, que $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = 0,7$, que $\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -0,7$, on obtient

$$QR\frac{\pi}{4} = r\frac{\pi}{4}\left[Q' + \frac{d^{\mu}}{2r}(a + b\,Q')\right] + f'\rho\frac{\pi}{4}(0,96\,Q'\cos\beta - 0,96\,p + 0,4\,Q'\sin\beta) + f'\rho\,Q\,(0,96\times 0,7 - 0,4\times 0,7) + C,$$

$$QR\frac{3\pi}{4} = r\frac{3\pi}{4}\left[Q' + \frac{d^{\mu}}{2r}(a + b\,Q')\right] + f'\rho\frac{3\pi}{4}(0,96\,Q'\cos\beta - 0,96\,p + 0,4\,Q'\sin\beta) + f'\rho\,Q\,(-0,96\times 0,7 - 0,4\times 0,7) + C,$$

$$QR\frac{\pi}{2} = r\frac{\pi}{2}\left[Q' + \frac{d^{\mu}}{2r}(a + b\,Q')\right] + f'\rho\frac{\pi}{2}(0,96\,Q'\cos\beta - 0,96\,p + 0,4\,Q'\sin\beta) - 0,96\times 1,4\,f'\rho\,Q,$$

$$QR = r\left[Q' + \frac{d^{\mu}}{2r}(a + bQ')\right]$$

$$+ f'\rho(0,96\,Q'\cos\beta - 0,96\,p + 0,4\,Q'\sin\beta) - 0,856\,f'\rho\,Q,$$

et enfin

$$Q = \frac{Q'\left(r + \frac{d^{\mu}b}{2} + 0,96 f'\rho\cos\beta + 0,4 f'\rho\sin\beta\right) - 0,96 f'\rho p + \frac{d^{\mu}a}{2}}{R + 0,856 f'\rho}.$$

Mais il faut, pour avoir l'effort à exercer par les manœuvres, retrancher de la valeur de Q l'effort dû au poids des leviers embarrés. Deux le sont à la fois ordinairement. Ils produisent une quantité d'action $2p_1 \times 2r' \sin\frac{\pi}{4} = 2p_1 \times 2r' \times 0,7 = 2,8\, r'p_1$, puisque le centre de gravité de chacun descend verticalement, dans l'abattage, d'une hauteur égale au double du sinus de l'angle formé par l'axe du levier et l'horizontale perpendiculaire à l'axe du treuil, et que ce sinus est relatif au rayon r', distance du dernier axe au centre de gravité. Or, le chemin circulaire que parcourt le point d'application de p_1 pendant l'abattage est évidemment $\frac{2\pi r'}{4} = \frac{\pi}{2} r'$. Donc, l'effort dû aux deux leviers vaut

$$\frac{2,8\,r'p_1}{\frac{\pi}{2} r'} = \frac{5,6\,p_1}{3,1416} = \frac{5,6 \times 7^{kg}}{3,1416} = 12^{kg},478.$$

Rapporté au point d'application des manœuvres, dont la distance à l'axe du cylindre est d'environ $1^m,3$, il devient $12^{kg},478\,\frac{r'}{R} = \frac{12^{kg},478 \times 0,36}{1,3} = 3^{kg},455$.

54. Nous appliquerons nos formules à une chèvre équipée à quatre brins, et nous supposerons pour le palan, comme dans l'application des moufles, $R_1 = 0^m,09$, $d = 0^m,04$, $R = 0,11$, $\rho = 0^m,018$, $f' = 0,19$, $\mu = 1,75$.

Il en résultera $\frac{d^{\mu}a}{2} = 0^{k},3742$, $\frac{d^{\mu}b}{2} = 0^{m},01638$, $A=3^{kg},51$, $B=1,217$, et $Q'=9^{kg},617+0,3988P$.

Pour le treuil, nous ferons $R=1^{m},3$, $r=0^{m},125 + \frac{d}{2} = 0^{m},145$, $\rho=0^{m},04$, $f'=0,1$, comme dans l'application du treuil à leviers. Nous admettrons que la corde soit enroulée à moitié et sur une longueur de 3^{m}. Comme une corde blanche d'un diamètre de $0^{m},02$ pèse par mètre $0^{kg},28$, la nôtre pèsera par mètre $\frac{0^{kg},28}{(0,02)^2} \times (0,04)^2 = 1^{kg},12$; les 3^{m} enroulés feront $1^{kg},12 \times 3 = 3^{kg},36$. D'ailleurs, le cylindre a été trouvé d'environ 83^{kg}, et par suite $p=83^{kg}+3^{kg},36+14^{kg}=100^{kg},36$, puisqu'il doit comprendre aussi le poids 14^{kg} des deux leviers embarrés. Enfin, $\cos\beta = \cos 20° = 0,94$, et $\sin\beta = \sin 20° = 0,34$.

Il s'ensuit

$$Q = \frac{Q'(0^{m},145+0^{m},01638+0,96\times0,1\times0^{m},04\times0,94+0,4\times0,1\times0^{m},04\times0,34)+0^{k},3742-0,96\times0,1\times0^{m},04\times100^{kg},36}{1^{m},3+0,856\times0,1\times0^{m},04}$$

$$= \frac{0^{m},166Q'-0^{k},011}{1^{m},3034} = \frac{0^{m},166\times9^{kg},617+0^{m},166\times0,3988P-0^{k},011}{1^{m},3034}$$

$$= \frac{1^{k},59+0^{m},066P}{1^{m},3034} = 1^{kg},219+0,051P.$$

S'il s'agit d'élever une pièce de 24, $P=2800^{kg}$, la corde déroulée comprise, $Q=1^{kg},219+0,051\times2800^{kg} = 144^{kg},019$, et l'effort des manœuvres doit être $144^{kg},019 - 3^{kg},455 = 140^{kg},564$.

En négligeant les résistances accessoires, on trouverait $Q'=\frac{P}{n}=\frac{2800^{kg}}{4}=700^{kg}$, et $Q=Q'\frac{r}{R}=700^{kg}\frac{0,145}{1,3} = 78^{kg},077$. Ainsi ces résistances absorbent $62^{kg},487$, c'est-à-dire les 0,444 de la puissance motrice, ou un peu moins que moitié.

Les quantités d'action ont pour rapport 0,555. En effet, celle qui est dépensée dans un abattage égale $Q \frac{2\pi R}{4} = 140^{kg},564 \times \frac{3,1416}{2} \times 1^{m},3 = 287^{k},04$, et celle qui est transmise au fardeau vaut $P \frac{2\pi r}{4} \times \frac{1}{4}$ $= \frac{2800^{k} \times 3,1416 \times 0^{m},145}{8} = 159^{k},44$.

Nous avons employé l'effort $140^{kg},564$ pour calculer la première, parce que la quantité d'action produite par la descente des leviers est précisément la restitution de celle qui a été consommée pour les élever de leur position inférieure à leur position supérieure. Quant au chemin vertical fait par le fardeau, il égale évidemment la longueur de corde qui s'enroule pendant l'abattage, divisée par le nombre des brins du palan.

CHÈVRE DES ARCHITECTES.

55. Le treuil de la chèvre qu'on emploie souvent dans l'érection des bâtiments ne se manœuvre pas à l'aide de leviers. Deux roues dentées (P. I, F. 16) qui ont pour axe celui du cylindre, et qui sont établies aux deux bouts de cette pièce, engrènent chacune avec un pignon dont un des tourillons porte une manivelle. L'arbre commun des deux pignons se trouve dans le même plan vertical que l'axe du cylindre. D'ailleurs, le câble s'enroule sur le cylindre, après avoir embrassé les poulies de deux moufles, comme dans la chèvre d'artillerie.

56. L'engrenage introduit une nouvelle résistance accessoire, dont nous devons rechercher la valeur avant d'entreprendre la discussion de la machine. Cette résistance est le frottement de glissement qui a lieu entre la dent d'une roue et l'aile du pignon qui la conduit.

Considérons deux roues dentées O, O' (P. I, F. 17) dont deux dents ont commencé à se toucher en A, et se trouvent maintenant avoir le point B pour contact. Si nous désignons par θ, θ', les arcs décrits à l'unité de distance pendant le passage du contact de A en B, ce contact décrira dans l'instant dt suivant un arc $BB' = OBd\theta$ et un arc $BB'' = O'Bd\theta'$. Mais la tangente commune BC des deux dents peut être censée conserver sa position pendant un temps infiniment petit; alors le point B de la dent de O ne fait que glisser sur cette tangente de B en b'; de même le point B de la dent de O' glisse de B en b'', et le frottement des deux dents a lieu tant sur Bb' que sur Bb'', ou le long d'un chemin total $b'b''$, puisque dans cette longueur infiniment petite, les courbes se confondent sensiblement avec leur tangente commune. Or Bb', Bb'' doivent être évidemment les projections des arcs BB', BB'', et ces arcs diffèrent extrêmement peu de leurs tangentes. Par conséquent, $Bb' = BB' \cos B'Bb'$, $Bb'' = BB'' \cos B''Bb''$, ou bien $Bb' = OBd\theta \cos B'Bb'$, $Bb'' = O'Bd\theta' \cos B''Bb''$.

Abaissons des centres, sur la tangente BC, les perpendiculaires OD, O'E; nous aurons $B'Bb' = BOD$, $B''Bb'' = BO'E$, $OB \cos B'Bb' = OD$, $O'B \cos B''Bb'' = O'E$, ou $Bb' = pd\theta$, $Bb'' = p'd\theta'$, si p, p' désignent respectivement les longueurs des perpendiculaires OD, O'E, et enfin $Bb' + Bb'' = pd\theta + p'd\theta'$ pour le chemin le long duquel a lieu le frottement des deux dents, pendant un temps infiniment court.

Il est plus simple d'exprimer le chemin élémentaire en fonction des rayons OA, O'A ou R, R' des *circonférences primitives* de l'engrenage. A cet effet, nous désignerons par n la normale commune AB des deux dents, par α l'angle compris entre la tangente BC et la droite des centres OO', puis nous mènerons par

A et O' des parallèles à BC. Il en résultera évidemment $p=n+R\sin\alpha$, $p'=n-R'\sin\alpha$, et le chemin élémentaire deviendra $(n+R\sin\alpha)d\theta+(n-R'\sin\alpha)d\theta'$ $=n(d\theta+d\theta')+(Rd\theta-R'd\theta')\sin\alpha$. Or $Rd\theta$, $R'd\theta'$ sont les arcs décrits par le point A sur les deux circonférences primitives, pendant le temps dt, et comme ces deux circonférences, qui se conduisent, parcourent nécessairement des arcs égaux dans le même temps, $Rd\theta=R'd\theta'$, et $d\theta=\frac{R'}{R}d\theta'$. Le chemin élémentaire se réduit donc à

$$n(d\theta+d\theta')=n\left(\frac{R'}{R}d\theta'+d\theta'\right)=n\frac{R+R'}{R}d\theta'.$$

Enfin, représentons par N la pression normale d'une dent sur l'autre, et par f le coefficient du frottement; ce frottement aura fN pour valeur, et il exigera une quantité d'action élémentaire $fNn\frac{R+R'}{R}d\theta'$. Si donc F est l'effort tangentiel nécessaire pour vaincre le frottement de l'engrenage, et C le chemin le long duquel il faut l'exercer pendant une rotation égale à θ', on a pour la quantité d'action à dépenser durant cette rotation

$$F\times C=f\frac{R+R'}{R}\int Nn\,d\theta'.$$

57. Quand une des roues devient un pignon O' (P. I, F. 18) et que l'engrenage est bien exécuté, la tangente commune passe par le centre de ce pignon. Pour ce cas donc, $\alpha=\theta'$, $AB=n=R'\sin\theta'$; il y a entre la pression N et l'effort tangentiel E communiqué au pignon, la relation $N\cos BAE=E$ ou $N=\frac{E}{\cos\theta'}$, et

$$F\times C=f\frac{R+R'}{R}\int\frac{E}{\cos\theta'}R'\sin\theta'd\theta'=fER'\frac{R+R'}{R}\int\frac{\sin\theta'}{\cos\theta'}d\theta'.$$

Or l'angle θ' est toujours assez petit pour qu'on puisse le mettre, sans grande erreur, à la place de sa tangente. Conséquemment,

$$F\times C = fER'\frac{R+R'}{R}\int \theta' d\theta' = fER'\frac{R+R'}{R}\cdot\frac{\theta'^2}{2} + C.$$

L'intégrale doit être prise depuis le moment où l'aile du pignon saisit la dent, jusqu'à celui où elle l'abandonne, c'est-à-dire entre les instants où les faces correspondantes de deux ailes consécutives passent dans le plan O'B, ou, ce qui revient au même, de $\theta'=0$ à $\theta'=\frac{a}{R'}$, a étant l'arc de la circonférence primitive du pignon que comprennent entre leurs faces correspondantes deux ailes voisines. Ainsi,

$$F\times C = fER'\frac{R+R'}{R}\cdot\frac{a^2}{2R'^2} = fE\frac{R+R'}{RR'}\frac{a^2}{2}.$$

Quant au chemin fini C, le long duquel s'exerce l'effort F pendant que la même aile pousse la roue dentée, il vaut l'arc a évidemment. On a donc

$$F = fE\frac{R+R'}{RR'}\cdot\frac{a}{2}.$$

Pour donner à la valeur du frottement son expression ordinaire, qui est fonction du nombre m des dents et du nombre m' des ailes, nous observerons que $a=\frac{2\pi R'}{m'}$, et que le rapport de m à m' égale celui des deux circonférences primitives ou celui de leurs rayons. Il en résulte $\frac{R+R'}{R}=\frac{m+m'}{m}$ et $F=\pi fE\frac{m+m'}{mm'}$.

58. Il y a maintenant possibilité d'établir les formules relatives à la chèvre des architectes. Soient (P. I, F. 16) R le bras de manivelle, r le rayon du cylindre augmenté de celui de la corde, R' la distance de l'axe d'une roue au contact d'une de ses dents avec une aile du pignon, r' la distance analogue dans ce pignon, ρ le rayon des tourillons du treuil, ρ' celui des tourillons des pignons, f' le coefficient du frottement pour les tourillons du treuil, f'' le coefficient du frottement pour ceux des

pignons, f''' le coefficient du frottement de glissement des dents en contact, Q l'effort du moteur, Q′ la tension du câble, E l'effort d'une dent contre l'autre, d le diamètre du câble, α l'angle de la direction de Q′ et de la verticale, m le nombre des dents de la roue, m' celui des dents du pignon, p le poids que supportent les tourillons du cylindre, et p' celui que soutiennent les tourillons des pignons.

Comme tous les chemins parcourus par les points d'application, dans le même temps, dans un tour complet des manivelles, par exemple, sont des circonférences, ils égalent chacun le produit de 2π et du rayon respectif. Les quantités d'action peuvent donc être divisées par 2π, et leur relation revient alors à celle des moments.

Nous considérerons d'abord le treuil composé du cylindre et des roues, dans lequel la résistance principale est Q′, et la puissance, l'effort horizontal E de la dent du pignon contre celle de la roue, puis le treuil composé du pignon et de la manivelle, dans lequel la résistance principale est l'effort horizontal E de la dent de la roue contre celle du pignon, et la puissance, l'effort moteur Q appliqué à la poignée de la manivelle.

Le moment de E est ER', celui de Q′ est $Q'r$, et celui de la raideur est $\frac{d^{\mu}}{2r}(a+bQ')r$. Le groupe des forces verticales a pour résultante $Q'\cos\alpha - p$; celle du groupe des forces horizontales est $E - Q'\sin\alpha$; celle des deux groupes vaut approximativement

$$0{,}96(Q'\cos\alpha - p) + 0{,}4(E - Q'\sin\alpha),$$

et le moment du frottement des tourillons du cylindre égale

$$f'\rho[0{,}96(Q'\cos\alpha - p) + 0{,}4(E - Q'\sin\alpha)].$$

Nous aurons donc, puisqu'il doit y avoir égalité entre le moment de la puissance et la somme de ceux des ré-

sistances, comme entre les quantités d'action,

$$ER' = Q'r + \frac{d^{\mu}}{2}(a + bQ') + f'\rho[0,96(Q'\cos\alpha - p) + 0,4(E - Q'\sin\alpha)],$$

et par suite

$$E = \frac{Q'\left(r + \frac{d^{\mu}b}{2} + 0,96f'\rho\cos\alpha - 0,4f'\rho\sin\alpha\right) + \frac{d^{\mu}a}{2} - 0,96f'\rho p}{R' - 0,4f'\rho}.$$

Dans le treuil à manivelle, la résistance égale l'effort E augmenté du frottement des dents, qui, d'après les deux numéros précédents, vaut l'effort horizontal $Ef'''\pi\frac{m+m'}{mm'}$. Le groupe des forces verticales se réduit à p'; celui des forces horizontales ne contient que $E + Ef'''\pi\frac{m+m'}{mm'} = E'$. La résultante des deux groupes est $0,96E' + 0,4p'$, et le moment du frottement des tourillons des pignons égale $f''\rho'(0,96E' + 0,4p')$. L'effort moteur ne contribue en rien au frottement, puisqu'il y a deux manivelles toujours tournées en sens contraires. Conséquemment, $QR = E'r' + f''\rho'(0,96E' + 0,4p')$, puis $Q = \frac{E'(r' + 0,96f''\rho') + 0,4f''\rho'p'}{R}$. Cette valeur de Q, celle de E, et l'équation $E' = E\left(1 + f'''\pi\frac{m+m'}{mm'}\right)$ sont les formules de la machine.

59. Dans un treuil à roues dont nous avons fait le lever, $R = 0^m,535$, $r = 0^m,115 + \frac{d}{2}$, $R' = 0^m,39$, $r' = 0^m,065$, $\rho = 0^m,02$, $\rho' = 0^m,015$, $f' = f'' = 0,124$, coefficient relatif à des tourillons en fer tournant dans des encastrements en fonte enduits de cambouis; $f''' = 0,07$, coefficient relatif au glissement de la fonte sur la fonte avec enduit renouvelé; $m = 120$ et $m' = 20$.

Si de plus nous supposons $d = 0^{m},04$, un câble qui ait déjà servi, et par conséquent $\mu = 1,75$, $\alpha = 20^{\circ}$ ou $\cos \alpha = 0,94$ et $\sin \alpha = 0,34$, le poids du cylindre joint à celui des deux roues et de la corde enroulée ou $p = 125^{kg}$, enfin le poids du pignon joint à celui de la manivelle ou $p' = 75^{kg}$, nous aurons, comme dans la chèvre d'artillerie, $\frac{d''b}{2} = 0^{m},01638$, $\frac{d''a}{2} = 0^{k},3742$, puis

$$E = \frac{Q'(0^{m},135 + 0^{m},01658 + 0,96 \times 0,124 \times 0^{m},02 \times 0,94 - 0,4 \times 0,124 \times 0^{m},02 \times 0,34) + 0^{k},3742 - 0,96 \times 0,124 \times 0^{m},02 \times 125^{kg}}{0^{m},39 - 0,4 \times 0,124 \times 0^{m},02}$$

$$= \frac{0^{m},154\, Q' + 0^{k},077}{0^{m},389} = 0,396\, Q' + 0^{kg},198,$$

$$E' = E\left(1 + 0,07 \times 3,1416\, \frac{140}{120 \times 20}\right) = 1,0128\, E,$$

$$Q = \frac{1,0128\, E\, (0^{m},065 + 0,96 \times 0,124 \times 0^{m},015) + 0,4 \times 0,124 \times 0^{m},015 \times 75^{kg}}{0^{m},335}$$

$$= \frac{0^{m},068 E + 0^{k},056}{0^{m},335} = \frac{0^{m},068 \times 0,396 Q' + 0^{m},068 \times 0^{kg},198 + 0^{k},056}{0^{m},335}$$

$$= \frac{0^{m},027\, Q' + 0^{k},069}{0^{m},335} = 0,081\, Q' + 0^{kg},206.$$

Supposons que la chèvre des architectes soit employée à élever un fardeau de 2800^{kg}, comme la chèvre d'artillerie, et avec le même palan. Nous trouverons Q' au moyen de l'équation $Q' = 9^{kg},617 + 0,3988\, P$ établie dans l'application des moufles et dans celle de la chèvre d'artillerie. Il viendra

$$Q' = 9^{kg},617 + 0,3988 \times 2800^{kg} = 1126^{kg},257,$$

et $\quad Q = 0,081 \times 1126^{kg},257 + 0^{kg},206 = 91^{kg},433.$

Rapprochant ce résultat de l'effort du moteur dans la chèvre d'artillerie, lequel a été trouvé de $140^{kg},564$, on voit que la puissance nécessaire à cette machine et celle qu'exige la chèvre des architectes sont entre elles comme 3 est à 1,95, ou, en nombres ronds, comme 3 : 2.

Si l'on négligeait les résistances accessoires, on aurait $ER' = Q'r$, $E = \frac{Q'r}{R'}$, $QR = Er'$, $Q = \frac{Er'}{R} = \frac{Q'rr'}{RR'}$, et d'après les données précédentes,

$$Q = Q' \frac{0,135 \times 0,065}{0,335 \times 0,39} = 0,067\,Q'$$
$$= 0,067\,\frac{P}{n} = 0,067\,\frac{2800^{kg}}{4} = 46^{kg},9.$$

Conséquemment, les résistances accessoires valent en totalité $91^{kg},435 - 46^{kg},9 = 44^{kg},535$ et forment les 0,487 de la puissance motrice nécessaire, rapport un peu plus grand que celui de 0,444 qui existe dans la chèvre d'artillerie.

Cherchons enfin le rapport des quantités d'action. Celle que dépense le moteur pour un tour complet du cylindre exige un nombre de tours de manivelle égal à $\frac{120}{20} = 6$, rapport du nombre des dents de chaque roue au nombre des ailes du pignon. Cette quantité d'action est donc $Q \times 2\pi R \times 6 = 91^{kg},435 \times 2 \times 3,1416 \times 0^{m},335 \times 6 = 1154^{k},73$.

Comme un tour complet du cylindre n'élève le fardeau que du quart, à cause des quatre brins, la quantité d'action transmise à ce fardeau est

$$P \times \frac{2\pi r}{4} = 2800^{kg} \times \frac{2 \times 3,1416 \times 0^{m},135}{4} = 593^{k},76,$$

et par conséquent, elle forme seulement les 0,514 de celle qui est dépensée par le moteur.

Les nombres analogues trouvés pour la chèvre d'artillerie établissant que la quantité d'action transmise s'élève aux 0,555 de celle du moteur, il s'ensuit que la chèvre des architectes consomme, pendant le mouvement, plus de travail mécanique que la chèvre d'artillerie, bien qu'elle favorise beaucoup plus la puissance; en d'autres termes, elle multiplie le chemin

du moteur, plus qu'elle ne divise l'effort. Cependant, elle est à préférer non seulement lorsqu'il importe d'économiser la force motrice, mais encore s'il faut économiser le temps, c'est-à-dire quand il s'agit d'élever un fardeau à une hauteur donnée, dans le moins de temps possible; car, en déterminant par expérience le temps nécessaire pour embarrer, débarrer et vaincre l'inertie, dans la chèvre d'artillerie, on trouverait très-probablement que l'autre machine emploierait moins de temps pour la même ascension. Enfin, il est visible que la chèvre des architectes aurait encore l'avantage, même pour la quantité d'action transmise, si l'on faisait entrer en compte celles que consomme l'inertie au commencement de chaque abattage, et au commencement du mouvement continu de la manivelle.

CRICS.

60. Les crics servent ordinairement à pousser des poids de bas en haut; mais on peut aussi les employer à produire des tractions, et d'ailleurs ils ont tant d'analogie avec le treuil à manivelle, que leur étude est convenablement placée après celle des chèvres.

Il y a deux espèces de cric : le *cric simple* et le *cric composé*. Dans le premier (P. I, F. 19), la puissance motrice Q, appliquée à une manivelle R, fait tourner de droite à gauche, par exemple, un pignon A qui engrène, à une distance r de son axe, avec une crémaillère B sur laquelle porte le fardeau P. Dans le second (F. 20), la puissance Q fait tourner le pignon A de gauche à droite; ce pignon engrène avec une roue dentée C, à une distance R' de l'axe de cette roue, et sur l'arbre de C est monté un autre pignon A', pareil au premier, qui engrène avec la crémaillère B.

61. Il est évident qu'ici c'est le frottement de glissement des dents sur les ailes qu'on doit ajouter à la résistance principale P, au lieu de la raideur. Nous avons trouvé (57), pour ce frottement, quand il s'agit d'un pignon, d'une roue et d'une pression E, $F = \pi f E \frac{m+m'}{mm'}$, expression dans laquelle m est le nombre des dents de la roue, m' celui des ailes, et $\frac{m+m'}{m} = \frac{R+R'}{R}$. Si la roue se change en crémaillère, R devient infini, et $\frac{m+m'}{m} = 1$, comme $\frac{R+R'}{R}$. Dans ce cas donc, où de plus la pression est P, $F = \pi f \frac{P}{m'}$, et la résistance à laquelle Q doit faire équilibre, pendant le mouvement, vaut $P + \pi f \frac{P}{m'} = P\left(\frac{m'+\pi f}{m'}\right)$, si nous négligeons les frottements de la crémaillère sur les parois de la boîte qui renferme l'engrenage.

Or, l'équation du treuil à manivelle (9) est

$$Q = \frac{P\left[r + \frac{d^{\prime\mu} b}{2} + \rho f'(0,96\cos\beta - 0,4\sin\beta)\right] + \frac{d^{\prime\mu} a}{2} + 0,96 f' \rho p}{R - 0,2546 f' \rho},$$

et pour la rendre propre au cric simple, il faut évidemment y faire $d = 0$, puisque cette machine ne renferme point de corde, $\beta = 0$, puisque la résistance principale agit verticalement; prendre pour p le poids dû pignon et de la manivelle, pour ρ le rayon de l'arbre de ce pignon; remplacer P par $P\left(\frac{m'+\pi f}{m'}\right)$; enfin comprendre dans P le poids du fardeau et celui de la crémaillère. On obtient ainsi

$$Q = \frac{P\left(\frac{m'+\pi f}{m'}\right)(r + 0,96 f' \rho) + 0,96 f' \rho p}{R - 0,2546 f' \rho},$$

ou

$$Q = \frac{P(m' + \pi f)(r + 0,96 f' \rho) + 0,96 f' \rho m' p}{m'(R - 0,2546 f' \rho)}.$$

62. L'équation du cric simple convient au treuil que forment la roue dentée et son pignon dans le treuil composé ; seulement il faut y remplacer R par R', p par p', poids du treuil, et Q par la pression Q_1 qu'exerce de haut en bas l'aile du pignon A sur la dent de C. Il en résulte

$$Q_1 = \frac{P(m' + \pi f)(r + 0{,}96 f' \rho) + 0{,}96 f' \rho m' p'}{m'(R' - 0{,}2546 f' \rho)}.$$

Mais à cette équation doit se joindre celle du treuil formé par le pignon A et sa manivelle. La résistance principale est, pour cette partie de la machine, Q_1, pression exercée de bas en haut par la dent de C sur l'aile de A, et il faut y ajouter le frottement $F = \pi f Q_1 \frac{m+m'}{mm'}$. Nous avons donc à modifier l'équation du treuil à manivelle comme il a été dit ci-dessus, et à y remplacer P par $Q_1 + \pi f Q_1 \frac{m+m'}{mm'} = Q_1 \frac{mm' + \pi f(m+m')}{mm'}$. Il vient ainsi, pour seconde équation du cric composé,

$$Q = \frac{Q_1[mm' + \pi f(m+m')](r + 0{,}96 f' \rho) + 0{,}96 f' \rho mm' p}{mm'(R - 0{,}2546 f' \rho)}.$$

GRUES.

63. Les grues sont des machines qui servent à élever des fardeaux et à les transporter horizontalement à une petite distance du lieu de l'ascension. Elles renferment, comme les chèvres, des poulies et un treuil; mais elles ont en outre la faculté de pivoter sur un axe vertical. Leur composition et leur forme varient d'ailleurs avec l'emploi auquel on les destine et le lieu où elles sont établies. Souvent aussi le caprice des constructeurs est l'unique cause des différences qui existent entre ces machines.

En général, une grue présente un arbre vertical qu'un tourillon et un pivot rendent mobile (P. I, F. 21) ; un *bec*,

pièce de bois horizontale, assemblée dans la partie supérieure de l'arbre; un treuil à roue et à encliquetage ou à manivelle et à engrenage, porté par la partie inférieure du même arbre et par une charpente suspendue; enfin deux poulies de renvoi fixées aux extrémités du bec. Le câble du treuil passe sur ces poulies et va s'attacher au fardeau. Souvent aussi on remplace par un palan ou une mouflette la poulie qui se trouve le plus éloignée de l'arbre.

La grue a quelquefois un petit chariot monté sur quatre roulettes, qui peut cheminer sur des bandes de fer dont le bec est revêtu. Ce bec est alors formé de deux pièces de bois parallèles et un peu écartées; c'est au-dessus de la face supérieure qu'est placée la poulie de renvoi la plus voisine de l'arbre; l'essieu de l'autre a ses appuis au milieu des brancards du chariot; le câble passe entre les deux parties du bec, de sorte qu'au moyen d'une corde convenablement disposée, le fardeau peut être rapproché ou éloigné de l'arbre vertical.

64. Ce qui a été dit des treuils, des poulies et des chèvres, suffit bien pour mettre à même de déterminer l'effort et la quantité d'action que doivent employer des hommes chargés d'élever un fardeau au moyen d'une grue. Evidemment, le calcul devra être conduit comme celui de la chèvre des architectes. Nous n'avons donc à nous occuper, relativement aux grues ordinaires, que du mouvement horizontal qu'il faut imprimer pour faire tourner le fardeau autour de l'arbre vertical et le transporter en un point de la circonférence du sol sur laquelle se projette celle qui peut être décrite par l'extrémité antérieure du bec. Quant aux grues à chariot, leur théorie exige seulement qu'on ajoute à celle des autres la valeur de l'effort nécessaire pour opérer le mouvement parallèle au bec.

65. La machine doit être considérée au moment où l'encliquetage empêche de redescendre le fardeau P parvenu à une certaine hauteur. Aucune résistance accessoire ne s'opposera au mouvement horizontal qu'il s'agit d'imprimer, à moins qu'on ne regarde comme telle l'inertie de la masse totale; mais c'est là une résistance qui n'existe plus dès que la rotation est devenue uniforme, et qu'on ne considère pas dans la discussion des machines, ou que l'on considère à part. Il y a donc seulement à faire équilibre aux deux résistances principales, c'est-à-dire au frottement du tourillon et du pivot sur les parois verticales des appuis, et au frottement de l'extrémité inférieure du même pivot sur le fond de la crapaudine. Tous deux sont dus au fardeau et à la puissance motrice Q appliquée en un point de la charpente du treuil; le poids P′ de la machine, y compris le câble, contribue aussi au second; mais la disposition des pièces ne lui laisse pas d'influence sensible sur le premier, attendu qu'elle place à fort peu près sur l'axe de l'arbre le centre de gravité C de l'appareil déchargé.

Représentons par d la distance de la direction de P à l'axe; cette longueur pourra être prise aussi, sans erreur notable, pour la distauce de la même directiou au point A où le pivot s'appuie contre la paroi latérale de la crapaudine. Nommons l, l' les distances de A au milieu B du tourillon et au centre de gravité C, ρ le rayon du tourillon et de la partie supérieure du pivot, ρ' celui du cercle de ce pivot qui frotte sur le fond de la crapaudine, f' le coefficient du frottement latéral, f'' le coefficient de l'autre, α l'angle que fait la direction de l'effort Q avec la normale au plan de symétrie ABP, et k la distance de l'axe de l'arbre au point D où cette direction perce le même plan. La puissance sera supposée exercée selon une droite inclinée et de bas en haut, parce que

ordinairement les hommes poussent ayant les bras un peu élevés ; on admettra aussi qu'elle se trouve à droite de la normale au plan ABP, attendu que des manœuvres qui marchent circulairement tendent toujours à éloigner du centre leur point d'application.

L'effort P agissant avec un bras de levier d, tend à faire tourner le système autour de A et de gauche à droite. C'est la résistance horizontale du collier en B qui s'oppose au mouvement, et par conséquent, elle tend à faire tourner aussi autour de A, mais de droite à gauche. Comme le bras de levier de cette force est l, la pression horizontale que P occasionne en B vaut $\frac{Pd}{l}$, dans le cas de l'équilibre.

La pression horizontale produite en A par P est aussi $\frac{Pd}{l}$, car c'est au moyen de ce point fixe que la réaction du collier et l'effort P se font équilibre ; par conséquent, leur résultante s'y détruit ; or, si nous l'y décomposons, nous retrouvons P pour composante verticale, et $\frac{Pd}{l}$ pour composante horizontale.

La puissance motrice Q se décompose en deux forces rectangulaires, au point D ; elle donne une force $Q\cos\alpha$ dirigée selon la normale de ABP, et une force $Q\sin\alpha$ dirigée selon l'intersection du même plan et du plan normal qui contient Q. La première opère seule le mouvement horizontal de la grue, avec un bras de levier k. La seconde, qui fait un certain angle β avec la verticale, se décompose à son tour en deux parties situées dans le plan de symétrie : l'une, $Q\sin\alpha\cos\beta$, agit verticalement de bas en haut, à une distance k de l'axe ; l'autre, $Q\sin\alpha\sin\beta$, agit horizontalement de droite à gauche, à une certaine distance l'' au-dessous du centre de gravité C.

La force $Q \sin \alpha \cos \beta$ tend, comme P, à faire tourner le système de gauche à droite autour de A; elle produit donc en B une pression $\frac{k}{l} Q \sin \alpha \cos \beta$, et en A une pression égale.

La force $Q \sin \alpha \sin \beta$, perpendiculaire à l'axe, agit à une distance $l' - l''$ de A. Ainsi, d'après la répartition connue d'un effort appliqué perpendiculairement à une barre qui repose sur deux appuis, elle occasionne en B une pression horizontale dirigée de droite à gauche, dont la valeur est $\frac{l' - l''}{l} Q \sin \alpha \sin \beta$. Comme cette pression est de sens contraire aux deux que nous avons déjà trouvées pour le même point, elle sera prise négativement.

La même force $Q \sin \alpha \sin \beta$ agit à une distance $l - l' + l''$ de B. Elle produit donc en A une pression horizontale $\frac{l - l' + l''}{l} Q \sin \alpha \sin \beta$, de même sens que les deux qui ont été trouvées déjà pour ce point.

Comme la résistance due au frottement latéral est évidemment la somme de celui qui a lieu en A et de celui qui a lieu en B, nous pouvons ajouter les six pressions exercées en ces deux points, et supposer que leur somme cause un frottement unique soit en A, soit en B. Nous aurons ainsi, en A par exemple, dans le plan ABP, une force unique

$$2\frac{Pd}{l} + 2\frac{k}{l} Q \sin \alpha \cos \beta + \left(\frac{l - l' + l''}{l} - \frac{l' - l''}{l}\right) Q \sin \alpha \sin \beta$$
$$= \frac{2d}{l} P + \frac{2k}{l} Q \sin \alpha \cos \beta + \frac{l - 2l' + 2l''}{l} Q \sin \alpha \sin \beta.$$

Mais nous pouvons transporter dans le plan horizontal de cette force l'effort $Q \cos \alpha$, pourvu que nous lui conservions sa direction perpendiculaire au plan de symétrie. Alors les directions se rencontreront à

angle droit, et les deux forces auront une résultante

$$0{,}96\left(\frac{2d}{l}\mathrm{P}+\frac{2k}{l}\mathrm{Q}\sin\alpha\cos\beta+\frac{l-2l'+2l''}{l}\mathrm{Q}\sin\alpha\sin\beta\right)+0{,}4\,\mathrm{Q}\cos\alpha.$$

C'est cette résultante de toutes les forces horizontales qui causera le frottement latéral, et comme elle ne se trouvera pas normale à la surface d'appui, il faudra la multiplier par $f'=\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$, pour avoir l'intensité de ce frottement (9).

Quant au frottement sur le fond de la crapaudine, il est produit par la pression $\mathrm{P}+\mathrm{P}'-\mathrm{Q}\sin\alpha\cos\beta$, résultante de toutes les forces verticales, et son intensité égale $f''(\mathrm{P}+\mathrm{P}'-\mathrm{Q}\sin\alpha\cos\beta)$.

Reste maintenant à exprimer que la quantité d'action dépensée par le moteur équivaut à la somme des quantités d'action consommées par les deux résistances. Or cette équation revient à celle des moments relatifs à l'axe de rotation, puisque tous les mouvements se font circulairement autour de cet axe (58). Nous poserons donc seulement

$$k\mathrm{Q}\cos\alpha=f'\rho\left\{0{,}96\left(\frac{2d}{l}\mathrm{P}+\frac{2k}{l}\mathrm{Q}\sin\alpha\cos\beta+\frac{l-2l'+2l''}{l}\mathrm{Q}\sin\alpha\sin\beta\right)+0{,}4\,\mathrm{Q}\cos\alpha\right\}+{}^2\!/_3 f''\rho'(\mathrm{P}+\mathrm{P}'-\mathrm{Q}\sin\alpha\cos\beta),$$

car nous avons vu (52) que le frottement d'un pivot sur le fond de sa crapaudine agit aux $^2/_3$ du rayon du cercle frottant.

Conséquemment,

$$\mathrm{Q}=\frac{\mathrm{P}\left(0{,}96f'\rho\frac{2d}{l}+{}^2\!/_3f''\rho'\right)+{}^2\!/_3f''\rho'\mathrm{P}'}{k\cos\alpha-f'\rho\left\{0{,}96\left(\frac{2k}{l}\sin\alpha\cos\beta+\frac{l-2l'+2l''}{l}\sin\alpha\sin\beta\right)+0{,}4\cos\alpha\right\}+{}^2\!/_3f''\rho'\sin\alpha\cos\beta}.$$

Si la puissance agissait perpendiculairement au plan de symétrie, on aurait $\alpha=0$, et par suite, la formule précédente se réduirait à

$$Q=\frac{P\left(0{,}96f'\rho\frac{2d}{l}+{}^2/_3f''\rho'\right)+{}^2/_3f''\rho'P'}{k-0{,}4f'\rho}.$$

66. L'arbre a quelquefois un second tourillon au lieu d'un pivot. Il s'appuie alors par une portion annulaire de sa base inférieure sur le parement d'un trou dans lequel s'engage le second tourillon (P. I, F. 22). Les formules précédentes conviennent aussi à ce cas, seulement il faut y remplacer ${}^2/_3\,\rho'$ par la distance de l'axe au centre de gravité d'un secteur de l'anneau.

Soient, pour déterminer cette distance x, r le rayon de l'arbre, ρ celui du tourillon inférieur, S un secteur du grand cercle qui en soit la $n^{ième}$ partie, s, s' les secteurs correspondants de l'anneau et du petit cercle. Les distances des centres de gravité de S, s' à l'axe sont ${}^2/_3\,r$, ${}^2/_3\,\rho$, et le poids de S est la résultante des poids de s, s'. Donc ${}^2/_3\,r\,S=s\,x+{}^2/_3\,\rho\,s'$, et $x=\frac{{}^2/_3(rS-\rho s')}{s}$. Mais

$S=\frac{\pi r^2}{n}$, $s'=\frac{\pi\rho^2}{n}$, $s=\frac{\pi}{n}(r^2-\rho^2)$. Par conséquent,

$x={}^2/_3\frac{r^3-\rho^3}{r^2-\rho^2}$.

67. Le chariot d'une grue n'a point de frottement de roulement, puisque ses roulettes en fonte ne produisent aucune impression sensible sur les bandes de fer qui les supportent. La seule résistance qu'il oppose est donc le frottement de glissement des essieux. Ce frottement se trouve produit par la pression due à la résultante du fardeau P et de l'effort horizontal q qu'exige le mouvement, c'est-à-dire par $\sqrt{P^2+q^2}$, force qui se répartit

également entre les quatre roulettes. Or c'est la même chose d'évaluer le frottement d'une seule roulette, dû à $\frac{1}{4}\sqrt{P^2+q^2}$, puis de le quadrupler, ou de supposer la pression entière $\sqrt{P^2+q^2}$ exercée sur un seul essieu. La résistance totale est donc $f'\sqrt{P^2+q^2}$, et si R, r désignent respectivement le rayon d'une roulette et de son vide, les quantités d'action donnent, pour un tour complet, $2\pi Rq = 2\pi rf'\sqrt{P^2+q^2}$, $R^2q^2 = r^2f'^2(P^2+q^2)$,

$$q = \frac{rf'P}{\sqrt{(R^2 - r^2f'^2)}}.$$

Une autre valeur de q suffisamment approchée et plus facile à calculer se déduit de l'équation

$$q = \frac{rf'\alpha P + A(P+p)}{\cos\varphi(R - rf'\beta) + \sin\varphi(A + rf'\alpha)},$$

établie pour le roulement sur un chemin à surface molle, au n.° 47 de notre *Théorie des affûts et des voitures d'artillerie*, 2.° édition. Il suffit de faire $\varphi = 0$ pour exprimer que l'effort q s'exerce horizontalement, $A = 0$ pour marquer que le chemin n'offre aucune résistance, et de remplacer α par 0,96, β par 0,4. On obtient ainsi

$$q = \frac{0{,}96rf'P}{R - 0{,}4rf'}.$$

MACHINES A VIS.

68. Nous étudierons sous ce titre les machines dans lesquelles le mouvement de traction est modifié par une vis. Pour quelques-unes, cet élément est même à la fois modificateur, communicateur et opérateur.

Il y a deux sortes de vis : celle dont le filet coupé par un plan diamétral donne un carré, et celle dont le filet coupé de la même manière donne un triangle équilatéral ou seulement isocèle. La première se nomme

vis à filet carré, et la seconde, *vis à filet triangulaire*. Dans l'une et dans l'autre, les creux ont la même forme et le même volume que les pleins; ainsi l'intérieur de l'écrou présente exactement une portion de la vis, dont on aurait évidé le noyau, c'est-à-dire le cylindre sur lequel s'enroule le filet. Cette portion doit contenir au moins trois spires, afin que l'engrenage ne permette aucune oscillation, et que la charge suffisamment disséminée ne cause pas un frottement capable de produire une usure rapide.

Le pas est, comme on sait, la hauteur dont s'élève une des hélices du filet dans une révolution complète autour du noyau. Il égale donc en général le produit fait avec le nombre des filets et la hauteur du creux, augmentée de celle du plein, prises toutes sur une même parallèle à l'axe. On donne effectivement plusieurs filets aux vis carrées qui, ayant besoin d'un grand pas, sont destinées à porter une forte charge : cette charge se trouve alors répartie sur une grande surface héliçoïde, sans que l'écrou ait une hauteur gênante, ou sans que le noyau soit d'un grand diamètre.

Il y a plusieurs manières d'employer les vis. Dans certaines machines, l'écrou est fixe; le moteur fait cheminer la vis en agissant circulairement sur un levier implanté dans la tête et perpendiculaire à l'axe : tel est le cas des vis de pointage. Dans d'autres machines, c'est la vis qui est fixe; le moteur fait cheminer l'écrou en agissant circulairement sur un levier engagé dans une mortaise de cette partie. Une sorte de presse présente une vis verticale qui n'a qu'un mouvement de rotation; le chariot de tour offre une vis horizontale qui se trouve dans le même cas. Toutes deux impriment à l'écrou un mouvement rectiligne, parce que des coulisses où il se trouve engagé l'empêchent de tourner. Enfin, quel-

ques machines, notamment celles qu'on emploie à la manœuvre des grilles de pont, dans les places de guerre, ont une vis qui, ne pouvant tourner, se meut en ligne droite, par suite du mouvement circulaire d'un écrou que la charge presse contre une plate-forme résistante.

VIS A FILET CARRÉ.

69. La vis à filet carré ou plus simplement la *vis carrée* est ordinairement en fer, ce qui permet au noyau de supporter une traction d'environ 6^{kg} par millimètre carré de sa section droite, sans rien perdre de son élasticité. L'expérience en effet a montré que l'adhérence du fer pour chaque millimètre carré fait équilibre à un poids de 6^{kg}. Si donc a représente le rayon du noyau mesuré en millimètres, et P la traction totale en kilogrammes que peut subir ce noyau sans se rompre, on a la relation $6^{kg}\pi a^2 = P$, pour déterminer l'une par l'autre les deux quantités a, P.

Afin que le frottement soit moindre, la vis carrée a ordinairement un écrou en bronze, alliage dont la résistance diffère peu de celle du fer. Le côté de la section diamétrale du filet égale la saillie sur le noyau, et lorsqu'il n'y a qu'un filet, le même côté vaut la moitié du pas; en outre, il existe une relation nécessaire entre chacune de ces trois choses et le rayon a.

Soient h le pas AC en millimètres (P. I, F. 23), s le nombre des millimètres carrés contenus dans le triple de la surface ABCDEFA par laquelle une spire du filet s'applique sur le noyau, et n le rapport qui doit exister entre la charge totale répartie sur les trois spires engagées dans l'écrou, et l'adhérence dans toute l'étendue de s. Cette adhérence sera exprimée par $6^{kg}\times s$, et la

charge ne pourra surpasser $6sn$. Mais, dans certains cas, c'est la traction exercée sur le noyau qui fait la charge du filet, et cette traction doit être au plus $6\pi a^2$. Il faut donc, pour que le filet et le noyau offrent la même résistance, qu'on ait $6sn = 6\pi a^2$ ou $sn = \pi a^2$.

Or, la surface ABCDEFA, ayant pour développement un parallélogramme dont la hauteur est FI perpendiculaire sur AB, vaut le produit de la spire ABC multipliée par FI, et si α désigne l'angle que forme la tangente au point A de la spire sur la tangente de la circonférence du noyau, $\mathrm{ABC} \times \mathrm{FI} = \frac{2\pi a}{\cos\alpha} \times \mathrm{AF}\cos\alpha = \frac{2\pi a}{\cos\alpha} \times \frac{h}{2}\cos\alpha = \pi a h$. Conséquemment, $s = 3\pi ah$, $3\pi a h n = \pi a^2$, et $h = \frac{a}{3n}$.

Il serait naturel d'admettre que l'adhérence sur s fût égale à la charge; mais comme cette charge peut, dans certains cas, agir sur le bord même du filet, et acquérir ainsi un bras de levier plus grand que a, celui de l'adhérence, il convient de faire $n = 1/2$ seulement. Alors $h = 2/3 a$, et la saillie du filet, ainsi que le côté du carré de la section droite, vaut $\frac{a}{3}$.

70. Établissons maintenant la relation de la puissance motrice Q et de la charge P d'une vis carrée. Nous considérerons d'abord le cas où la vis monte verticalement. Le moteur appliqué à une distance R de l'axe agit horizontalement et circulairement sur un levier implanté dans la tête de la vis, et l'écrou reste immobile.

La charge sera supposée concentrée en un seul point A de l'hélice moyenne AB du filet engagé dans l'écrou (P. I, F. 24), et comprendra le poids de la vis; r marquera la distance de ce point à l'axe. L'angle formé par l'horizontale et la tangente à l'hélice sera

représenté par α, h indiquera le pas, et f le coefficient du frottement produit par la pression perpendiculaire au plan incliné du filet.

Dans un tour complet, le moteur dépense une quantité d'action $2\pi RQ$, et celle qu'il transmet à la résistance principale est Ph.

La pression normale due au poids P égale $P\cos\alpha$. L'effort horizontal Q rapporté au point d'application de P devient $Q\frac{R}{r}$ et produit une pression normale $Q\frac{R}{r}\sin\alpha$.

Le frottement vaut donc $f\left(P\cos\alpha + Q\frac{R}{r}\sin\alpha\right)$. Mais il a lieu, dans un tour complet, sur toute la longueur d'une révolution de l'hélice moyenne. Cette longueur est l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les autres côtés sont le pas h et le développement $2\pi r$ de la circonférence qui contient A, le point d'application de P. Enfin, l'angle qui, dans ce triangle, est opposé au côté vertical h, égale α. Par conséquent, le chemin le long duquel s'exerce le frottement est $\frac{h}{\sin\alpha}$, et la quantité d'action consommée par cette résistance accessoire vaut

$$\frac{fh}{\sin\alpha}\left(P\cos\alpha + Q\frac{R}{r}\sin\alpha\right) = fh\left(\frac{P}{\tang\alpha} + Q\frac{R}{r}\right).$$

La relation cherchée est donc

$$2\pi RQ = Ph + fh\left(\frac{P}{\tang\alpha} + Q\frac{R}{r}\right) \text{ ou } Q = \frac{Ph\left(1 + \frac{f}{\tang\alpha}\right)}{2\pi R - \frac{R}{r}fh}$$

$$\text{ou } Q = \frac{Phr(\tang\alpha + f)}{R\tang\alpha(2\pi r - fh)}.$$

Comme $\tang\alpha = \frac{h}{2\pi r}$, la valeur de Q peut aussi prendre la forme $Q = \frac{Pr(h + 2\pi rf)}{R(2\pi r - fh)}$.

Mais (69) le rayon du noyau $a = {}^3/_2 h$; celui du cy-

lindre sur lequel se trouve l'hélice la plus éloignée de l'axe vaut a, plus la saillie du filet, ou $a+\frac{h}{2}={}^3\!/_2 h+\frac{h}{2}=2h$. Donc le rayon de la surface cylindrique qui contient l'hélice moyenne, $r=\frac{{}^3\!/_2 h+2h}{2}={}^7\!/_4 h$, et par suite, $Q=\frac{Ph(28+98\pi f)}{R(56\pi-16f)}$.

Enfin, parce que $f=0,1$ pour du bronze qui frotte sur du fer couvert d'un enduit de suif renouvelé, $Q=0,337\frac{Ph}{R}$.

Or, sans le frottement, on aurait seulement $2\pi RQ'=Ph$, et $Q'=\frac{Ph}{2\pi r}=0,159\frac{Ph}{R}$. La résistance accessoire augmente donc la puissance de

$$Q-Q'=0,178\frac{Ph}{R};$$

elle la porte à un peu plus du double de ce qu'elle serait pour une vis sans frottement.

Il en est de même pour les quantités d'action : celle qui se consomme dans un tour, $2\pi RQ=0,337\,Ph\times 2\pi=2,117\,Ph$, c'est-à-dire qu'elle surpasse de $0,117$ le double de celle qui est produite. Ainsi, le frottement absorbe par tour une quantité d'action égale à $1,117\,Ph$.

71. Si nous appliquons cette théorie à la vis de pointage des affûts de siége, de place et de côte, dont l'écrou est aussi en bronze, il faut poser $R=0^m,16$, $r=0^m,024$, $h=0^m,012$, $f=0,168$, à cause du cambouis, et nous servir de la troisième valeur de Q. La dernière ne peut convenir, parce que r surpasse un peu les ${}^7\!/_4$ de h. Nous aurons donc

$$Q=\frac{P\times 0^m,024(0^m,012+2\times 3,1416\times 0^m,024\times 0,168)}{0^m,16(2\times 3,1416\times 0^m,024-0,168\times 0^m,012)}=0,038\,P.$$

Sans le frottement, nous trouverions

$$Q' = 0{,}159\,P \times \frac{0^m{,}012}{0^m{,}16} = 0{,}012\,P.$$

Ainsi, dans cette vis de pointage, le frottement triple la puissance.

Complétons l'application, en supposant une pièce de 24 chargée. Le fardeau P se compose de l'excès du poids de la culasse sur celui de la volée, excès qu'on peut estimer à 120^{kg}; du poids de la vis qui est d'environ 10^{kg}, et du frottement des tourillons rapporté à la plate-bande de culasse. Or, la pression des tourillons sur leurs encastrements peut être évaluée à 2680^{kg}; le coefficient du frottement que produit le bronze glissant sur le fer, sans enduit, est 0,161 ; l'intensité du frottement qui a lieu à l'extrémité du rayon des tourillons égale $2680^{kg} \times 0{,}161$; ce rayon a pour longueur $0^m{,}07369$; la distance de l'axe des tourillons au dernier cercle de la plate-bande est $1^m{,}312$; conséquemment la 3.e partie de P vaut $2680^{kg} \times 0{,}161 \times \frac{0^m{,}07369}{1^m{,}312} = 24^{kg}{,}23$; $P = 120^{kg} + 10^{kg} + 24^{kg}{,}23 = 154^{kg}{,}23$, et $Q = 0{,}038 \times 154^{kg}{,}23 = 5^{kg}{,}86$. La main du pointeur est donc obligée d'exercer sur les branches de la manivelle un effort de 5 à 6 kilogrammes, quand il s'agit d'élever la culasse.

72. Dans le cas où le moteur, agissant comme précédemment, fait descendre la vis chargée d'un poids, la quantité d'action Ph s'ajoute à $2\pi RQ$ pour produire le travail mécanique de la résistance, et cette résistance n'est plus que le frottement. Mais le frottement se trouve lui-même modifié : la pression $P\cos\alpha$ est diminuée par la composante $Q\frac{R}{r}\sin\alpha$ dirigée en sens inverse (P.I, F.25), et la pression réelle égale seulement $P\cos\alpha - Q\frac{R}{r}\sin\alpha$.

On doit donc avoir

$$2\pi RQ + Ph = fh\left(\frac{P}{\tang\alpha} - Q\frac{R}{r}\right),$$ et par suite,

$$Q = \frac{Phr(f - \tang\alpha)}{R\tang\alpha\,(2\pi r + fh)}.$$

Remarquez que nous serions arrivés immédiatement à cette relation, en faisant, dans la deuxième des valeurs de Q relatives à l'ascension, Q et f négatifs, pour tenir compte du changement de direction de la puissance et du frottement.

L'effort nécessaire à la descente peut, à cause de $\tang\alpha = \frac{h}{2\pi r}$, prendre la forme

$Q = \frac{Pr(2\pi rf - h)}{R(2\pi r + fh)}$; substituant pour r sa valeur $^7/_4 h$,

on obtient $\quad Q = \frac{Ph(98\pi f - 28)}{R(56\pi + 16f)}$.

Remplaçant enfin f par 0,1 et π par 3,1416, on a $Q = 0{,}016\,\frac{Ph}{R}$.

Donc, la quantité d'action à consommer pour une descente, $2\pi RQ = 0{,}016\,Ph \times 2\pi = 0{,}1\,Ph$. Elle est due uniquement au frottement, et forme la perte occasionnée par la machine, puisque P pourrait descendre sous l'action de la pesanteur.

Or, nous avons trouvé pour l'ascension une dépense égale à 2,117 Ph. Si donc la vis doit monter et descendre avec la même charge, sa manœuvre complète exigera chaque fois une quantité d'action de 2,217 Ph.

Il est à observer que Q deviendrait nul et que la vis descendrait d'elle-même uniformément, si l'on avait $\tang\alpha = f$, c'est-à-dire si α était ce qu'on appelle l'angle du frottement (9). Conséquemment, l'emploi d'une vis dans laquelle $\tang\alpha$ vaudrait 0,1, économiserait la dépense 0,1 Ph, et la manœuvre complète exigerait chaque fois 2,117 Ph seulement.

Mais lorsqu'on a $\tang\alpha < f$, il faut un effort Q pour aider la vis à descendre. Quand, au contraire, la machine rend $\tang\alpha > f$, Q prend une valeur négative; ce qui indique que le moteur doit agir comme dans l'ascension, pour empêcher la descente de s'accélérer.

73. Si l'écrou marche sur la vis, en glissant dans deux coulisses, le frottement qu'il y éprouve a pour seule cause l'opposition de ces coulisses à la rotation, puisque, sans elles, l'écrou ne ferait que tourner avec le noyau. Comme une telle résistance est une réaction contre l'effort Q appliqué à une distance R de l'axe et perpendiculairement à cet axe, il en résulte sur les coulisses une pression normale $Q\frac{R}{k}$, k désignant la distance de son point d'application à l'axe du noyau. Cette pression produit un frottement parallèle au même axe, dont l'intensité est $Q\frac{Rf'}{k}$, qui s'oppose, comme la charge, au mouvement de l'écrou, et qu'on doit conséquemment ajouter à P.

Mais, quand l'écrou se meut en ligne droite, la vis ne fait que tourner sur deux tourillons, ou sur un tourillon et un pivot, selon qu'elle est horizontale ou verticale. Considérons le second cas, et nommons p le poids de la vis, ρ le moindre rayon du pivot.

Le frottement de ce support sera $f''\left(P+Q\frac{Rf'}{k}+p\right)$, s'exercera en un point situé à $^2/_3\,\rho$ de l'axe (32), et consommera, par tour, une quantité d'action

$$^4/_3\,\pi\rho f''\left(P+Q\frac{Rf'}{k}+p\right).$$

Si le tourillon est le noyau même, il a a pour rayon, et comme l'effort horizontal Q le presse seul contre le

collier, il éprouve un frottement horizontal qui absorbe, par tour, une quantité d'action $2\pi a f''' Q$.

D'ailleurs, le frottement des filets en contact étant produit par $P + Q\frac{Rf'}{k}$ et par Q, dépense à chaque tour, d'aprés ce que nous avons vu (70), une quantité d'action $\left(P\cos\alpha + Q\frac{Rf'}{k}\cos\alpha + Q\frac{R}{r}\sin\alpha\right)\frac{fh}{\sin\alpha}$

$$=\left(\frac{P}{\tang\alpha}+\frac{QRf'}{k\tang\alpha}+Q\frac{R}{r}\right)fh=\left(2\pi rP+\frac{2\pi Rrf'Q}{k}+Q\frac{Rh}{r}\right)f,$$

puisque $\tang\alpha=\frac{h}{2\pi r}$.

Enfin, la résistance principale P, le poids de l'écrou compris, jointe au frottement vertical des coulisses, exige, par tour, une quantité d'action $Ph + \frac{QRf'h}{k}$, et celle que peut produire la puissance, dans le même temps, est $2\pi RQ$.

On doit donc avoir

$$2\pi RQ = Ph + Q\frac{Rf'h}{k} + 2\pi rfP + Q\frac{2\pi Rrff'}{k} + Q\frac{Rhf}{r}$$
$$+ \tfrac{4}{3}\pi\rho f''P + \tfrac{4}{3}\pi\frac{R\rho f'f''}{k}Q + \tfrac{4}{3}\pi\rho f''p + 2\pi af'''Q,$$

ou $$Q = \frac{P(h+2\pi rf+\tfrac{4}{3}\pi\rho f'') + \tfrac{4}{3}\pi\rho f''p}{\frac{R}{r}(2\pi r - fh) - \frac{Rf'}{k}(h+2\pi rf+\tfrac{4}{3}\pi\rho f'') - 2\pi af'''}.$$

Rapprochant cette formule de celle qui a été trouvée (70) pour l'ascension de la vis dans un écrou fixe, nous voyons que la première a un numérateur supérieur à celui de la seconde et un dénominateur inférieur, ce qui prouve qu'il y a désavantage pour le moteur à faire monter l'écrou en agissant sur la vis.

74. Etudions finalement le cas où la puissance fait tourner l'écrou sur une plate-forme, pour imprimer au noyau un mouvement rectiligne et le faire ainsi monter chargé

d'un fardeau. Il faut alors que ce fardeau ou la tête de la vis glisse dans des coulisses qui empêchent cette vis de tourner. De là un frottement vertical $\frac{QRf'}{k}$, comme dans le cas précédent. La quantité d'action consommée, dans un tour, par celui des filets sera donc aussi $\left(2\pi r P+\frac{2\pi R r f' Q}{k}+\frac{QRh}{r}\right)f$, le poids de la vis étant compris dans P.

L'écrou frotte sur un anneau de fer encastré dans la plate-forme et un peu saillant. La pression qu'il exerce se compose de son poids p', de P et de $\frac{QRf'}{k}$. Si donc le rayon moyen de l'anneau est b, le second frottement dépensera, dans un tour, une quantité d'action

$$2\pi b f_1\left(P+\frac{QRf'}{k}+p'\right),$$

et l'on devra poser

$$2\pi RQ=Ph+Q\frac{Rf'h}{k}+2\pi r f P+\frac{2\pi R r f f' Q}{k}+\frac{QRhf}{r}$$
$$+2\pi b f_1 P+\frac{2\pi R b f' f_1 Q}{k}+2\pi b f_1 p',$$

ce qui donnera

$$Q=\frac{P(h+2\pi r f+2\pi b f_1)+2\pi b f_1 p'}{\frac{R}{r}(2\pi r-fh)-\frac{Rf'}{k}(h+2\pi r f+2\pi b f_1)}.$$

Ainsi, la rotation de l'écrou est aussi plus défavorable au moteur que son ascension le long d'une vis fixe, ou que l'ascension de la vis dans un écrou fixe.

75. Toutes les fois que la puissance n'est pas symétriquement répartie autour de l'axe d'une vis, le noyau est poussé horizontalement contre l'écrou, ou l'écrou contre le noyau, et de là résulte que la face cylindrique des filets engagés frotte contre la face cylindrique des creux correspondants. Mais l'effort nécessaire pour dé-

truire un tel frottement est toujours très-faible, et c'est pour cela que nous ne l'avons point fait figurer dans nos formules. En effet, supposons que la puissance agissant au milieu de l'écrou soit appliquée à une seule barre, comme dans les divers cas que nous venons d'examiner. C'est là évidemment la circonstance qui donne le plus d'intensité au frottement dont il s'agit. La pression qui le produira sera Q; il aura pour valeur $f_2 Q$, et si r' est le rayon de la surface cylindrique des filets, la résistance $f_2 Q$ exigera un effort $f_2 Q \frac{r'}{R}$ à l'extrémité de la barre. Soient $r' = 0^m,08$ comme dans les plus grosses vis en bois, $f_2 = 0,15$, et $R = 1^m,5$. On aura $f_2 Q \frac{r'}{R} = \frac{0,08}{1,5} \times 0,15\,Q = 0,008\,Q$. Or, il faudrait que Q fût de 125^{kg} pour que ses 0,008 formassent un kilogramme; l'effort de 125^{kg} suppose une dixaine d'hommes appliqués à l'extrémité de la barre, et l'on sait que jamais un pareil nombre de manœuvres n'agissent sur le même levier.

VIS A FILET TRIANGULAIRE.

76. Les grandes vis n'ont un filet triangulaire que dans le cas où elles sont en bois. Le filet carré ne tiendrait pas alors au noyau par une assez grande surface pour résister à l'action de la charge. Si le bois est d'une médiocre dureté, comme le chêne, l'orme, etc., le profil du filet est un triangle isocèle, ordinairement rectangle; mais si la vis est faite d'un bois très-dur, tel que le charme, le sorbier, le cormier, etc., on fait le profil en triangle équilatéral, et il en est de même pour les vis triangulaires métalliques, parce que, dans ces deux cas, l'arête extérieure du filet n'est pas autant exposée à être détruite par la pression.

Lorsque la charge doit être forte, le triangle, quelle que soit sa forme, a pour hauteur le tiers de BC, rayon du noyau (P. I, F. 26), et cette hauteur forme la saillie AB du filet (69). Quant au rayon BC ou a, on le détermine en millimètres par la relation $0^{kg},8\pi a^2=P$, attendu que la résistance du bois ne peut guère être évaluée à plus de $0^{kg},8$ par millimètre carré.

Le pas AD égale la base EF du profil triangulaire, puisque DE est parallèle à AF. Si donc AEF se trouve équilatéral, $AE=EF=h$, et $AB=\sqrt{h^2-\frac{h^2}{4}}$ $=\sqrt{3/4 h^2}=h\sqrt{0,75}=0,866\,h$. Il s'ensuit qu'ayant fixé le pas, on peut déterminer le rayon du noyau par l'équation $a=3AB=0,866\,h\times 3=2,598\,h$; ou bien qu'ayant déduit de la charge la valeur de a, on trouve le pas par l'équation $h=\frac{a}{2,598}$. Si AEF est isocèle et rectangle, $BE=AB$, et $h=2AB=2/3 a=\frac{a}{1,5}$, comme dans la vis à filet carré.

77. La relation de la puissance et de la résistance est, dans la vis triangulaire, la même que dans la vis carrée, sauf une modification qu'il faut faire au frottement. On trouve effectivement pour les quantités d'action relatives à la première machine, les mêmes formes d'expressions que pour celles de la seconde; de sorte qu'on est encore conduit à l'équation $Q=\frac{Pr(h+2\pi rf)}{R(2\pi r-fh)}$, dans laquelle seulement la pression normale n'a plus la même intensité.

Pour découvrir la modification qui rend la valeur de Q spécialement convenable à la vis triangulaire, nous mettrons cette valeur sous une autre forme. Multipliée et divisée d'abord par 2π, elle devient

$Q = \frac{2\pi r P h + 4\pi^2 r^2 f P}{2\pi R(2\pi r - f h)}$. Retranchant et ajoutant ensuite au numérateur la quantité fPh^2, on a

$$Q = \frac{2\pi r P h - fPh^2 + fPh^2 + \pi 4^2 r^2 f P}{2\pi R(2\pi r - f h)}$$

$$= \frac{(2\pi r - fh)Ph + fP(h^2 + 4\pi^2 r^2)}{2\pi R(2\pi r - fh)} = \frac{Ph}{2\pi R} + \frac{fP(h^2 + 4\pi^2 r^2)}{2\pi R(2\pi r - fh)}.$$

Ainsi, comme il était facile de le conclure à priori des considérations sur lesquelles repose la formule de la vis carrée, la valeur de l'effort perpendiculaire à l'axe, ou horizontal, si l'on veut, se compose de deux parties : l'une, $q = \frac{Ph}{2\pi r}$, est l'effort qui suffirait pour faire monter la charge P le long du plan incliné de l'hélice moyenne, s'il n'y avait pas de frottement ; l'autre, $q' = \frac{fP(h^2 + 4\pi^2 r^2)}{2\pi R(2\pi r - fh)}$, est l'effort que cette résistance accessoire exige du moteur, et peut prendre la forme $q' = kP$.

Maintenant nommons P' la pression qui, dans la vis triangulaire, est perpendiculaire à la génératrice droite AC du filet (P. I, F. 27), comme P l'est à celle AB du filet de la vis carrée. Les pressions normales aux deux surfaces héliçoïdes seront $P \cos \varphi$, $P' \cos \varphi'$, si φ, φ' désignent les angles formés par les normales et les directions de P, P'. On aura pour expressions des frottements les mêmes fonctions de $P \cos \varphi$, $P' \cos \varphi'$, et par conséquent, les valeurs des efforts horizontaux q', q'', capables de détruire ces frottements, seront les mêmes fonctions de P, P'; d'où il suit que $q'' = kP'$.

Or l'écrou empêche le poids P de glisser sur le plan incliné CA, comme ferait un effort horizontal X appliqué en D, et P' est la résultante de P et de X. Par conséquent, $P = P' \cos EDF = P' \cos BAC = P' \sin \beta$,

et $P' = \frac{P}{\sin\beta}$, ce qui montre que, pour rendre applicable à la vis triangulaire la troisième des valeurs de Q relatives à la vis carrée, il suffit d'y remplacer P dans le second terme par $\frac{P}{\sin\beta}$, ou de diviser ce terme par $\sin\beta$.

Il vient ainsi $Q = \frac{Ph}{2\pi R} + \frac{fP(h^2+4\pi^2r^2)}{2\pi R \sin\beta\,(2\pi r - fh)}$, puis

$$Q = \frac{P[h \sin\beta\,(2\pi r - fh) + f(h^2+4\pi^2r^2)]}{2\pi R \sin\beta\,(2\pi r - fh)}.$$

78. Nous prendrons pour données d'application celles des vis en chêne qui servent à élever les grilles du pont des Pucelles à Metz. Le rayon moyen du filet triangulaire, $r = 0^m,1025$, $R = 1^m,5$, $h = 0^m,16$, $f = 0,143$, parce que l'écrou est aussi en chêne, et que les surfaces en contact sont seulement onctueuses; enfin $\sin\beta = 0,6643$, rapport de la saillie à l'un des deux côtés égaux du triangle isocèle formé par le profil du filet. Il en résulte, si on laisse de côté le frottement des grilles dans leurs coulisses,

$$Q = P\,\frac{0^m,16 \times 0,6643\,(2 \times 3,1416 \times 0^m,1025 - 0,143 \times 0^m,16) + 0,143[(0^m,16)^2 + 4(3,1416)^2(0^m,1025)^2]}{2 \times 3,1416 \times 1^m,5 \times 0,6643\,(2 \times 3,1416 \times 0^m,1025 - 0,143 \times 0^m,16)}$$

$= 0,0332\,P.$

Sans le frottement, on aurait

$$Q' = \frac{Ph}{2\pi R} = P\,\frac{0^m,16}{2 \times 3,1416 \times 1^m,5} = 0,017\,P.$$

La machine consomme donc $Q - Q' = 0,0162\,P$, double l'effort qu'exigerait la charge, et produit le même effet sur la quantité d'action, qui varie comme l'effort, quand le chemin reste le même.

79. Etudions enfin le cas où la vis triangulaire, tournant dans un collier et sur un pivot, fait monter l'écrou

chargé le long de coulisses qui l'empêchent d'obéir au mouvement de rotation.

La résistance principale P, dans laquelle sont compris le fardeau et le poids de l'écrou, consomme une quantité d'action Ph, à chaque tour de la vis.

Le frottement vertical des coulisses (73) est produit par la pression horizontale $\frac{QR}{k}$, et dépense, par tour, une quantité d'action $\frac{QRf'h}{k}$.

Le même frottement s'ajoute à P pour engendrer le frottement du filet, et puisque ce dernier, quand P agit seul, exige, par tour (77), une quantité d'action $\frac{fP(h^2+4\pi^2r^2)}{\sin\beta(2\pi r-fh)}$, il en absorbe une égale à $\frac{\left(fP+\frac{QRff'}{k}\right)(h^2+4\pi^2r^2)}{\sin\beta(2\pi r-fh)}$, lorsque la pression verticale est $P+\frac{QRf'}{k}$.

Le frottement sur le fond de la crapaudine est causé par la pression $P+\frac{QRf'}{k}+p$, p étant le poids de la vis. Si donc ρ est le rayon du cercle qui limite le contact du fond de la crapaudine et du pivot, le frottement dont il s'agit demandera, par tour, une quantité d'action $\frac{4}{3}\pi\rho f''\left(P+\frac{QRf'}{k}+p\right)$.

Passant aux frottements latéraux des appuis, nous supposerons que le collier embrasse tout le noyau, qui a pour rayon a, et nous désignerons par ρ' le rayon de la paroi latérale de la crapaudine, par l la distance du milieu A de cette paroi au milieu B du collier (P. I, F. 28), par l' la distance du premier point au centre de gravité C de la vis, et par h' la distance de ce centre à l'axe de la barre sur laquelle agit le moteur. L'effort Q transporté

à l'axe de la vis, parallèlement à lui-même, produit sur le collier une pression $Q\frac{l'-h'}{l}$, et sur la paroi latérale de la crapaudine une pression $Q\frac{l-l'+h'}{l}$. Le frottement dû à la première demande donc une quantité d'action $2\pi a f''' Q\frac{l'-h'}{l}$, et celui qui résulte de la seconde veut une quantité d'action $2\pi\rho' f_1 Q\frac{l-l'+h'}{l}$.

Conséquemment,

$$2\pi RQ = Ph + \frac{QRf'h}{k} + \frac{\left(fP + \frac{QRff'}{k}\right)(h^2+4\pi^2r^2)}{\sin\beta\,(2\pi r - fh)}$$
$$+ {}^4/_3\pi\rho f''\left(P + \frac{QRf'}{k} + p\right) + 2\pi a f''' Q\frac{l'-h'}{l} + 2\pi\rho' f_1 Q\frac{l-l'+h'}{l}$$

$$\text{et } Q = \frac{P\left[(h + {}^4/_3\pi\rho f'')\sin\beta\,(2\pi r - fh) + f(h^2+4\pi^2r^2)\right] + {}^4/_3\pi\rho f'' p \sin\beta\,(2\pi r - fh)}{\left(2\pi R - \frac{Rf'h}{k} - {}^4/_3\frac{\pi R\rho f' f''}{k} - 2\pi a f'''\frac{l'-h'}{l} - 2\pi\rho' f_1\frac{l-l'+h'}{l}\right)\sin\beta(2\pi r - fh) - \frac{Rff'}{k}(h^2+4\pi^2r^2)}.$$

80. Appliquons cette formule à la vis triangulaire du pont des Pucelles, en supposant la grille portée par l'écrou. Nous aurons, comme dans l'application précédente, $R = 1^m,5$, $r = 0^m,1025$, $h = 0^m,16$, $f = 0,143$, $\sin\beta = 0,6643$, $a = 0^m,08$; d'ailleurs $k = 0^m,75$, et si de plus nous posons $\rho = 0^m,02$, $\rho' = 0^m,04$, $l = 3^m$, $l' = 1^m,5$, $h' = 0^m,5$, $f' = 0,38$, frottement du chêne sur la pierre, $f'' = 0,18$, frottement du pivot de fer sur le bronze un peu onctueux, $f''' = 0,15$, frottement du charme sur lui-même quand il est onctueux, $f_1 = 0,16$, frottement du bronze sur le fer, nous trouverons

$$Q = \frac{\begin{array}{c} P[(0^m,16 + {}^1/_3\, 3,1416 \times 0^m,02 \times 0,18)\, 0,6643\, (2 \times 3,1416 \\ \times 0^m,1025 - 0,143 \times 0^m,16) + 0,143 \{(0^m,16)^2 + 4(3,1416)^2 \\ (0^m,1025)^2\}] + {}^1/_3 3,1416 \times 0^m,02 \times 0,18\, p\, 0,6643 (2 \times 3,1416 \\ \times 0^m,1025 - 0,143 \times 0^m,16) \end{array}}{\begin{array}{c} 2 \times 3,1416 \times 1^m,5 - \dfrac{1^m,5 \times 0,38 \times 0^m,16}{0^m,75} \\ - {}^1/_3 \dfrac{3,1416 \times 1^m,5 \times 0^m,02 \times 0,38 \times 0,18}{0^m,75} - 2 \times 3,1416 \\ \times 0,15\, {}^1/_3\, 0^m,08 - 2 \times 3,1416 \times 0^m,04 \\ \times 0,16\, {}^2/_3\, 0,6643\, (2 \times 3,1416 \times 0^m,1025 - 0,143 \times 0^m,16) \\ - \dfrac{1^m,5 \times 0,143 \times 0,38}{0^m,75} \{(0^m,16)^2 + 4(3,1416)^2 \times (0^m,1025)^2\} \end{array}}$$

$$\text{et } Q = \frac{0,135\, P + 0,006\, p}{3,72} = 0,0363\, P + 0,0016\, p.$$

Les frottements des coulisses et des appuis consomment donc (78) une force égale à $0,0031\, P + 0,0016\, p$.

PRESSES A VIS.

81. La vis triangulaire en bois est employée dans plusieurs sortes de presses; mais ces machines, quoique diversement composées ou établies, ont tant d'analogie sous le rapport mécanique, qu'il suffit d'en étudier une seule. Nous choisirons celle des salles d'artifice.

La matière à comprimer est placée entre deux plateaux horizontaux. L'inférieur A, qui est fixe (P. I, F. 29), a deux trous cylindriques propres à recevoir, comme colliers, les noyaux de deux vis triangulaires verticales. Le plateau supérieur B porte les écrous C qui font corps avec lui. Lorsqu'on fait tourner les vis de droite à gauche, les écrous, que leur liaison au plateau B empêche de suivre le mouvement de rotation, descendent

verticalement, et forçant le plateau supérieur à se rapprocher de l'inférieur, font subir une compression à la masse D. Quand on fait tourner les vis en sens contraire, les écrous remontent simultanément, et la pression cesse.

82. Il est visible que la résistance opposée par le corps D à la descente du plateau supérieur B forme pour l'écrou la charge précédemment désignée par P. La relation qui existe entre cette force et la somme Q des efforts exercés horizontalement sur les vis est donc (77), pendant le mouvement,

$$Q = \frac{Ph}{2\pi R} + \frac{fP(h^2 + 4\pi^2 r^2)}{2\pi R \sin\beta\,(2\pi r - fh)}.$$

Mais, si l'on veut considérer seulement la pression qui a lieu sur la masse D à un instant quelconque, c'est-à-dire au moment où le plateau supérieur est descendu d'une hauteur h, il est clair qu'on doit supprimer Ph, quantité d'action dépensée pour opérer la descente, abstraction faite du frottement. La relation entre l'effort Q et la pression P est donc alors simplement

$$Q = \frac{fP(h^2 + 4\pi^2 r^2)}{2\pi R \sin\beta\,(2\pi r - fh)}.$$

Elle fait connaître l'effort $\frac{Q}{2}$ à exercer sur chaque vis pour produire une pression déterminée P, et l'on a

$$P = \frac{2\pi RQ \sin\beta\,(2\pi r - fh)}{f(h^2 + 4\pi^2 r^2)}$$ pour

trouver la pression qui résultera d'un effort connu $\frac{Q}{2}$.

MISE EN MOUVEMENT DES MACHINES A TRACTION.

83. Pour toutes les machines étudiées jusqu'à présent, nous avons constamment estimé les quantités d'action au moyen du produit de l'effort exercé et du chemin

parcouru. Le mouvement a donc toujours été supposé uniforme, et par conséquent, les relations établies entre la puissance et les résistances sont seulement relatives au cas où il ne s'agit plus que d'entretenir la vitesse; elles ne s'appliquent point à celui où il faut engendrer cette vitesse; car évidemment le moteur ne parviendrait pas à mettre en mouvement le point d'application de la résistance principale, s'il se bornait à exercer l'effort qui ferait équilibre à toutes les résistances une fois que la vitesse ne changerait plus.

Pour tirer une machine du repos, il faut d'abord vaincre l'inertie des masses, détruire l'adhérence des surfaces en contact, faire fléchir les pièces élastiques et tendre les cordes ou les courroies; c'est seulement ensuite qu'on est obligé de surmonter la raideur de ces cordes et les divers frottements. La vitesse croît alors graduellement; mais un temps fini est nécessaire pour la rendre ce qu'elle doit être, c'est-à-dire pour que celle du point où s'applique le moteur soit précisément égale à celle que peut conserver ce moteur pendant toute la durée du travail.

Toutefois, l'excès de la quantité d'action qu'exige la mise en mouvement, sur celle qui convient à l'entretien de la vitesse, n'est pas assez grand, dans les machines à traction, pour qu'on doive compliquer les formules à l'effet d'y avoir égard, et cela vient de ce que la marche du moteur est toujours fort lente.

Supposons qu'il s'agisse d'élever un poids de 2000^{kg} avec une vitesse de $0^{m},1$. Il faudra produire, par seconde, une quantité d'action de 200^{k}, ou plus de 22 fois aussi grande que celle de 9^{k} dont est capable un homme qui agit sur une roue à chevilles. Notre hypothèse est donc fort exagérée, car aucune des machines précédentes n'exige 22 hommes, à beaucoup

près. Cependant nous allons voir que la mise en mouvement ne consommerait alors qu'une quantité d'action pour ainsi dire insignifiante.

En effet, pour qu'une masse m acquière une vitesse v, il faut dépenser sur cette masse une quantité d'action égale à $\frac{mv^2}{2}$, moitié de la force-vive qu'il s'agit d'imprimer; et puisqu'il existe la relation $m = \frac{p}{g}$ entre la masse et le poids, $\frac{mv^2}{2} = \frac{pv^2}{2g}$. Appliquant cette formule à notre hypothèse, nous trouverons

$$\frac{pv^2}{2g} = \frac{2000^k(0^m,1)^2}{2 \times 9^m,81} = \frac{20^k}{19,62} = 1^k,019.$$

Quant aux parties de la machine qui entrent en mouvement, la quantité d'action qu'elles absorbent pour acquérir une vitesse uniforme peut être négligée dans la pratique, tout aussi bien que celle qui a rapport à la résistance principale. On s'en assurerait facilement, en calculant la force-vive de chacune de ces parties, pour une vitesse ordinaire.

En conséquence, nous pouvons dire que, pour produire le mouvement uniforme dans une machine à traction, l'homme-moteur sera seulement obligé d'exercer le long d'un très-court chemin un effort un peu plus grand que celui qui résulte des formules.

MACHINES A CHOC.

MARTEAUX.

84. De toutes les machines qui servent à produire des chocs, la plus fréquemment employée est le *marteau à main*. Il se compose d'une *tête* métallique A (P. I, F. 28) et d'un manche de bois B; la tête présente à sa partie

inférieure un prisme carré dont le dessous se nomme *panne*, et à sa partie supérieure un tronc de pyramide quadrangulaire : trois des faces latérales de ce tronc sont chacune dans le même plan que la face correspondante du prisme ; mais la quatrième est inclinée sur la panne, et se nomme le *biseau*.

Il convient de montrer que la forme donnée au marteau n'est point arbitraire, ou qu'il y a nécessité de faire un biseau. Nous remarquerons d'abord que les divers points du système suivent, pendant le mouvement, des courbes dont la nature dépend du jeu de la main ; mais on s'écartera bien peu de la vérité en confondant ces courbes, vers le moment du choc, avec des arcs de cercle dont les centres soient sur une droite menée par un point C de l'extrémité du manche, perpendiculairement au plan du mouvement. Dans cette hypothèse, le marteau devient un corps assujéti à tourner autour d'un axe fixe C.

Nommons m la masse totale du système, ρ la distance d'un élément $\mathrm{d}m$ à l'axe, ω la vitesse angulaire, c'est-à-dire le chemin circulaire qui, au moment du choc, pourrait être parcouru en $1''$ par tout point pour lequel $\rho = 1$. La vitesse propre de la masse élémentaire $\mathrm{d}m$ sera $\rho\omega$; cette masse se trouvera animée d'une quantité de mouvement $\rho\omega\,\mathrm{d}m$ dont le moment par rapport à l'axe C vaudra $\rho^2\omega\,\mathrm{d}m$, et nous aurons $\omega\int\rho^2\mathrm{d}m$ pour le moment de l'effort total du marteau.

La quantité de mouvement que possède m doit être entièrement consommée par le choc, pour qu'il n'y ait aucune réaction sur l'axe ou sur la main. Or il n'en serait pas ainsi dans le cas où la percussion se ferait au point D, intersection de la panne et de la perpendiculaire abaissée du centre de gravité G. La partie du marteau située à droite du plan vertical DG possédant



une vitesse plus grande que la partie située à gauche, qui a même masse, aurait un excès de quantité de mouvement en vertu duquel le système tendrait à tourner autour de D et de gauche à droite.

C'est donc par un autre point E de la panne qu'il faut frapper. Afin d'en déterminer la position, ou plutôt celle du point P, intersection de CG perpendiculaire à l'axe et de EP parallèle à DG, nous désignerons par m' la masse qui, condensée en P, produirait le même effet que m, par r' la distance CP, et par r la distance CG. La masse m' aura, au moment du choc, une vitesse $r'\omega$ et une quantité de mouvement $m'r'\omega$ dont le moment par rapport à l'arc C sera $m'r'^2\omega$. Comme elle doit produire la même percussion que m, $m'r'^2\omega = \omega\int\rho^2 dm$, et $m'r'^2 = \int\rho^2 dm$.

Mais, quand le point P est pris arbitrairement, le système devient un levier soumis à l'action de forces parallèles, et la force $m'r'\omega$, dirigée de P vers E, égale la résultante de la quantité de mouvement $mr\omega$ appliquée en G, et d'un effort q que l'axe doit supporter de bas en haut, parallèlement à GD; car on sait que la quantité de mouvement $\int\rho\omega dm = mr\omega$. Généralement donc $m'r'\omega = mr\omega - q$, et nous exprimerons, en faisant $q = 0$, que le choc effectué au point E ne cause aucune réaction de l'axe sur la main, ou qu'il arrête entièrement la rotation du marteau. Ainsi, la condition de ce fait est $m'r'\omega = mr\omega$, ou $m'r'^2 = mrr'$. Par conséquent, $mrr' = \int\rho^2 dm$, et l'on a l'équation $r' = \frac{\int\rho^2 dm}{mr}$ pour déterminer le *centre de percussion* P, c'est-à-dire le point de la droite CG auquel correspond le point E de la panne qui doit opérer le choc, pour que toutes les parties du marteau soient simultanément arrêtées, ou pour que le manche n'exerce en C aucune réaction sur la main.

La quantité $\int \rho^2 dm$ est le moment d'inertie du marteau par rapport à l'axe C. Or, on sait que ce moment vaut mr^2, plus le moment d'inertie relatif à un axe qui serait parallèle au précédent et contiendrait le centre de gravité G. Ainsi, toujours r' surpasse $\frac{mr^2}{mr}$ ou r, et il est démontré que la distance du centre de percussion à l'axe excède celle du centre de gravité, comme il était aisé de le prévoir d'après ce qui a été dit plus haut.

Nous devons en conclure que si la tête du marteau était entièrement prismatique, le point E se trouverait fort rapproché du bord antérieur F de la panne, car le centre de gravité serait alors presque en P, dans le plan milieu du prisme, puisque la masse du manche est peu de chose en comparaison de celle de la tête. Or, il importe que le centre de percussion soit très-peu distant de P, pour qu'on puisse frapper par le centre de la panne; autrement, le maniement de la machine exigerait trop de dextérité. Il faut donc placer le centre de gravité entre le plan milieu PE et la face postérieure HI, et c'est évidemment à quoi l'on parvient en enlevant par un biseau une portion de la partie supérieure du prisme.

Ainsi, la forme donnée aux marteaux à main permet au moteur de frapper par le centre de la panne ou à peu près, sans exposer son bras à ressentir aucun contre-coup.

85. Lorsque le choc doit être puissant, c'est-à-dire lorsque, pour l'exercer, il faut produire une grande quantité d'action, on emploie un marteau lourd et à long manche, qu'on fait mouvoir en se servant à la fois des deux mains. Si au contraire un faible choc suffit, on fait usage d'un marteau léger, à manche court, qu'une seule main peut mettre en mouvement.

L'homme qui fait jouer le marteau à deux mains,

l'élève à une certaine hauteur h au-dessus de la surface horizontale à choquer, puis il le laisse retomber, en se bornant presque à le guider. Si donc le poids total du marteau est p, le choc résulte d'une quantité d'action qui vaut ph à fort peu près. Ce serait à la rigueur par la longueur de la courbe que décrit le centre de gravité, qu'il faudrait multiplier le poids p, pour obtenir le vrai travail du moteur ; mais évidemment il n'y a pas grande erreur à regarder cette courbe comme une droite verticale.

Quant à l'effet produit, on l'estime en prenant pour unité celui du choc d'un kilogramme tombé de 1 mètre, attendu que la pression qui produit une percussion agissant pendant un temps extrêmement court, il est impossible de la comparer à une pression ordinaire. Ainsi, l'on dit que l'effet d'un choc sur un corps vaut autant de fois celui d'un kilogramme tombé de 1^m, qu'il y a de kilogrammes-mètres dans la quantité d'action qui l'a produit ou dans celle qu'a dépensée le moteur; car il est clair que si cette dernière est ph, l'autre qui résulte de la chute du marteau vaut tout autant, si la pesanteur agit seule. Supposons que l'instrument pèse en tout 10^{kg}, et que son centre de gravité soit élevé à $0^m,66$. La quantité d'action produite par la chute sera de $6^k,6$ comme celle qu'aura dépensée le moteur, et le choc vaudra 6,6 fois celui d'un kilogramme tombé de 1^m.

La quantité d'action dépensée pour opérer un choc sur une surface horizontale, avec le marteau à une main, s'estimerait comme la précédente, si l'instrument ne devait sa vitesse finale qu'à la hauteur de chute. Mais ordinairement l'ouvrier accélère la descente du marteau, tout en le guidant, et il est à peu près impossible d'apprécier l'augmentation de vitesse qui en résulte. Si pourtant on parvenait à connaître, au moins

approximativement, la vitesse finale v, la force-vive du marteau à l'instant du choc serait $\frac{pv^2}{g}$, et la quantité d'action consommée sur la surface vaudrait $\frac{pv^2}{2g}$.

On se sert assez souvent du marteau à une main pour frapper sur une surface verticale. Dans ce cas, la pesanteur ne contribue plus à la vitesse finale, lorsque le manche est tenu au-dessous ou à la hauteur du point choqué; mais elle y contribue encore lorsque la main se trouve au-dessus du même point, et ni l'une ni l'autre de ces deux circonstances n'empêche évidemment d'apprécier le choc comme dans le cas d'une surface horizontale.

Il n'existe du reste aucune donnée sur la quantité d'action journalière qu'un homme peut produire en frappant, ni sur la relation qu'il conviendrait d'établir, pour obtenir le maximum du travail, entre la masse du marteau, la hauteur d'ascension et le nombre de coups donnés dans 1″. Mais, comme l'homme se fatigue promptement lorsqu'il agit avec une grande vitesse, il y a tout lieu de croire qu'un ouvrier produirait une moins grande quantité d'action journalière en usant d'un petit marteau qu'en employant le marteau à deux mains.

SONNETTES.

86. La *sonnette* à battre est une machine dans laquelle une masse nommée *mouton*, élevée verticalement, retombe de même pour produire un choc. La chute n'est pas tout à fait libre : la justesse du coup se trouve assurée par deux coulisses pratiquées chacune sur un montant vertical, dans lesquelles glissent deux parties saillantes du mouton. C'est au moyen d'un câble

qu'on élève la masse percutante. Ce câble passe sur une poulie fixe placée entre les deux montants, vers leurs extrémités supérieures. Dans les sonnettes *à tiraude*, il est uni par un bout à un certain nombre de cordons que tirent les hommes-moteurs; dans les sonnettes *à déclic*, il s'enroule, comme celui d'une chèvre d'artillerie, sur un treuil que soutiennent les montants. Le mouton retombe, quand les manœuvres appliqués à la tiraude cessent de faire effort et lèvent les bras, ou bien lorsqu'on désengrène le déclic qui s'oppose à la descente dès que l'ascension cesse.

Une troisième espèce de sonnette, dite *à crochet*, est particulièrement employée dans les arsenaux pour éprouver les essieux. Elle renferme un treuil comme la sonnette à déclic; mais on y détermine la chute du mouton en faisant basculer, au moyen d'une corde pendante, le crochet qui termine le câble et s'engage dans un anneau fixé à la face supérieure de la masse percutante.

Au reste, aucune machine peut-être n'a autant de variétés que la sonnette à battre; mais les différences de ces variétés n'ont rien d'essentiel.

Quel que soit l'appareil employé, il est fort important d'en disposer les parties de façon à faire passer le prolongement de l'axe du câble par le centre de gravité du mouton, et à rendre cet axe rigoureusement vertical; autrement, la masse tendrait à tourner autour de son point d'attache; la tension décomposée produirait une force horizontale, et il en résulterait dans les coulisses des frottements qui pourraient augmenter notablement la quantité d'action nécessaire à l'ascension.

87. Les cordons de la sonnette à tiraude sont divergents ou parallèles. La première disposition est la plus usitée, à cause de sa simplicité; mais il s'en faut qu'elle

soit la plus avantageuse sous le rapport de l'économie de force motrice. L'obliquité des cordons rend la résultante des efforts bien moindre que leur somme, et l'obligation où sont les hommes de se maintenir suffisamment écartés du prolongement de l'axe du câble, leur cause une fatigue tout à fait inutile à l'ascension.

Quelques mécaniciens diminuent l'obliquité des cordons en attachant deux câbles au mouton et les faisant passer sur deux poulies fixes dont les faces planes prolongées se coupent sous un angle tel que les hommes qui tirent sur l'un des câbles ne gênent point ceux qui tirent sur l'autre. Cette modification de l'appareil convient surtout lorsque le poids du mouton nécessite un grand nombre de bras. Mais le plan des deux câbles doit contenir le centre de gravité de la masse, et les distances des prolongements de leurs axes à ce centre doivent être en raison inverse des deux tensions ou des nombres d'hommes que renferment les deux groupes de manœuvres, afin qu'il n'y ait aucune cause de rotation soit autour de la droite des points d'attache, soit autour du point d'application de la résultante. Il est bon d'ailleurs, pour atténuer les frottements qui pourraient avoir lieu dans les coulisses, de rapprocher les deux câbles l'un de l'autre autant qu'il est possible; car le rapport des tensions est fort sujet à varier, et moins les directions de ces deux forces seront écartées, moins aussi la variation aura d'influence sur la position de leur résultante, et par conséquent, sur le mouvement du mouton.

On rend parallèles les cordons d'une tiraude, en les attachant à un cercle placé à une hauteur telle qu'il ne puisse jamais atteindre les hommes-moteurs. Les parties supérieures de ces cordons, celles qui vont du cercle au câble, forment alors autant de génératrices d'un cône droit, et les parties inférieures, celles auxquelles s'ap-

pliquent les bras, pendent verticalement. Bien entendu que le diamètre du cercle doit être assez grand pour que les manœuvres ne se gênent point les uns les autres, en tirant sur les bouts verticaux des cordons.

Une telle disposition rendant parallèles les efforts, donne une résultante égale à leur somme, et parce que le cercle, les cordons obliques et le câble forment un système invariable, ce câble reçoit selon sa direction la traction totale des hommes. On démontrerait d'ailleurs fort aisément que le pli de chaque cordon sur le cercle ne cause aucune perte de force.

88. Pour obtenir la relation de la puissance et de la résistance dans une sonnette à battre, il suffira d'appliquer la formule relative à la poulie fixe, s'il s'agit d'une tiraude, et celle-là, ainsi que la formule relative au treuil, s'il s'agit d'une sonnette à déclic ou à crochet. On calculera d'abord la puissance nécessaire pour élever le poids p du mouton, à l'aide de la poulie fixe, et l'on aura ainsi la traction à exercer sur le câble, ce qui suffira dans le cas d'une tiraude ; puis, dans le cas d'une sonnette à treuil, on considérera cette traction comme la résistance appliquée au cylindre.

Observons cependant que si la tiraude est à cordons divergents, la traction qu'il conviendra d'exercer sur le câble se trouvera moindre que la somme des efforts moteurs. Soit t cette traction, et n le nombre des hommes employés. L'effort vertical de chacun serait $\frac{t}{n}=q$. Mais l'effort oblique q', qui forme un angle α avec la verticale, se décompose et donne $q'\cos\alpha=q$. Il s'ensuit $q'\cos\alpha=\frac{t}{n}$, puis $nq'=\frac{t}{\cos\alpha}$. C'est cette relation qui fera connaître la puissance motrice totale, dès que la tension t sera déterminée.

89. Quant au choc, il serait produit par la quantité d'action ph, dans toutes les sonnettes, sans les résistances qu'oppose la poulie fixe à la descente du mouton. Il n'est donc réellement dû à ph que dans la sonnette à crochet, la seule dont la masse percutante retombe séparée du câble. Mais en raison de ce que ce câble a peu de poids, et de ce que la partie qui doit se ployer diminue à mesure que la chute s'opère, on peut bien négliger le frottement de l'essieu et la raideur de la corde.

90. Un fait digne de remarque, c'est que la quantité d'action qui peut être produite en un jour par l'homme-moteur d'une sonnette, diminue avec la hauteur d'ascension. L'expérience apprend effectivement que, pour une hauteur supérieure à 1^m, la quantité d'action journalière peut être de 72540^k, tandis qu'elle se réduit à 59520^k, si la hauteur est seulement $0^m,4$. C'est Coulomb qui nous fournit la dernière de ces données : il rapporte que deux ouvriers de la monnaie de Paris ne pouvaient élever dans un jour plus de 5200 fois, à $0^m,4$, un mouton de 38^{kg} ; d'où suit qu'en effet chacun produisait une quantité d'action de

$$\frac{38^{kg}}{2} \times 0^m,4 \times 5200 = 59520^k.$$

Ainsi, les manœuvres éprouvent plus de fatigue à multiplier les coups de mouton qu'à donner aux ascensions toute l'amplitude possible. Et l'on conçoit que cela doit être : dans le premier cas, ils sont obligés de relever plus souvent la partie supérieure du corps, et de vaincre plus souvent aussi l'inertie de la masse mobile.

91. Le tableau II indique 18^{kg} pour l'effort d'un homme qui élève des poids à l'aide d'une poulie fixe, et $77\,760^k$ pour la quantité d'action journalière dont cet homme est

capable. Mais M. Borgnis prétend qu'en agissant sur la tiraude à cordons parallèles, chaque homme peut exercer un effort de 20^{kg}, et produire journellement une quantité d'action de 93600^{k}.

Il n'en est pas de même à beaucoup près pour la tiraude à cordons divergents. Au dire de M. Gauthey, l'expérience apprend que cette machine réduit l'effort utile du moteur d'autant plus qu'il a un plus grand poids à élever : si, par exemple, le mouton pèse 300^{kg}, chaque homme en peut soulever 15 à 16^{kg}, tandis que dans le cas de 500^{kg}, chaque homme soulève seulement 10 à 11^{kg}. Or, l'ascension moyenne est ordinairement de $1^{m},3$; l'équipage donne par jour 120 volées, et chaque volée, qui dure 3 à 4 minutes, se compose de 30 coups. Admettant donc le plus grand effort $15^{kg},5$, on trouve que la quantité d'action journalière égale $15^{kg},5 \times 1^{m},3 \times 30 \times 120 = 72540^{k}$, nombre bien inférieur à celui qu'on obtient de la tiraude à cordons parallèles; il montre même que la tiraude à cordons divergents produit seulement les 0,775 de la quantité d'action qui peut être fournie par l'autre.

A cause des résistances accessoires de la poulie fixe (40), les sonnettes à déclic et à crochet donnent seulement les $^{4}/_{5}$ de la quantité d'action produite à l'aide du treuil qui en fait partie; encore faut-il pour cela qu'il n'y ait pas de frottement dans les coulisses. Or le tableau III indique 172800^{k} pour la quantité d'action journalière dont se trouve capable l'homme qui agit sur un treuil, et les $^{4}/_{5}$ de ce nombre font presque le double des 72540^{k} fournis par la tiraude à cordons divergents; il est même de beaucoup supérieur aux 93600^{k} que donne la tiraude à cordons parallèles. Il semblerait donc que les sonnettes à déclic et à crochet dussent toujours être préférées aux tiraudes. Mais les circonstances et le

genre de travail doivent être pris aussi en considération : on emploiera les sonnettes qui produisent le plus de quantité d'action, quand il s'agira de briser des corps, d'éprouver leur résistance au choc, et quand il y aura peu de manœuvres disponibles ; on se servira de tiraudes, si les chocs doivent être souvent répétés, car les sonnettes à treuil permettent bien moins de coups dans le même temps.

Considérons en particulier le cas du battage des pilots. L'enfoncement d'un pieu ne dépend pas uniquement de la quantité d'action consommée ; la nature du sol a une influence très-sensible. Aussi, la plupart des bons constructeurs pensent-ils qu'en terrain dur, il importe de frapper fortement, mais lentement, et qu'en terrain mou, les coups doivent être modérés, mais se succéder avec assez de rapidité. C'est donc une tiraude qu'il faut employer au battage des pilots dans le second cas ; c'est donc d'une sonnette à treuil qu'il faut se servir dans le premier ; car le cylindre permet d'élever un plus grand poids et de l'élever à une plus grande hauteur ; l'ascension est plus lente qu'avec la tiraude, et en outre il y a des repos forcés, pendant qu'on replace le crochet du câble.

92. Comme l'épreuve du corps des essieux d'artillerie consiste à lui faire supporter un seul coup de mouton, on a dû la faire avec une sonnette à treuil : les manœuvres eussent eu trop de repos entre deux ascensions consécutives, si l'on avait employé une tiraude. Le mouton présente un prisme rectangle en bronze ou en fonte, terminé par un prisme trapézoïdal. Quelle qu'en soit la matière, on applique sur la face inférieure du second prisme une plaque de bronze nommée *frappe*, afin de n'avoir pas à réformer la masse entière, quand la face percutante se trouve dégradée. Le mouton pèse

500^{kg}, et il s'élève à $1^m,6$ au-dessus des essieux n.ºs 1, 2, 4, à 1^m seulement au-dessus de l'essieu n.° 3. L'essieu qu'il s'agit d'éprouver est placé sur une table de fonte qui a deux rebords parallèles au plan vertical de la poulie fixe. Ces rebords supportent les extrémités du corps de l'essieu, et comme la table offre des logements aux talons, le corps s'y appuierait aussi par le milieu, si l'on ne plaçait des cales de $0^m,0068$ sous ses extrémités. C'est sur ce milieu ainsi élevé de $0^m,0068$ qu'a lieu le choc de 500^k; il doit ne produire aucune fente en travers.

Après l'épreuve du mouton, tout essieu subit celle de l'*escarpolette*. Cette machine peut être rangée dans l'espèce des sonnettes à crochet (P. I, F. 29). L'essieu est placé horizontalement sur une sorte d'étrier A qu'on élève à $2^m,11$ au moyen d'un câble, d'une poulie fixe B et d'un treuil à double manivelle C. L'ascension est terminée quand l'essieu atteint deux arrêtoirs D portés par les montants verticaux. Alors, on dégage l'étrier à l'aide d'une corde E qui, passant sur une petite poulie de renvoi, le tire horizontalement, et l'essieu tombe de manière que les fusées vont heurter en même temps, par leurs milieux, deux demi-cylindres de fonte F disposés parallèlement au plan vertical de la grande poulie fixe.

Le choc de chaque fusée qui égale le produit de la moitié du poids de l'essieu multipliée par $2^m,11$, doit, comme le précédent, ne causer aucune fente en travers.

BALANCIER A VIS.

93. Le *balancier à vis* remplace avantageusement la tiraude, lorsque le choc doit être produit par une

lourde masse tombée d'une faible hauteur, et il consomme bien moins de temps qu'une sonnette à treuil. On y distingue trois parties principales : le balancier proprement dit, la vis et le cylindre percutant. La première est une verge cylindrique de fer AB que terminent deux sphères d'un grand poids (P. I, F. 30); la seconde, à filet carré, est liée avec le balancier par sa tête, joue dans un écrou fixe CD, et se termine par deux plates-bandes E, F, qui laissent entre elles une gorge. Le cylindre percutant G a aussi une gorge que forme le chapeau H; deux arêtes I diamétralement opposées glissent chacune dans une coulisse et l'empêchent de tourner; il est lié à la vis par un collier K qui présente intérieurement deux saillies annulaires : la saillie supérieure se loge dans la gorge de la vis, et l'inférieure dans la gorge du cylindre. Ce collier a d'ailleurs un arrêtoir L propre à l'empêcher de tourner.

Le balancier à vis est employé dans les arsenaux pour découper le fer rouge en rondelles. L'outil ou emporte-pièce M, tronc de cône plein, tranchant par sa grande base, est alors fixé à la base inférieure du cylindre; au-dessous se trouve une matrice N, tronc de cône creux, tranchant par sa petite base. La barre de fer, convenablement façonnée à la forge, est placée sur la matrice; des hommes agissant sur la boule A, impriment au balancier un vif mouvement de rotation; la vis descend en tournant et pousse le collier par sa plate-bande supérieure; le collier à son tour pousse le cylindre par son anneau inférieur; l'emporte-pièce frappant la barre, en détache une rondelle qui tombe par le trou de la matrice; au moment même de cette chute, les boules rencontrent des ressorts qu'elles compriment jusqu'à l'épuisement du reste de leur force-vive; puis la réaction de ces ressorts détermine une rotation contraire à la

précédente, et la vis remonte, entraînant le collier et le cylindre.

94. Nous établirons d'abord la relation de l'effort moteur et de la vitesse circulaire qu'il doit avoir imprimée aux masses rotatives à l'instant du choc, pour que le percement puisse s'effectuer, puis la relation de la même vitesse et de la résistance qu'oppose la barre au passage de l'emporte-pièce.

L'effort moteur est variable, car évidemment la pression des hommes sur l'une des boules décroît à mesure que la rotation s'accélère. Soit donc s l'arc horizontal décrit par le centre de la boule pendant l'action de la puissance, et Q, fonction de s, la valeur qu'a l'effort à l'extrémité de cet arc. La quantité d'action dépensée sera $\int Q\,ds$.

Mais, si l'on désigne par p le poids de toute la masse descendante, et par z la hauteur qu'elle a parcourue quand le choc s'opère, la quantité d'action pz s'ajoute à $\int Q ds$ pour fournir celle que consomment les frottements et celle dont le système se trouve alors capable. La dépense est donc en totalité $\int Q ds + pz$.

Il y a deux frottements, celui du filet de la vis sur le filet de l'écrou, et celui de la plate-bande supérieure E sur l'anneau supérieur du collier; mais ce dernier, simplement dû à l'inertie qu'opposent les masses K, G, M, à chaque accroissement très-petit de la vitesse verticale, peut être négligé sans grande erreur. Quant au premier, nous avons trouvé (72), pour sa valeur rapportée à l'extrémité du rayon R, une force horizontale $\frac{Pr(2\pi rf - h)}{R(2\pi r + fh)}$, P étant le poids de la vis et du fardeau, r la distance de l'hélice moyenne à l'axe, et h le pas. Comme ici la machine n'est point chargée, $P = p$, et si nous rapportons le frottement à l'hélice moyenne, il vaudra

$p\frac{2\pi rf-h}{2\pi r+fh}$. Or, son point d'application parcourt horizontalement la circonférence $2\pi r$ pendant la descente d'un pas, ou le chemin $\frac{2\pi r}{h}$ pendant la descente d'une unité de longueur, ou enfin $\frac{2\pi r}{h}z$ pendant la descente z. Par conséquent, la quantité d'action qu'exige le frottement est $p\frac{4\pi^2r^2f-2\pi rh}{2\pi r+fh}\times\frac{z}{h}$.

Au moment du choc, le système possède une quantité d'action horizontale et une quantité d'action verticale. Soit ω sa vitesse angulaire à cette époque. Une masse élémentaire dm située à une distance ρ de l'axe aura horizontalement une vitesse propre $\rho\omega$ et une quantité d'action $\frac{\rho^2\omega^2 dm}{2}$. Celle de la masse rotative totale sera donc $\frac{\omega^2}{2}\int\rho^2\, dm$.

Le chemin vertical est h pour un tour complet, $\frac{h}{2\pi}$ pour chaque unité de la circonférence dont le rayon égale 1, et $\frac{h}{2\pi}\omega$ pour l'arc horizontal ω. Telle est donc aussi la vitesse verticale qui résulte de la vitesse angulaire, et par suite, la quantité d'action imprimée verticalement à la masse du système vaut $\frac{p}{g}\times\frac{h^2\omega^2}{8\pi^2}$.

Ainsi, nous aurons entre les quantités d'action dépensées et celles qui sont consommées ou conservées, l'équation

$$\int Q ds+pz=\frac{\omega^2}{2}\left(\int\rho^2 dm+\frac{ph^2}{4g\pi^2}\right)+p\frac{4\pi^2r^2f-2\pi rh}{2\pi r+fh}\times\frac{z}{h}.\ (1)$$

Elle fera connaître la quantité d'action $\int Q\,ds$ à produire par le moteur pour que la machine ait une vitesse angulaire déterminée au moment du choc, ou la vitesse angulaire qu'imprimera un travail spécifié.

Dans le premier cas, il sera facile de trouver l'effort moyen Q_1 du moteur, si l'on connaît en outre la partie $\frac{z}{n}$ de la descente pendant le parcours de laquelle a lieu l'action. Effectivement, la descente 1 répond à un arc horizontal $\frac{2\pi R}{h}$, R représentant la distance du centre de chaque boule à l'axe; la descente $\frac{z}{n}$ donne un arc $\frac{2\pi R z}{nh} = s$, et puisque l'effort Q_1 est constant, $Q_1 s = Q_1 \frac{2\pi R z}{nh} = \int Q\,ds$. Par conséquent, $Q_1 = \frac{nh}{2\pi R z} \int Q\,ds$, et l'on aura $Q_1 = \frac{h}{2\pi R z} \int Q\,ds$, lorsque le moteur agira pendant toute la descente z.

95. Le percement se fait dans un temps tellement court, qu'il est bien permis de négliger les effets de la pesanteur, c'est-à-dire la quantité d'action verticale et la quantité d'action horizontale dues à la descente du poids p. La vitesse angulaire ω, jointe à l'effort moyen Q_2 que le moteur exerce alors, doit donc donner au système une quantité d'action verticale au moins égale à celle qu'exige le détachement de la rondelle, et une quantité d'action horizontale au moins égale à la somme de celles que peuvent consommer les résistances qui s'opposent à la rotation de la vis.

La considération des quantités d'action horizontales nous suffit pour établir la relation de la vitesse angulaire ω et de la résistance principale. Comme elles sont

toutes produites sur des chemins circulaires, elles auront 2π pour facteur commun, si on les évalue pour un tour complet, et la suppression de ce facteur réduira la relation à celle des moments des efforts ou des quantités de mouvement.

La quantité de mouvement de la masse élémentaire dm est $\rho\omega dm$; son moment vaut $\rho^2\omega dm$; celui de toute la masse rotative égale $\omega\int\rho^2 dm$, et l'on a $\omega\int\rho^2 dm + Q_2 R$ pour somme des moments des puissances.

Soit ω' la vitesse angulaire qui reste après le percement. Le moment de la quantité de mouvement horizontale qu'aura la machine alors sera $\omega'\int\rho^2 dm$. La somme des moments des quantités de mouvement dépensées vaudra donc $(\omega-\omega')\int\rho^2 dm + Q_2 R$.

Il faut considérer ici les deux frottements de la vis, car la résistance qu'oppose la barre influe sur chacun. Admettons la proportionnalité de cette résistance à la surface cylindrique de la rondelle enlevée, puis désignons par c, e, k, la circonférence, la hauteur et le coefficient relatif à la cohésion du fer. La réaction kce de la barre pressera de bas en haut le filet de la vis contre celui de l'écrou. Mais en raison de la vitesse verticale consommée $\frac{h}{2\pi}(\omega-\omega')$, il y a une pression de haut en bas qui vaut la quantité de mouvement

$$\frac{p}{g}\times\frac{h}{2\pi}(\omega-\omega').$$

La pression qui produit le frottement des deux filets vaut donc $kce - \frac{ph}{2\pi g}(\omega-\omega')$, et le moment de ce frottement rapporté à l'hélice moyenne égale

$$\left[kce-\frac{ph}{2\pi g}(\omega-\omega')\right]\frac{2\pi rf-h}{2\pi r+fh}r.$$

La même réaction kce pousse le collier contre la plate-bande supérieure de la vis, et l'effort $\frac{ph}{2\pi g}(\omega-\omega')$ pousse cette plate-bande contre le collier. Ainsi, le frottement des deux parties est $f'\left[kce+\frac{ph}{2\pi g}(\omega-\omega')\right]$, et son moment égale $f'\left[kce+\frac{ph}{2\pi g}(\omega-\omega')\right]r'$, si r' désigne la distance de l'axe à la circonférence moyenne de l'anneau frottant.

A la rigueur, il faudrait prendre (66) pour bras de levier du second frottement $\frac{2}{3}\times\frac{r_1^3-\rho_1^3}{r_1^2-\rho_1^2}$, r_1 et ρ_1 étant le plus grand et le plus petit rayon de l'anneau. Mais, si l'on désigne par l la largeur,

$$r_1=r'+\frac{l}{2},\quad \rho_1=r'-\frac{l}{2},$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{r_1^3-\rho_1^3}{r_1^2-\rho_1^2}=\frac{2}{3}\times\frac{r_1^2+r_1\rho_1+\rho_1^2}{r_1+\rho_1}=\frac{2}{3}\times$$

$$\frac{r'^2+r'l+\frac{l^2}{4}+r'^2-\frac{l^2}{4}+r'^2-r'l+\frac{l^2}{4}}{2r'}=\frac{3r'^2+\frac{l^2}{4}}{3r'}=r'+\frac{l^2}{12r'},$$

et l'on néglige seulement une petite fraction, en réduisant le bras de levier à r'.

Ainsi, la relation cherchée est l'équation des moments

$$(\omega-\omega')\int\rho^2 dm+Q_2R=\left[kce-\frac{ph}{2\pi g}(\omega-\omega')\right]\frac{2\pi rf-h}{2\pi r+fh}r$$
$$+f'r'\left[kce+\frac{ph}{2\pi g}(\omega-\omega')\right],$$

ou bien

$$(\omega-\omega')\left[\int\rho^2 dm+\frac{ph}{2\pi g}\left(\frac{2\pi rf-h}{2\pi r+fh}r-f'r'\right)\right]+Q_2R$$
$$=kce\left(\frac{2\pi rf-h}{2\pi r+fh}r+f'r'\right).$$

Lors donc que le coefficient k sera connu, on pourra déterminer l'effort moyen Q_2 à exercer pendant le percement, pour qu'il reste à la machine une vitesse angulaire ω' assignée, et quand Q_2, ω' auront été trouvés par expérience, il sera possible d'obtenir la valeur de k pour le fer employé.

Mais dès que les manœuvres sont habitués à faire jouer le balancier à vis, ils exercent avant le choc un effort moyen Q_1 qui imprime une vitesse angulaire ω suffisante pour opérer le percement, et la vitesse restante ω' est si faible qu'elle peut être regardée comme nulle. On a donc, dans un tel cas, $Q_2=0$ et

$$\omega\left[\int\rho^2\,dm+\frac{ph}{2\pi g}\left(\frac{2\pi rf-h}{2\pi r+fh}r-f'r'\right)\right]$$
$$=kce\left(\frac{2\pi rf-h}{2\pi r+fh}r+f'r'\right). \qquad \text{(II)}$$

Des expériences faites par M. le capitaine Morin sur le balancier à vis de l'arsenal de Metz apprennent qu'alors la quantité d'action dépensée par chacun des deux manœuvres vaut $15^{k},4$.

96. L'observation de l'ascension z' due à la réaction des ressorts donne le moyen de déterminer ω' dans toutes les circonstances. En effet, cette vitesse angulaire qui se consomme pendant la compression des spirales, est totalement restituée, si l'élasticité est parfaite. Il en résulte (94) circulairement une quantité d'action $\frac{\omega'^2}{2}\int\rho^2\,dm$, et verticalement une quantité d'action $\frac{p}{g}\times\frac{h^2}{4\pi^2}\times\frac{\omega'^2}{2}$, qui doivent produire le travail pz' et celui qu'exige le frottement de la vis dans son écrou. Par conséquent,

$$\frac{\omega'^2}{2}\left(\int\rho^2\,dm+\frac{p}{g}\times\frac{h^2}{4\pi^2}\right)=pz'+p\,\frac{4\pi^2r^2f-2\pi rh}{2\pi r+fh}\times\frac{z'}{h}\,.$$

97. La quantité $\int \rho^2 dm$ est ce qu'on appelle le moment d'inertie de la masse m. L'équation (II) montre que plus ce moment est grand, plus la vitesse angulaire ω peut être petite, les autres quantités restant les mêmes, et l'on voit par l'équation (I) que la diminution de ω produit celle du travail $\int Q\,ds$ de la puissance motrice. Cherchons donc la valeur de $\int \rho^2 dm$, à l'effet de reconnaître les moyens de l'accroître sans augmenter p ou plutôt la masse m.

Comme le moment d'inertie d'un système égale la somme de ceux des diverses parties, nous avons à calculer séparément le moment d'inertie de la vis, celui de la verge AB du balancier, celui des deux sphères, et à faire le total des trois résultats.

Soient δ la densité du fer qui constitue la machine, r'' le rayon des sphères, r''' celui de la verge, $2l$ la longueur de cette verge, l' celle de la vis, ρ' le rayon de la surface cylindrique du filet.

Nous regarderons la vis comme formant un cylindre plein d'un rayon ρ' et d'une longueur l', depuis la verge jusqu'à la face inférieure de la plate-bande F, c'est-à-dire que nous ferons abstraction du creux héliçoïde et de la saillie des deux plates-bandes. Un anneau élémentaire de ce cylindre a pour volume $\pi(\rho+d\rho)^2 l' - \pi\rho^2 l' = 2\pi l'\rho\,d\rho$, si l'on néglige l'infiniment petit du second ordre. La masse vaut $2\pi\delta l'\rho\,d\rho$, et le moment d'inertie, $2\pi\delta l'\rho^3 d\rho$. Celui de la vis entière est donc $2\pi\delta l'\int\rho^3 d\rho = \frac{1}{2}\pi\delta l'\rho^4 + C$. Prenant l'intégrale de $\rho=0$ à $\rho=\rho'$, on obtient $\frac{1}{2}\pi\delta l'\rho'^4$.

Le moment d'inertie de la verge dépend de celui d'une section droite pris par rapport à un des diamètres AB (P. I, F. 31). Considérons d'abord le quart de cercle BOH, et un élément annulaire qui ait y pour son moindre rayon, $y+dy$ pour le plus grand. La superficie

de cet élément est $\frac{2\pi y\,dy}{4}$. Son centre de gravité se trouve au milieu I du petit arc. Comme l'angle HOI $=$IOB, et que le triangle rectangle OKI a son angle OIK égal à HOI, ce triangle est isocèle; $\overline{IK}^2 = \frac{y^2}{2}$; le moment d'inertie élémentaire vaut $\frac{\pi y^3 dy}{4}$; l'intégration donne $\frac{\pi y^4}{16}$; cette intégrale prise de $y=0$ à $y=r'''$ devient $\frac{\pi r'''^4}{16}$, moment d'inertie du secteur BOH, et l'on a, pour celui d'une section entière de la verge, $\frac{\pi r'''^4}{4}$ ou $\pi r'''^2 \frac{r'''^2}{4}$.

Il s'ensuit que si un cylindre élémentaire de la verge, situé à une distance ρ de l'axe de la vis, a pour longueur $d\rho$, son moment d'inertie relatif à un axe parallèle mené par le centre de gravité vaut $\pi\delta r'''^2 d\rho \frac{r'''^2}{4}$.

Or, on sait, et d'ailleurs il est assez facile de se convaincre que le moment d'inertie d'un corps rapporté à un axe quelconque égale la somme de la masse multipliée par le quarré de la distance de cet axe au centre de gravité, et du moment d'inertie relatif à un axe parallèle mené par le même centre. Le moment d'inertie du cylindre élémentaire rapporté à l'axe de la vis est donc $\pi\delta r'''^2 \rho^2 d\rho + \pi\delta r'''^2 d\rho \frac{r'''^2}{4}$. Intégrant de $\rho = l$ à $\rho = -l$, on trouve enfin, pour le moment d'inertie de toute la verge, ${}^2\!/_3\,\pi\delta r'''^2 l^3 + {}^1\!/_2\,\pi\delta r'''^4 l$.

La masse de chaque sphère est ${}^4\!/_3\,\pi\delta' r''^3$, et $l + r''$ forme la distance du centre de gravité O à l'axe de la vis. Le premier terme du moment d'inertie relatif à cet axe vaut donc ${}^4\!/_3\,\pi\delta' r''^3 (l + r'')^2$.

Pour trouver le second terme, c'est-à-dire le moment d'inertie relatif à l'axe AB parallèle à l'axe de la vis, il faut considérer un anneau cylindrique et élémentaire, à bases perpendiculaires sur AB, situé à une distance x du point A où cet axe perce la surface sphérique. La hauteur de l'anneau sera dx, et si nous désignons par y le rayon de la surface concave, l'épaisseur se trouvera représentée par dy. Nous aurons donc pour volume de l'anneau $\pi(y+dy)^2dx - \pi y^2 dx = 2\pi y dy dx$, si le terme en $(dy)^2$ est négligé, et pour moment d'inertie relatif à AB, $2\pi\delta' y^3 dy dx$. Ainsi, celui de toute la masse sphérique résultera de deux intégrations successives, l'une faite par rapport à y, l'autre par rapport à x. Considérant cette seconde variable comme constante, nous avons d'abord $\int 2\pi\delta' y^3 dy dx = {}^1/_2\pi\delta' y^4 dx + C$. Prenant l'intégrale de $y=0$ à $y = CD = \sqrt{BC \times CA}$ $= \sqrt{(2r''-x)x}$, nous trouverons, pour la tranche infiniment mince DEFG, ${}^1/_2\pi\delta'(2r''-x)^2x^2dx$ $= {}^1/_2\pi\delta'(4r''^2x^2 - 4r''x^3 + x^4)dx$.

L'intégration relative à x donne ensuite

$$ {}^1/_2\pi\delta'\left({}^4/_3 r''^2x^3 - r''x^4 + \frac{x^5}{5}\right) + C, $$

et si on l'étend de $x=0$ à $x=2r''$, il vient, pour second terme du moment d'inertie de chaque sphère,

$$ {}^1/_2\pi\delta'\left(\frac{32}{3}r''^5 - 16r''^5 + \frac{32}{5}r''^5\right) = \frac{8}{15}\pi\delta' r''^5. $$

Le moment d'inertie d'une seule sphère est donc

$$ {}^4/_3\pi\delta' r''^3(l+r'')^2 + \frac{8}{15}\pi\delta' r''^5, $$

celui des deux vaut

$$ {}^8/_3\pi\delta' r''^3(l+r'')^2 + \frac{16}{15}\pi\delta' r''^5, $$

et par conséquent

$$\int \rho^2 dm = {}^1/_2 \pi \delta l' \rho'^4 + {}^2/_3 \pi \delta r'''^2 l^3 + {}^1/_2 \pi \delta r'''^4 l$$
$$+ {}^8/_3 \pi \delta' r''^3 (l + r'')^2 + \frac{16}{15} \pi \delta' r''^5.$$

Or, on ne peut faire croître le premier terme de cette valeur, car la longueur l' est prise assez petite pour que les hommes puissent agir facilement sur le balancier, mais pourtant assez grande pour qu'il y ait deux spires de filet engagées dans l'écrou, et le rayon ρ' est choisi de manière à donner une solidité suffisante à la vis, en même temps que la moindre valeur possible au frottement.

Les trois termès suivants croissent avec l; mais une limite est imposée à cette longueur souvent par les localités, toujours par la nécessité de ne pas trop augmenter le chemin que doit parcourir le moteur pour faire descendre la vis. Quant à r''', il faut le réduire à ce qu'exige la solidité de la verge AB, car son quarré, variant comme le poids de cette verge, influe sur les frottements.

L'augmentation de r'', δ' fait croître les deux derniers termes, mais elle produit le même effet sur les résistances accessoires. Toutefois, c'est ordinairement en donnant au rayon et à la densité des boules des valeurs convenables, qu'on obtient un moment d'inertie suffisant.

Ainsi, les moyens de diminuer la fatigue du moteur d'un balancier consistent à forger la verge de façon qu'il lui reste seulement assez d'épaisseur pour ne point fléchir sous l'effort des manœuvres, à lui donner toute la longueur qu'elle peut comporter, à rendre les boules très-grosses et à les faire d'une matière fort dense, sans élever leur poids jusqu'au point de courber la verge.

DÉCOUPOIRS.

Les découpoirs comprennent toutes les machines employées pour diviser des corps en plusieurs parties. Le plus important de leurs organes est l'opérateur, autrement dit l'outil, la lame tranchante.

On peut partager les découpoirs en trois espèces : les découpoirs simples, tels que le couteau, le ciseau de menuisier, la hache, etc., mis en action par la main du moteur sans le secours d'aucun mécanisme ; les découpoirs à rotation, vrais leviers tournants, comme les ciseaux du tailleur, les cisailles, le hache-paille, etc. ; les découpoirs à choc ou emporte-pièces, qu'on fait agir au moyen d'une percussion.

ANGLE DU TRANCHANT.

98. La fabrication d'une lame de découpoir est du domaine de la taillanderie : nous n'avons pas à nous en occuper ; mais la quantité d'action qui doit être consommée sur cet opérateur dépend en partie de la forme du tranchant, et cette forme ne peut être convenablement déterminée que par la science aidée de l'expérience. Deux choses sont à considérer : la nature géométrique de l'arête tranchante, et l'angle des deux faces dont cette ligne est l'intersection. Comme le tracé de l'arête dérive de la manière dont on fait agir l'opérateur, et même de la nature de l'ouvrage, nous ne pouvons en parler d'une manière générale ; mais l'influence de l'angle du tranchant étant la même dans toutes les espèces de découpoirs, peut être étudiée dès à présent.

Soient (P. II, F. 1) le triangle isocèle ABC la section faite dans une lame de découpoir par un plan mené selon la direction de l'effort moteur, perpendiculairement au

plan qui contient cette direction et l'arête tranchante; D, E les points où l'on peut supposer concentrées les pressions normales supportées par les faces du coin; P l'intensité de chacune de ces pressions; Q l'effort du moteur exercé sur la tête AC, dans le plan ABC; β l'angle BAC et γ l'angle ABC du tranchant.

La puissance se compose d'une partie q capable de détruire les deux résistances P, et d'une partie q' nécessaire pour vaincre les deux frottements fP qu'éprouvent les faces AB, BC, en glissant le long des parois de la fente produite dans le corps à diviser.

Mais le chemin le long duquel sont exercés les efforts q, q' est h, si nous représentons par cette lettre la longueur AH supposée parcourue par la tête AC du coin; le chemin correspondant de P est $DF = GH = AH \sin GAH = h \cos\beta$, et celui de fP est $AI = \frac{AH}{\cos HAI} = \frac{h}{\sin\beta}$. Il faut donc $qh = 2Ph\cos\beta$, $q'h = 2fP\frac{h}{\sin\beta}$, et $Q = q + q' = 2P\cos\beta + 2fP\frac{1}{\sin\beta}$.

Ainsi, l'effort du moteur diminue quand l'angle β augmente. Or, $\beta = \frac{180 - \gamma}{2}$ et ne peut croître sans que γ décroisse. Conséquemment, la force motrice qu'exige un découpoir est d'autant plus faible que l'angle du tranchant est moindre.

Il est bon de remarquer que si γ était tel qu'on eût $\frac{AC \times BK}{AB^2} = f$, la perte de force causée par le frottement des faces serait double de l'effort nécessaire pour vaincre les résistances P. En effet, $\cos\beta = \frac{AK}{AB}$, $\sin\beta = \frac{BK}{AB}$,

et $$2\cos\beta = \frac{2\,AK}{AB} = \frac{AC}{AB}.$$

Par conséquent,

$$q = 2\,P\cos\beta = P\,\frac{AC}{AB},$$

tandis que

$$q' = \frac{2fP}{\sin\beta} = \frac{\frac{2\,AC \times BK}{\overline{AB}^2}\,P}{\frac{BK}{AB}} = 2\,P\,\frac{AC}{AB} = 2q.$$

Comme les outils destinés à pénétrer dans les corps peuvent être assimilés au coin, quelle que soit leur forme, on voit qu'il faudrait leur faire à tous un tranchant fort aigu, pour atténuer la fatigue des ouvriers autant que la chose serait possible; mais, d'un autre côté, la dureté du corps à diviser impose l'obligation de donner à l'angle une ouverture qui empêche le tranchant de s'égréner, de s'émousser. De notre discussion résulte donc seulement ce principe, que l'angle d'un tranchant doit être aussi grand que l'exige la dureté des corps à diviser, mais non davantage.

Ainsi, l'angle γ peut et doit être très-aigu dans les couteaux destinés à couper des substances molles; mais il a besoin d'une ouverture de 30° dans les fers de varlope à bois, et même d'à peu près 90° dans les burins et les emporte-pièces employés à découper le fer.

Ajoutons qu'on diminue notablement la quantité d'action à dépenser par le moteur d'un découpoir, en donnant un beau poli aux faces de la lame tranchante, et en les graissant de suif : ce sont là évidemment deux moyens de rendre plus petite la fraction f, coefficient du frottement.

DÉCOUPOIRS SIMPLES.

99. L'arête du tranchant est une droite dans la plupart des découpoirs simples; mais quelle que soit sa forme, il arrive de deux choses l'une : une partie de l'effort moteur ou la totalité de cet effort est exercée perpendiculairement à l'arête, ou bien sa direction fait un angle aigu soit avec cette ligne, soit avec la tangente au point de pénétration.

Si, dans le premier cas, l'effort est dirigé sur le point même par lequel le tranchant commence à pénétrer dans le corps, évidemment il doit égaler à chaque instant la résistance que les particules opposent à leur séparation. Par conséquent, la quantité d'action dépensée pour opérer la section est le produit de la résistance moyenne P par l'épaisseur d du corps mesurée selon la normale au point d'entrée de l'arête tranchante.

Ainsi, l'emploi d'un ciseau de menuisier à fer rectangulaire ne cause aucune perte de quantité d'action, lorsque la pression ou la percussion se fait selon la direction du manche.

Il n'en est pas de même pour le couteau ordinaire. On ne peut exercer la pression au-dessus du tranchant, puisque le manche se trouve bout à bout avec la lame, et de là suit qu'il faut une contre-pression sous l'extrémité de ce manche, pour empêcher l'instrument de tourner autour du premier des points par lesquels la lame entre dans le corps.

Supposons qu'il s'agisse de couper un cylindre dont le diamètre soit d (P. II, F. 2). Représentons par P la résistance moyenne, par a la distance de l'extrémité A du manche au milieu B du tranchant, point par lequel doit commencer la pénétration, et par b la longueur AC

qu'occupe la main. Le moteur exercera en C une pression Q dirigée de haut en bas et destinée à vaincre la résistance P; en A, il exercera soit avec la même main, soit avec l'autre, une pression q dirigée de bas en haut, pour empêcher le couteau de tourner autour du point B, et lorsque le mouvement sera devenu uniforme, l'équilibre des trois forces donnera $Q = P\frac{a}{b}$, $q = Q\frac{a-b}{a} = P\frac{a-b}{b}$. L'effort total du moteur sera donc $Q + q = P\frac{a}{b} + P\frac{a-b}{b} = P\frac{2a-b}{b}$, et la quantité d'action dépensée pour opérer la section du cylindre, égalera $Pd\frac{2a-b}{b}$. Or, elle serait seulement Pd, si la pression était exercée selon le diamètre qui aboutit en B. Par conséquent, la forme de l'instrument cause une perte égale à $Pd\frac{2a-b}{b} - Pd = 2Pd\frac{a-b}{b}$. Cette perte ne peut jamais devenir nulle, quelle que soit la partie du manche saisie par le moteur, puisque toujours a surpassera b; mais sa valeur diminuera d'autant plus que la lame sera moins longue, que le moteur tiendra le couteau plus près de cette lame, et qu'il aura la main plus large.

On voit d'ailleurs que la perte vaudra Pd, ou que la quantité d'action se trouvera double de la valeur strictement nécessaire, quand on aura $\frac{a-b}{b} = 1/2$ ou $a - b = \frac{b}{2}$ ou $a = 3/2\, b$. C'est là ce qui arriverait si l'on tenait le manche près de la lame, et que cette lame eût pour longueur seulement la largeur de la main. Lors donc qu'il

n'en est pas ainsi, le couteau ordinaire exige du moteur une quantité d'action supérieure au double de celle que consomme la résistance.

100. Considérons maintenant le cas où la direction de l'effort moteur fait un angle aigu α avec l'arête droite du tranchant (P. II, F. 3). La lame s'applique alors près de son extrémité antérieure, et la section est opérée, quand, parti de la position où il est tangent au cylindre en B, par exemple, l'instrument se trouve dans la position parallèle où il touche par l'autre extrémité du diamètre BD. Le point d'application du moteur a donc parcouru un chemin égal à BE. Nommons l cette longueur, et Q la pression moyenne; Ql sera la quantité d'action dépensée, et l'on aura $Ql = Q\frac{d}{\sin\alpha}$.

La théorie ne saurait apprendre si $Q\frac{d}{\sin\alpha}$ est inférieur ou supérieur à Pd, quantité d'action consommée par la section lorsque la pression se fait perpendiculairement à l'arête tranchante; car, rien n'indiquant comment se modifie la résistance quand le couteau s'enfonce et glisse à la fois, il est impossible de connaître à priori le rapport de $\frac{Q}{\sin\alpha}$ à P. Mais, parce que le mode d'action qui donne le premier de ces nombres de kilogrammes, est analogue à celui des scies; qu'un couteau, si bien affilé qu'on le suppose, peut toujours être assimilé à ces instruments, et que, d'après l'expérience, le sciage d'un corps cause beaucoup moins de fatigue qu'une section opérée par simple enfoncement, on conçoit qu'il y a telle valeur de α qui rend Ql inférieur à Pd; et on le concevra encore mieux si l'on observe que, pour une lame donnée, l'angle γ du tranchant devient d'autant moindre que α est plus aigu, car

cet angle γ doit toujours être pris dans le plan mené par la droite BE perpendiculairement au plan de la section (98).

Cependant, si α était très-petit, l deviendrait fort grand, et quand bien même alors Q se trouverait beaucoup moindre que P, la quantité d'action Ql n'en serait pas moins supérieure à Pd. D'un autre côté, lorsque $\alpha=90°$, $l=d$, la pression moyenne Q égale la résistance moyenne P, et $Ql=Pd$. Ainsi, de $\alpha=90°$ à une autre valeur moindre, Ql diminue, puis de cette valeur jusqu'à $\alpha=0$, la même quantité augmente; d'où il suit qu'elle a un minimum qui correspond à une certaine direction de l'effort.

Mais quelle est cette direction? reste-t-elle la même pour toutes les lames, ou varie-t-elle soit avec la qualité de l'instrument, soit avec l'angle du tranchant? Aucune expérience n'a encore été faite dans la vue de répondre à ces questions. A la vérité, il n'est pas nécessaire de connaître la valeur la plus convenable de α, dans le cas où le couteau est tenu librement par la main d'un homme : un tel moteur parvient aisément à trouver l'inclinaison sous laquelle il doit faire effort, pour éprouver le moins de fatigue ou pour vaincre la résistance en dépensant le moins de quantité d'action. Mais, si le couteau est lié à un mécanisme, il devient important de lui donner une direction ou une forme telle que l'angle α ait une valeur qui rende Ql à peu près un minimum.

Remarquons, en terminant ce chapitre, que les considérations théoriques qui précèdent, expliquent bien pourquoi il convient, en frappant du sabre, de le tirer vivement dans le sens de la lame. Elles rendent même raison de la courbure des sabres de cavalerie légère, car cette courbure maintient l'angle α à peu près constant pendant tout le trajet de la lame, et il est bon de

lui conserver la valeur que la traction a d'abord rendue pour ainsi dire convenable au minimum de γ.

DÉCOUPOIRS TOURNANTS.

101. Ce qui vient d'être dit des lames de sabre montre que ce ne serait pas assez, dans un découpoir à rotation ou *tournant*, de donner à α l'ouverture la plus avantageuse, pour une certaine position de l'opérateur. Il faut encore que cette ouverture se couserve pendant tout le mouvement circulaire. L'arête tranchante ne saurait donc être une droite.

Pour déterminer la courbe qu'il conviendrait d'employer, considérons un point M d'une arête M'M'' qui tourne autour d'un axe O (P. II, F. 4). Ce point décrit un arc de cercle dont OM est le rayon et auquel se trouve tangent l'effort-moteur rapporté à l'extrémité de OM. Par conséquent, l'angle α est ici l'angle NMT que forme MN, tangente de l'arc et perpendiculaire à MO, avec MT, tangente de l'arête courbe M'M''. Or, $NMT = \alpha = OMT - OMN$, et le dernier de ces trois angles est droit pour tous les points de M'M''. Si donc on veut que le premier, α, soit constant aussi, il faut rendre tel le second, OMT; en d'autres termes, il faut contourner l'arête tranchante selon une courbe M'M'' dont toutes les tangentes MT fassent le même angle avec les rayons vecteurs OM correspondants.

La circonférence s'offre tout d'abord; mais, si le découpoir présentait une arête circulaire qui eût son centre sur l'axe O, il tomberait dans la classe des scies rondes et tournantes, qui n'exercent point de pression sur le corps à diviser: ce ne serait plus une machine fonctionnant à la manière du couteau.

La seule courbe qui jouisse, avec la circonférence,

de la propriété conditionnelle ci-dessus énoncée, est la spirale logarithmique. En effet, rapportée à des coordonnées polaires, elle a pour équation $t = \text{Log}\, u$: l'abscisse t est un arc AB dont le rayon PA égale l'unité (F. 5), et qui va de l'origine A de la courbe, jusqu'au rayon vecteur PM du point que l'on considère ; ce même rayon PM est l'ordonnée u. Différentiant $t = \text{Log}\, u$, on obtient $dt = M\frac{du}{u}$, si M est le module du système de logarithmes, et il s'ensuit $\frac{udt}{du} = M$.

Cela posé, prenons $BC = dt$; l'arc de spirale MM' se confondra avec la tangente TM ; l'arc de cercle MD sera d'équerre sur PM' ; DM' vaudra du ; l'angle MM'D se trouvera formé par la tangente et un rayon vecteur infiniment voisin de celui PM du contact ; on pourra le prendre pour l'angle PMT' dont nous voulons démontrer l'invariabilité, et en le représentant par φ, on aura

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{MD}{MD} = \frac{MD}{du}. \text{ Or } MD : dt :: PM : PB :: u : 1.$$

Par conséquent, $MD = udt$, et $\text{tang}\, \varphi = \frac{udt}{du} = M$.

Ainsi, c'est bien une spirale logarithmique qui devrait former l'arête tranchante d'un découpoir tournant. Mais parmi toutes les spirales auxquelles s'applique l'équation générale $t = \text{Log}\, u$, laquelle choisir, pour que la valeur constante de α réduise au minimum la quantité d'action dépensée? Autrement, quelle base de logarithmes adopter, pour déduire l'arc t du rayon vecteur u? On reste donc obligé d'interroger l'expérience sur la valeur la plus avantageuse de α. Si l'on parvient à la connaître, on saura la valeur de φ ou de l'angle OMT (F. 4) qui égale $90° + \alpha$; on aura le module

$M = \text{Log}\, e$; on en déduira le logarithme népérien de la base a cherchée, au moyen de l'équation connue

$$\text{Log}' a = \frac{1}{\text{Log}\, e},$$

et finalement cette base sera déterminée.

102. Dans l'impossibilité où l'on s'est trouvé jusqu'à présent d'assigner la spirale logarithmique la plus propre aux découpoirs tournants, on s'est contenté de former en ligne droite leur arête tranchante; et même le centre de rotation a été placé sur le prolongement de cette droite. Or, ce n'est pas là, à beaucoup près, qu'il devrait être.

Il est facile de concevoir effectivement que, dans le cas d'une arête droite AB (P. II, F. 6), la position du centre de rotation O n'est bonne qu'autant qu'il en résulte la valeur BCD de α, la plus avantageuse, pour moyenne des angles formés par cette arête avec les perpendiculaires aux droites AO, BO, qui joignent ses extrémités au centre. Si, par exemple, la figure représente la position de la lame au moment où le milieu C du tranchant va pénétrer dans le corps, le point O devrait se trouver sur une droite CO qui fît avec AB un angle $\text{OCA} = 90° - \alpha$, afin que la direction CD de l'effort, d'équerre sur OC, formât avec CB précisément l'angle α; mais il faudrait encore que l'angle D'AB différât de α en dessous, comme D''BE en différerait en dessus, et pour que les différences fussent faibles, on aurait à mettre le centre O assez loin de AB. Or, il en résulterait un très-grand bras de levier OC pour la résistance principale, et la machine exigerait du moteur une forte pression, si l'on n'augmentait pas aussi, et convenablement, le bras de levier de la puissance.

Nous voyons donc que la forme rectiligne donnée à l'arête d'un découpoir rend la machine défectueuse, même quand l'axe de rotation est placé hors du prolongement de cette arête, et qu'il y aura beaucoup d'avantage à contourner le tranchant selon une spirale logarithmique, dès que l'expérience aura prononcé sur la valeur la plus favorable de l'angle α.

103. Les découpoirs tournants sont souvent mis en mouvement par la main de l'homme. Alors le corps C à diviser, posé sur une face résistante A (P. II, F. 7), est souvent placé entre le moteur Q et le centre de rotation O, attendu qu'il est plus facile de presser en descendant qu'en montant; le couteau se termine par une poignée, et l'effort est ordinairement exercé perpendiculairement à la droite OB qui joint le centre de rotation au point d'application B de la puissance.

Si donc nous représentons par P la résistance moyenne dont le bras de levier moyen est OC, la relation des forces sera $Q = P\frac{OC}{OB}$. Elle montre qu'on peut rendre Q aussi faible qu'il est nécessaire, en rapprochant le corps C du centre O et en éloignant la poignée B du même point.

Mais la fatigue d'un moteur animé peut augmenter malgré la diminution de l'effort : il suffit pour cela que cette diminution exige un certain accroissement de vitesse, afin que le travail soit fait dans le même temps. Il y a donc une valeur particulière du rapport $\frac{OC}{OB}$ qui répond au minimum de fatigue. L'expérience seule peut la faire connaître, parce que cette valeur dépend des facultés individuelles de l'homme-moteur. Toutefois, si le corps est facile à diviser, ou si P est faible, le rapport $\frac{OC}{OB}$ pourra évidemment être rendu plus grand que dans le

cas contraire, sans qu'il en résulte pour Q une valeur supérieure à celle qui convient au minimum de fatigue ou au maximum de la quantité d'action journalière.

Nous omettons la résistance accessoire produite par le frottement de l'essieu O, attendu que le rayon de cet essieu est ordinairement si petit en comparaison du bras de levier OB, qu'on peut bien négliger la portion d'effort qui devrait être ajoutée à Q.

104. Lorsqu'un découpoir tournant mu par l'homme est employé à la division d'un corps de forme cylindrique, le moteur tient d'une main ce corps placé sur un billot, tandis que de l'autre il fait fonctionner l'instrument, ou bien encore on emploie un support qui empêche tout glissement. Mais, s'il s'agit d'une feuille métallique, il est avantageux d'avoir simplement à la poser sur une sorte de table, et alors son frottement peut seul l'empêcher de reculer devant l'arête tranchante. Dans un tel cas, la condition d'annuler le recul suffit, comme on va le voir, pour déterminer la valeur de l'angle α que doit faire constamment la direction de l'effort avec les tangentes successives de l'arête tranchante, et par suite le module qui spécifie la spirale logarithmique selon laquelle doit être courbée cette arête.

Désignons toujours par P la résistance moyenne perpendiculaire aux tangentes MT de la courbe (P. II, F. 8), et, selon l'usage, plaçons l'essieu O dans le plan de la feuille A posée sur la table horizontale B. Au moment où le point M de l'arête tranchante pénétrera, le dernier élément de l'arc de cercle qu'il aura parcouru sera d'équerre sur la feuille, et la tangente de cet arc en M se trouvera verticale. Ainsi, c'est selon NM, perpendiculaire à l'horizontale OM, que sera dirigée la pression Q du couteau, et l'angle α vaudra l'angle NMT

compris entre NM et la tangente MT de la courbe. Or, la direction PM de la résistance P est d'équerre sur la tangente MT. C'est donc une partie $Q \sin \alpha$ de la pression Q qui doit vaincre P, et l'on a $Q \sin \alpha = P$. L'autre partie $Q \cos \alpha$, agissant de T vers M, fait glisser l'arête tranchante sur la feuille, et nous n'avons pas à nous en occuper.

Considérée par rapport aux faces horizontales de la feuille, la force $Q \sin \alpha$ cause une pression verticale $Q \sin^2 \alpha$ et une force horizontale $Q \sin \alpha \cos \alpha$ qui, agissant de O vers M, repousse l'objet à diviser. Mais de $Q \sin^2 \alpha$, résulte sur la table un frottement qui s'oppose au recul : il a pour valeur $f Q \sin^2 \alpha$, si nous désignons par f le coefficient relatif à la surface du massif de fonte B.

Considérée par rapport à l'élément incliné M du tranchant, la force $Q \sin \alpha$ produit un frottement dirigé de T vers M, qui a pour expression $f_1 Q \sin \alpha$, si nous représentons par f_1 le coefficient relatif à l'acier du couteau. Or, ce frottement se décompose : il donne une pression verticale $f_1 Q \sin \alpha \cos \alpha$, et augmente, par suite, de $f f_1 Q \sin \alpha \cos \alpha$ le frottement de la feuille sur la table ; sa partie horizontale $f_1 Q \sin^2 \alpha$, dirigée de A vers M, s'oppose aussi au recul.

Donc, pour que la feuille ne fuie pas sous la pression du couteau, et que la partie horizontale $P \cos \alpha$ de la résistance soit détruite par la partie $Q \sin \alpha \cos \alpha$ de la puissance, la résultante des trois frottements doit former une sorte d'appui, d'obstacle qui réagisse contre la poussée horizontale avec une force au moins égale à $Q \sin \alpha \cos \alpha$. Ainsi $f Q \sin^2 \alpha + f f_1 Q \sin \alpha \cos \alpha + f_1 Q \sin^2 \alpha = Q \sin \alpha \cos \alpha$ est la condition nécessaire pour qu'il n'y ait pas de recul. Cette équation fournit la relation $f \sin \alpha + f f_1 \cos \alpha + f_1 \sin \alpha = \cos \alpha$, et comme la fraction $f f_1$ est assez petite, on peut bien écrire $(f + f_1) \sin \alpha =$

cos α. Il en résulte $\tang \alpha = \frac{1}{f+f_1}$ ou $\cotang \alpha = f+f_1$, ce qui signifie que, dans les découpoirs de l'espèce dont il s'agit, l'angle α doit être tel que sa cotangente égale au moins la somme des coefficients des deux frottements.

105. Représentons maintenant par dt l'arc de cercle qui, ayant l'unité pour rayon, sépare deux rayons vecteurs consécutifs de l'arête tranchante, et nommons u le plus petit OM (P. II, F. 9). L'arc de cercle MC vaudra udt, et CM' sera du. Or, les arcs MC, MM' peuvent être regardés comme des droites, et le dernier comme une partie de la tangente MT. Donc, $\frac{MC}{CM'} = \tang MM'C$. D'ailleurs, la direction de l'effort Q est aussi bien d'équerre sur OM' que sur OM, et $\alpha = NM'T$, ce qui donne $\tang MM'C = \cotang \alpha = f+f_1$. Conséquemment,

$$\frac{udt}{du} = f+f_1,\ dt = (f+f_1)\frac{du}{u},\ \text{et}\ t = (f+f_1)\ \mathrm{Log}'u,$$

les logarithmes étant pris dans le système népérien.

Il s'ensuit que les arcs t sont les logarithmes des rayons vecteurs u, pris dans le système dont la base a pour logarithme népérien $\frac{1}{f+f_1} = \tang \alpha$; car si b est cette base, on a

$$\mathrm{Log}\,u = \frac{1}{\mathrm{Log}'b}\,\mathrm{Log}'u,\ \text{puis}\ \frac{1}{\mathrm{Log}'b} = f+f_1,\ \text{et}\ \mathrm{Log}'b = \frac{1}{f+f_1}.$$

106. Rien de plus facile que de tracer la courbe dont l'équation polaire est $t = (f+f_1)\mathrm{Log}'u$. Tirez une droite OM égale à l'unité (P. II, F. 10), et décrivez de O une circonférence qui ait OM pour rayon. Les arcs t devront être portés sur cette circonférence, à partir de M par exemple; d'où il suit que ce point ap-

partient à la courbe, puisque $u=1$ produit $\mathrm{Log}'u=0$ et $t=0$. Pour obtenir le point suivant M′, on donne à u une autre valeur, 2 par exemple. Multipliant le logarithme népérien de 2 par $f+f_1$, on a la valeur correspondante de t, qui se porte de M en D. Tirez alors la droite indéfinie OD, et prenez OM′ égale à deux fois OM. Un troisième point M″ se déterminerait d'une manière analogue. Quant aux points m, m', qui précèdent M, vous les trouverez en prenant pour u des valeurs fractionnaires, telles que $^1/_2$, $^1/_4$, etc., qui, rendant négatives celles de t, montrent que ces dernières doivent être portées au-dessous de M, de ce point en d, puis en d', etc. Du reste, il est visible que la spirale logarithmique ne peut passer par le centre O de rotation qu'au moment où t est devenu l'infiniment grand négatif, car c'est seulement alors que $u=0$; en d'autres termes, la courbe tourne toujours autour du point O et s'en rapproche continuellement, sans pouvoir jamais l'atteindre.

107. Afin de n'avoir plus à revenir sur les découpoirs tournants, nous dirons ici que, dans le cas où l'on applique à ces machines d'autres moteurs que l'homme, le communicateur est ordinairement un arbre garni de cames. Alors, le couteau-opérateur doit avoir son centre de gravité placé de façon que son poids suffise pour le relever, dès que la came a cessé d'agir, ou bien il faut employer un ressort qui, comprimé pendant l'action de la came, produise le même effet en se débandant.

Les découpoirs destinés à diviser des feuilles métalliques ont une arête tranchante qui offre un grand développement. Il en résulte que le bras de levier de la résistance augmente de beaucoup pendant l'abaissement du couteau. Si donc l'effort du moteur est constant à la distance 1 du centre de rotation, il faut que son bras

de levier croisse aussi pendant l'action de chaque came. Or, ce bras de levier est le rapport des perpendiculaires abaissées des deux centres de rotation sur la normale commune à la courbe de la came et à celle du talon de l'opérateur.

En effet, soit P la résistance de la feuille, q la pression de la came sur le talon, et Q l'effort constant du moteur à la distance CE$=1$ (P. II, F. 11). Dans le mouvement uniforme, il y a équilibre entre la puissance q et la résistance P, de sorte que q:P::OA:OB, et que $q=\mathrm{P}\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}$. Mais q étant aussi la pression du talon sur la came, forme une résistance pour l'arbre, et q:Q::1:CD, ou bien $q=\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{CD}}$. Donc, $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{CD}}=\mathrm{P}\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}$, $\mathrm{Q}\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{CD}}=\mathrm{P}\times\mathrm{OA}$, et par suite $\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{CD}}$ est le bras de levier de Q, comme OA est celui de P.

Ainsi, le rapport $\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{CD}}$ doit varier comme la perpendiculaire OA : quand cette perpendiculaire se trouvera double de ce qu'elle était au commencement de l'abaissement du couteau, le rapport $\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{CD}}$ devra être double aussi de ce qu'il était à la même époque. Une telle condition ne peut être remplie qu'au moyen d'un tracé convenable pour chacune des courbes de communication, et ce tracé qui diffère essentiellement de celui qu'exige le cas où le moment de la résistance est constant, n'a encore été l'objet d'aucune recherche.

CISAILLES.

108. Nous devons placer dans la classe des découpoirs tournants à tranchant droit les cisailles et les

paires de ciseaux qu'on emploie à divers usages ; car il est toujours possible de faire fonctionner ces instruments en maintenant fixe l'une des branches, tandis que l'autre tourne autour du clou qui les unit. La théorie précédemment exposée s'applique donc aux cisailles et aux ciseaux à deux lames; toutefois la valeur de l'angle α, relative au minimum de la quantité d'action dépensée, n'est pas toujours celle qui convient à la nature et à l'épaisseur du corps qu'on veut couper.

Soient en effet C (P. II, F. 12) le milieu de la partie employée AB de la lame mobile, et CD une perpendiculaire au rayon OC; l'angle BCD sera celui qui a été désigné par α. Nommons en outre β l'angle BEF que forment entre elles les deux lames, quand le point A commence à presser le corps, c'est-à-dire l'angle qu'exige l'épaisseur de ce corps prise selon AG, perpendiculaire à la lame fixe EF. L'effort P exercé en A perpendiculairement à AB donne une force $P \sin \beta$ parallèle à EF, qui repousse le corps, une pression $P \cos \beta$ d'équerre sur la même droite, et un frottement $fP \cos \beta$ sur la lame fixe, lequel, agissant de F en E, s'oppose au recul. Mais il y a de plus, sur la lame mobile AB, un frottement fP dirigé de B vers A : sa partie $fP \cos \beta$ s'ajoute au frottement qui a lieu sur EF et le double; l'autre partie $fP \sin \beta$ produit une pression perpendiculaire à la même droite, et par suite un troisième frottement $f^2 P \sin \beta$ dirigé de F vers E. Comme ce dernier peut être négligé, la condition nécessaire pour que le corps ne recule point, est $P \sin \beta = 2fP \cos \beta$ tout au plus, ou $\tang \beta = 2f$.

Ainsi, l'angle BEF ou la position E de l'intersection des deux tranchants dépend de la nature du corps, puisque c'est cette nature qui fait la valeur du coefficient f.

Mais la position du point C au milieu de AB donne

$$EC = EA + AC = EA + \frac{AB}{2} = \frac{2EA + AB}{2} = \frac{2EA + EB - EA}{2}$$

$$= \frac{EA + EB}{2} = \frac{AG + BF}{2 \sin \beta},$$ ce qui montre que la distance EC varie soit avec l'épaisseur AG, soit avec la valeur de β ou la nature du corps. Si donc l'angle BCD qui correspond à une certaine épaisseur et à un certain angle β, a pour ouverture la valeur la plus avantageuse de α, il ne l'aura plus quand changera l'épaisseur ou la nature du corps, car le point C se déplacera, et il en sera de même du rayon OC, ainsi que de sa perpendiculaire CD.

109. La valeur de l'angle BCD ne pourrait être, pour toutes les circonstances, la plus favorable au moteur que dans le cas où la position du centre O de rotation serait susceptible de varier à volonté. Effectivement, ayant déterminé l'angle β, d'après la nature du corps, au moyen de la relation tang $\beta = 2f$, on trouverait la position du point A par l'équation $EA = \frac{AG}{\sin \beta}$, dans laquelle AG serait l'épaisseur donnée. Marquant ensuite le milieu C de AB, on tirerait par ce point une droite CD qui fît avec CB l'angle α le plus avantageux; et enfin CO, perpendiculaire à CD, indiquerait la position du point O, par sa rencontre avec la ligne milieu de l'une des branches du découpoir. Il faudrait donc que ces branches fussent percées d'un grand nombre de trous très-voisins, pour que l'instrument pût servir, avec le même avantage, à diviser tous les corps.

110. Lorsque la position du clou est invariable, la condition d'employer l'angle α le plus favorable détermine l'épaisseur à donner aux corps d'une nature connue qu'il s'agit de découper.

En effet, on peut mener une droite *cd* qui fasse avec *c*B l'angle α, puis une perpendiculaire *co* à *cd*. Tirant alors OC parallèle à *oc*, on obtient le point C tel que CD, d'équerre sur OC, fait avec CB l'angle α. Il reste alors à ouvrir l'angle BEF de manière que l'égalité $\tang \beta = 2f$ soit satisfaite, à prendre CA = CB, et à tracer AG perpendiculairement à EF. La longueur AG est l'épaisseur cherchée.

111. Enfin, il est évident que le rapport du bras de levier de la puissance à celui de la résistance doit être proportionné à la dureté du corps à découper. Aussi, dans les cisailles, qui sont destinées à diviser des feuilles métalliques, les lames OB sont plus courtes que les parties situées en arrière du clou O, et au contraire, dans les ciseaux à papier, les lames sont plus longues que les parties comprises entre le clou et les anneaux, attendu que l'effort à exercer étant très-faible, il convient d'agir sur une grande longueur à chaque oscillation.

EMPORTE-PIÈCES.

112. Dans plusieurs industries, des corps minces, feuilles ou plaques, doivent être découpés selon le contour d'une figure polygonale. Le découpoir qui sert à cette opération est appelé *emporte-pièce*, et ne ressemble point à ceux que nous avons précédemment décrits. Il présente en général un prisme de fer dont l'une des bases porte un rebord en acier et tranchant. Ce rebord a pour contour celui de la figure qu'on veut obtenir, et la saillie qu'il forme sur la base du prisme surpasse de quelque peu l'épaisseur de l'objet à découper.

Il n'y a évidemment qu'un seul cas où l'emporte-

pièce puisse être mis en mouvement par un balancier (93) sans interposition d'un modificateur : c'est celui où le contour du tranchant forme un cercle. Lorsque ce contour a toute autre figure, l'instrument ne peut se mouvoir que selon l'axe du prisme, c'est-à-dire perpendiculairement à son arête tranchante, ce qui n'est pas le mode le plus favorable.

113. La quantité d'action consommée par le choc d'un emporte-pièce, pour la déformation d'une feuille ou d'une plaque, égale Ph, P étant le poids de l'instrument, et h la hauteur due à la vitesse qui a lieu au moment de la percussion. Si la déformation pouvait être arbitraire, le rapport de P et de h serait tout à fait indifférent, non pas quant au moteur, mais quant au résultat du travail : pourvu que le produit Ph ne fût pas altéré, on pourrait en faire varier les facteurs à volonté, sans cesser d'avoir une déformation due à la quantité d'action Ph. Mais ordinairement la feuille ou la plaque doit être déformée selon une figure donnée, et non selon une autre. Il y a donc une certaine relation à établir entre les nombres P, h.

On sait effectivement que si un mobile animé d'une grande vitesse vient à rencontrer un corps retenu par des obstacles, il enlève toutes les particules qui s'opposent à son passage, sans causer aux autres aucun dérangement sensible. Par exemple, la balle que lance une arme à feu fait un trou rond dans le carreau de vitre qu'elle traverse avec une grande vitesse, et n'y produit aucune fente. Lorsqu'au contraire le mobile a peu de vitesse, tout le corps choqué est ébranlé, la déformation s'étend au-delà des points frappés, et ressemble beaucoup à celle qui résulterait d'une forte pression.

Si donc le corps à découper est fragile ou tenace, et

que le contour de la section doive être bien arrêté, il faut frapper l'emporte-pièce avec une petite masse, mais de manière qu'elle ait une grande vitesse à l'instant du choc. Quand au contraire la matière est de nature à céder facilement, il convient, pour produire la même quantité d'action que dans le cas précédent, d'augmenter la masse et de diminuer la vitesse; car, en réalité, l'inégalité des résistances qu'offrent les divers points du corps à découper, empêche les vitesses des points correspondants du tranchant d'être rigoureusement égales et parallèles, et par suite, l'emporte-pièce pourrait s'enfoncer bien plus d'un côté que de l'autre, si la pénétration était très-rapide.

MACHINES MUES PAR LE CHEVAL.

114. Les machines mues par des chevaux sont fixes ou locomotives. De celles de la seconde espèce, l'artillerie n'emploie que les voitures, et leur théorie a été exposée dans la première partie de ce cours. Quant aux machines fixes, nous n'avons à étudier que les *manéges.* Il y en a de deux sortes : dans les uns, la puissance est appliquée presque immédiatement à la *machine-ouvrière*, c'est-à-dire à l'ensemble des pièces qu'exige la nature de l'ouvrage, quel que soit le moteur; dans les autres, une *machine-motrice,* composée d'un récepteur et de communicateurs, est interposée entre la puissance et la machine-ouvrière. Les premiers peuvent être appelés *manéges simples :* les huileries établies dans de petits locaux en sont des exemples; les seconds prennent le nom de manéges à engrenages.

MANÈGE.

115. Tout manège est mis en mouvement par traction. L'effort du cheval s'exerce sur un levier nommé *flèche*, assemblé dans un arbre vertical et pivotant. La flèche est horizontale ou inclinée, mais toujours fortement arc-boutée. La seconde position convient au cas où il y a nécessité d'agir dans l'intervalle compris entre la piste circulaire et l'arbre.

Le cheval est parfois attelé au moyen de chaînes très-courtes attachées à une espèce d'arceau qui tient à la flèche et embrasse le dos de l'animal un peu en arrière du collier. Alors le bras de levier du moteur est la moyenne des rayons des deux circonférences que décrivent les extrémités de l'arceau. Mais souvent la traction est transmise par des traits fixés à un palonnier; dans ce cas, la droite qui va du point d'attache A du palonnier (P. II, F. 13) au milieu B de celle qui joint les points d'attache des traits sur le collier, est une corde AB de la piste moyenne; le bras de levier du moteur égale CD, perpendiculaire abaissée du centre de rotation au milieu de AB, et l'on a $CD = \sqrt{\left(\overline{AC}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}\right)}$.
Cette longueur est moindre que AC; mais elle s'en rapproche d'autant plus que le rayon de la piste moyenne est plus grand, puisque AB a une valeur constante d'environ $2^m,78$. Aussi, va-t-on jusqu'à faire AC de 7 mètres, lorsque la localité le permet. Il en résulte en outre l'avantage d'obtenir du cheval un plus grand effort, car évidemment une piste très-courbe le contraint à prendre et à conserver une position gênée qui ne lui permet pas de déployer sa force comme dans un mouvement rectiligne.

La limite inférieure du rayon AC est d'environ 5 mètres. Une moindre valeur diminuerait trop l'effort et ruinerait promptement le moteur.

116. Sur une piste d'un rayon de 5^{m} au moins, le cheval de manége, doué d'une force moyenne, exerce un effort de 45^{kg}, soutient une vitesse de $0^{m},9$ par seconde, pendant 8 heures chaque jour, et produit conséquemment une quantité d'action de $1\,166\,400^{k}$. Comme le même cheval, attelé sur une voiture, pourrait exercer, pendant 10 heures par jour, un effort de 75^{kg}, en parcourant 1^{m} par seconde, ou produire une quantité d'action de $2\,700\,000^{k}$, le mode d'action qu'impose le manége réduit le travail mécanique du moteur de $1\,533\,600^{k}$ ou de plus de moitié.

117. Puisque le cheval de manége ne fait que $0^{m},9$ par seconde, il parcourt seulement 54^{m} par minute, et le nombre des tours de l'arbre dans le même temps est $\frac{54}{2\pi R}$, R désignant le rayon de la piste moyenne. On aurait, avec la limite inférieure de ce rayon,

$$\frac{54}{2\pi\times 5}=\frac{5,4}{3,1416}=1,7,$$

ou à peu près 1 tour et demi par minute. Une aussi faible vitesse de rotation est rarement suffisante pour la machine-ouvrière, et voilà pourquoi on lie si souvent le récepteur d'un manége à l'opérateur par un système de roues propre à augmenter la vitesse et à la rendre telle que l'exige la nature du travail de l'outil. Ce système se compose ordinairement d'une *couronne*, roue dentée montée sur l'arbre vertical de la machine-motrice, et d'une lanterne ou d'un pignon qui, engrenant avec la couronne, communique le mouvement à l'arbre de la machine-ouvrière.

118. C'est dans l'hypothèse d'un pareil mécanisme que nous allons établir, d'une manière générale, la relation de la puissance et de la résistance principale; nous admettrons même que la machine-ouvrière a pour objet de tourner un corps métallique, afin de considérer un des cas les plus compliqués, et d'offrir un exemple propre à montrer comment doit être conduit le calcul dans toutes les circonstances possibles.

Le corps à tourner, placé horizontalement, est supporté par deux lunettes A, B (P. II, F. 14). Supposons-lui une forme conique; désignons par ρ, ρ', ses rayons aux points A, B, et par a, b, les distances des mêmes points au centre de gravité G.

Le ciseau qui enlève les copeaux métalliques est perpendiculaire au plan vertical AB, et son arète tranchante se trouve dans le plan horizontal de l'axe du corps. D'ailleurs, les copeaux sont formés de bas en haut. Par conséquent, le ciseau tend à soulever le corps verticalement, et il faut retrancher du poids P′ de ce corps la résistance principale P qu'oppose l'outil à la rotation, pour avoir la pression exercée sur les deux lunettes. Elle est donc $P'-P$.

Le point d'application de P n'est pas constant comme celui de P′: tantôt le ciseau mord entre A et G, tantôt entre B et G. Mais, si le centre de gravité G n'est pas très-éloigné du milieu de AB, on pourra bien considérer les distances AG, BG, comme les moyennes de celles des deux lunettes au point d'application variable de la résistance principale. Alors, on aura à répartir entre les points A, B, une pression $P'-P$ exercée à des distances a, b de ces points. Soient respectivement p, p' les deux composantes qui en résulteront. Elles seront déterminées par les relations

$$p : P'-P :: b : a+b, \quad p' : P'-P :: a : a+b,$$

ou $p=(P'-P)\frac{b}{a+b}$, $p'=(P'-P)\frac{a}{a+b}$.

Les pressions p, p' causent dans les lunettes un frottement total $f'(p+p')$; cette résistance accessoire a évidemment pour moment $f(p\rho+p'\rho')$.

Nous considérerons les moments au lieu des quantités d'action, attendu que tous les mouvements de la machine sont circulaires ; qu'en pareil cas, chaque quantité d'action relative à un tour complet égale le moment multiplié par 2π, et que, par conséquent, on peut substituer les moments aux quantités d'action dépensées circulairement, comme dans toutes les circonstances, on peut y substituer les forces-vives.

Puisque le corps à tourner est supposé conique, le moment de la résistance principale P est variable. Employons sa valeur maximum, la plus défavorable à la puissance. Elle est Pr, si r désigne le plus grand rayon, supérieur ou égal à ρ, et le moment de toute la résistance qui provient du corps vaut $Pr+f'(p\rho+p'\rho')$.

L'objet à tourner doit être lié à l'arbre horizontal d'un pignon vertical C, et cet arbre s'appuie par deux tourillons égaux sur des supports D, E. Or, l'effort horizontal Q' que la couronne F exerce sur le pignon, se compose avec le poids p'' de C et de l'arbre DE pour presser les tourillons contre leurs encastrements, et comme les deux forces sont d'équerre, elles ont pour résultante $\sqrt{Q'^2+p''^2}=0,96\,Q'+0,4p''$, attendu que Q' est toujours plus grand que p''. Le frottement qui aura lieu dans les encastrements sera donc en totalité $f'_1(0,96\,Q'+0,4p'')$, et son moment vaudra

$$f'_1\rho''(0,96\,Q'+0,4p''),$$

si ρ'' est le rayon des tourillons.

Supposons coniques les deux roues engrenées, et désignons par r' le rayon moyen du pignon, pris depuis l'axe jusqu'au contact médium des dents. $Q'r'$ sera le moment de la pression exercée par la couronne, et comme cette pression doit faire équilibre à toutes les résistances précédentes, pendant le mouvement uniforme de la machine,

$$Q'r' = Pr + f'(p\rho + p'\rho') + f'_1 \rho''(0,96\,Q' + 0,4\,p''),$$

ou
$$Q' = \frac{Pr + f'(p\rho + p'\rho') + 0,4\,f'_1\,p''\rho''}{r' - 0,96\,f'_1\,\rho''}.$$

Mais Q' est relativement au moteur une résistance qui occasionne un frottement dans l'engrenage. Ce frottement est regardé comme égal à celui qui aurait lieu si les roues étaient cylindriques, avec le même nombre de dents chacune (57), et sa valeur ainsi prise est d'une approximation suffisante pour la pratique, par suite du tracé propre à l'engrenage conique et de la faible épaisseur des dents. On a donc pour la résistance totale qui, à l'extrémité de R', rayon moyen de la couronne, s'oppose au mouvement de cette roue,

$$Q' + \pi f Q' \frac{m+m'}{mm'} = Q'\left(1 + \pi f \frac{m+m'}{mm'}\right) = Q''.$$

Il nous reste maintenant à évaluer le frottement latéral de l'arbre vertical III, et celui du pivot sur le fond de la crapaudine I. Le premier dépend uniquement de Q'', si les chevaux sont en nombre pair, ou s'il y en a seulement 3 : dans le premier cas, ils sont placés deux à deux aux extrémités d'un même diamètre, et la résultante de leurs efforts sur l'axe est évidemment nulle ; dans le second cas, les trois palonniers sont disposés de manière à diviser, par leurs points d'attache, la circon-

férence de la piste en trois parties égales; la résultante de deux des tractions est égale et directement opposée à la troisième, puisque toutes trois sont supposées de même intensité; par conséquent, la résultante de leurs efforts sur l'axe est encore nulle.

C'est donc seulement quand les chevaux forment un nombre impair supérieur ou inférieur à 3, que l'effort du moteur influe sur le frottement du collier de l'arbre. Mais nous n'avons à considérer que le cas d'un seul cheval, parce qu'au-delà le nombre est toujours pair, afin que les tractions soient parallèles deux à deux.

Or, le tirage le plus favorable au développement de la force du moteur est celui qui a lieu sous un angle de 11°. Conséquemment, l'effort Q du cheval s'exerce sur des traits inclinés de 11° par rapport à l'horizon, et se décompose en deux forces, l'une horizontale $Q \cos 11°$, l'autre verticale $Q \sin 11°$. La direction de la première variant relativement à celle de Q'', qui est constante, il faudrait à la rigueur agir comme pour le treuil à manivelle (9); mais afin d'obtenir une équation plus simple, nous supposerons le cas le plus défavorable, celui où Q'' et $Q \cos 11°$ sont parallèles et de même sens, celui où le cheval agit en un point diamétralement opposé au pignon C. Nous pouvons bien admettre aussi, sans altérer notablement le frottement latéral, que chacune des forces Q'', $Q \cos 11°$, presse uniquement le point d'appui le plus voisin. Il s'ensuit $f_2' Q''$ pour le frottement latéral dans le collier H, $f'_3 Q \cos 11°$ pour celui du pivot I, et $f'_2 Q'' \rho'''$, $f'_3 \rho^{\text{iv}} Q \cos 11°$ pour leurs moments, si ρ''' désigne le rayon du tourillon cylindrique, et ρ^{iv} le rayon moyen de la partie frottante du pivot conique.

Quant au frottement sur le fond de la crapaudine, il est produit par l'excès du poids p''' de la couronne et

de l'arbre vertical sur la partie $Q \sin 11^\circ$ de l'effort moteur. Sa valeur est donc $f''(p''' - Q \sin 11^\circ)$, et son moment égale ${}^2/_3 f'' \rho^{v}(p''' - Q \sin 11^\circ)$, si ρ^{v} désigne le rayon du petit cercle frottant (65).

Ainsi, à cause de l'équilibre qui a lieu entre $Q \cos 11^\circ$ et toutes les résistances de la machine motrice, pendant le mouvement uniforme, on doit avoir, en désignant par R le bras de levier de la puissance,

$$RQ\cos 11^\circ = Q''R' + f'_2 Q'' \rho''' + f'_3 \rho_{v} Q \cos 11^\circ + {}^2/_3 f'' \rho^{v}(p''' - Q \sin 11^\circ)$$

ou
$$Q = \frac{Q''(R' + f'_2 \rho''') + {}^2/_3 f'' \rho^{v} p'''}{(R - f'_3 \rho^{iv}) \cos 11^\circ + {}^2/_3 f'' \rho^{v} \sin 11^\circ}.$$

Lors donc que P, résistance qu'oppose le ciseau à la rotation, sera donnée ou déterminée préalablement par expérience, on pourra calculer les pressions p, p', puis la pression Q' qui a lieu entre les deux roues engrenées, puis Q'', résistance de la machine motrice, et enfin Q, l'effort total du moteur. Ce dernier résultat, divisé par 45^{kg}, effort continu d'un cheval attelé au manége, fera connaître le nombre des chevaux qui devront agir à la fois.

Réciproquement, si un tour à manége exige n chevaux, $45^{kg} \times n = Q$ sera la force motrice totale, et l'on en déduira successivement Q'', Q' et P.

TOUR A DOUBLE EFFET.

119. La théorie qui vient d'être exposée est celle du tour dont on se sert, dans les fonderies, pour parfaire la surface extérieure des bouches à feu; elle s'applique aussi aux foreries de canons ou de fusils.

Quelques tours de fonderie offrent un manége dont la couronne engrène avec une lanterne. Une autre lan-

terne d'un plus grand diamètre est montée sur le même arbre D'E' (P. II, F. 15). Elle fait tourner deux hérissons placés de chaque côté. L'arbre horizontal DE de chaque hérisson a aussi deux supports, et se lie au *faux-bouton* K (F. 16), prisme carré qui fait corps, par une de ses bases, avec le bouton de culasse L. Quand le faux-bouton est garni de deux *oreilles* M, la liaison s'opère au moyen d'une *grifle*, forte tenaille de fer qui termine l'arbre. Si le faux-bouton est dépourvu d'oreilles, il s'engage dans un manchon de fonte dont le creux est aussi un prisme carré, et qui fait suite pareillement à l'arbre du hérisson.

On peut donc tourner deux bouches à feu en même temps. Chacune repose par la plate-bande de culasse sur l'une des lunettes, et par la *portée* sur l'autre. Cette *portée* est une surface cylindrique formée préalablement entre la tranche de la bouche et le bourlet de la tulipe. Pour la faire, on place la bouche à feu sur un tour à pointes qui s'engagent dans deux trous coniques pratiqués, l'un au centre de la tranche de la bouche, l'autre au centre de la base visible du faux-bouton.

120. La relation de la puissance à la résistance dans le tour à double effet des fonderies dépend du frottement produit par l'engrenage d'une roue dentée et d'une lanterne dont les axes sont parallèles, puis du frottement dû à l'engrenage d'une roue dentée et d'une lanterne dont les axes sont d'équerre. Il faut donc d'abord déterminer les valeurs de ces deux résistances accessoires.

Si les fuseaux d'une lanterne étaient réduits à leur axe, les dents du hérisson devraient avoir pour profil un arc de l'épicycloïde engendrée par le roulement du cercle primitif de la première sur le cercle primitif du second. Il s'ensuit que, dans la réalité, le profil est une

courbe parallèle à l'arc d'épicycloïde, et que la normale AB élevée sur cette courbe au contact B du fuseau conduit (P. II, F. 17) passe par le centre de ce fuseau et par le contact A des deux cercles primitifs O, O'.

Ainsi, dans la formule $F.C = f\frac{R+R'}{R}\int Nnd\theta'$, établie pour la quantité d'action consommée par le frottement de deux roues qui se conduisent (56), la pression N agit selon AB, et a pour bras de levier O'C, perpendiculaire au milieu de la corde dont AB fait partie. Comme N provient de la force tangentielle Q, dont le bras de levier est R', rayon de la lanterne, on doit avoir

$$N \times \overline{O'C} = QR', \quad \text{ou} \quad NR'\cos\frac{\theta'}{2} = QR',$$

si nous prenons pour θ' l'arc de rayon 1 compris entre la droite des centres O O' et la position qu'a l'axe du fuseau au moment où cesse le contact.

La normale AB ou $n = 2AC - r = 2R'\sin\frac{\theta'}{2} - r$, r étant le rayon du fuseau conduit. Par conséquent, la quantité d'action dépensée pour le frottement d'un hérisson et d'une lanterne, pendant une rotation θ', vaut

$$f\frac{R+R'}{R}\int\frac{Q}{\cos\frac{\theta'}{2}}\left(2R'\sin\frac{\theta'}{2} - r\right)d\theta' =$$

$$2fQR'\frac{R+R'}{R}\int\operatorname{tang}\frac{\theta'}{2}d\theta' - fQr\frac{R+R'}{R}\int\frac{d\theta'}{\cos\frac{\theta'}{2}}.$$

$$\text{Or } \operatorname{tang}\frac{\theta'}{2} = \frac{\theta'}{2} + \text{etc.}, \qquad \cos\frac{\theta'}{2} = 1 + \text{etc.},$$

et l'on peut se borner au premier terme de chacune de

ces séries, attendu qu'elles sont très-convergentes. Intégrant donc entre θ'' et θ', on trouve que la quantité d'action consommée pendant une rotation $\theta'-\theta''$, égale à l'arc qui sépare les rayons menés du centre O' aux centres des sections droites de deux fuseaux consécutifs, est

$$fQ\frac{R+R'}{R}\left[R'\frac{\theta'^2-\theta''^2}{2}-r(\theta'-\theta'')\right].$$

Mais l'arc a compris entre les axes de ces fuseaux vaut $R'(\theta'-\theta'')$, et le très-petit arc $R'\theta''$ peut être remplacé par son sinus r. Donc,

$$R'\frac{\theta'^2-\theta''^2}{2}-r(\theta'-\theta'')=\frac{a}{2}(\theta'+\theta'')-\frac{ar}{R'}=$$
$$\frac{a}{2}\left(\theta'+\frac{r}{R'}\right)-\frac{ar}{R'}=\frac{a}{2}\left(\theta'-\frac{r}{R'}\right)=\frac{a}{2}(\theta'-\theta'')=\frac{a^2}{2R'},$$

et la quantité d'action devient

$$fQ\frac{R+R'}{RR'}\cdot\frac{a^2}{2}.$$

Divisant par a, chemin circulaire que parcourt, pendant la rotation $\theta'-\theta''$, le point d'application de l'effort tangentiel F qu'exige le frottement, on a enfin

$$F=fQ\cdot\frac{R+R'}{RR'}\cdot\frac{a}{2}=fQ\frac{m+m'}{m}\cdot\frac{2\pi R'}{2R'm'}=\pi fQ\frac{m+m'}{mm'},$$

m, m' représentant respectivement le nombre des dents et le nombre des fuseaux.

Ainsi, soit que le hérisson conduise la lanterne, soit que la lanterne conduise le hérisson, la formule du frottement de leur engrenage est absolument la même que celle d'une roue dentée et d'un pignon.

121. Passons à l'engrenage d'une lanterne et d'un *rouet*, c'est-à-dire d'une roue dont les dents sont en saillie sur l'une des faces planes, comme dans les couronnes de certains manéges. Ces dents doivent présenter des surfaces coniques dont les bases soient des épicycloïdes sphériques, et les fuseaux qui, à la rigueur, devraient être des cônes circulaires, sont ordinairement de courts cylindres. Alors la pression d'une dent sur le fuseau conduit s'exerce, comme pour le cas de l'épicycloïde plane (120), dans le plan qui contient l'axe du fuseau et le point commun aux deux circonférences primitives. Par conséquent, la quantité d'action consommée par le frottement dû au glissement perpendiculaire à l'axe de la lanterne est encore $fQ.\frac{R+R'}{RR'}.\frac{a^2}{2}$.

Mais il y a aussi glissement parallèle aux faces planes de la couronne ou à l'axe du fuseau conduit. Le frottement qui en résulte est produit par la pression $N=\frac{Q}{\cos\frac{\theta'}{2}}$, ou par la pression constante Q, si nous continuons de prendre l'unité pour valeur de $\cos\frac{\theta'}{2}$, et le chemin, perpendiculaire à la direction de Q, le long duquel a lieu ce frottement, est le sinus-verse DE de l'arc $R\theta$ ou a dont tourne la couronne pendant le contact. La quantité d'action consommée vaut donc approximativement $fQ\times DE$. Or $DE : R\sin\theta :: R\sin\theta : EF$; $R\sin\theta$ peut être remplacé par a, et EF par DF ou 2R. Conséquemment, $fQ\times DE=fQ\frac{a^2}{2R}$; la résistance accessoire totale due à l'engrenage exige une quantité d'action

$$fQ\frac{a^2}{2R}\left(\frac{R+R'}{R'}+1\right)=fQ.\frac{R+2R'}{RR'}.\frac{a^2}{2},$$

et la force tangentielle qu'absorbent en totalité les deux frottements,

$$F = fQ \cdot \frac{R + 2R'}{RR'} \cdot \frac{a}{2} = \pi f Q \frac{m + 2m'}{mm'}.$$

Toutefois, le second frottement est négligé dans la pratique, comme fort peu important, et l'on emploie pour le cas d'un rouet, la formule

$$F = \pi f Q \frac{m + m'}{mm'},$$

relative à celui d'un hérisson.

122. Pour établir la relation de la puissance motrice Q qui agit à une distance R de l'axe de la couronne, dans un tour à double effet, et de la résistance principale P, somme des résistances opposées aux deux outils, nous désignerons par P' la somme des poids des deux canons, par p la somme des pressions exercées sur les lunettes de culasse, par p' celle des pressions exercées sur les lunettes de portée, et par p'' celle des poids des deux hérissons et de leurs arbres.

Les pressions p, p' se déterminent comme au n.° 118, et le frottement des lunettes a encore pour moment $f'(p\rho + p'\rho')$. Mais le moment du frottement des tourillons D, E (P. II, F. 15) est simplement $f'_1 \rho'' p''$, attendu que l'effort tangentiel $\frac{Q'}{2}$ de chaque hérisson augmente la pression sur les tourillons de l'un, et la diminue sur les tourillons de l'autre. On a donc simplement

$$Q'r' = Pr + f'(p\rho + p'\rho') + f'_1 p'' \rho'',$$

ou

$$Q' = \frac{Pr + f'(p\rho + p'\rho') + f'_1 p'' \rho''}{r'}.$$

La résistance qu'offre la grande lanterne se compose de Q′ et du frottement de l'engrenage (120); elle vaut donc $Q' + \pi f Q' \frac{m+m'}{mm'}$, et son moment, par rapport à l'axe D′E′, est $Q'r_2\left(1 + \pi f \frac{m+m'}{mm'}\right)$.

Soient p_1 le poids des deux lanternes jointes à leur arbre, et Q_1, r_1, l'effort tangentiel et le rayon de la petite. Les tourillons de l'arbre D′E′ auront un frottement $f'_1(0{,}96Q_1 + 0{,}4p_1)$ dont le moment sera $f'_1\rho_1(0{,}96Q_1 + 0{,}4p_1)$. Conséquemment,

$$Q_1r_1 = Q'r_2\left(1 + \pi f \frac{m+m'}{mm'}\right) + f'_1\rho_1(0{,}96Q_1 + 0{,}4p_1),$$

et

$$Q_1 = \frac{Q'r_2\left(1 + \pi f \frac{m+m'}{mm'}\right) + 0{,}4f'_1p_1\rho_1}{r_1 - 0{,}96f'_1\rho_1}.$$

La résistance Q″ opposée à la couronne est la somme de Q_1 et du frottement de l'engrenage (121). Si donc n, n' sont les nombres de dents et de fuseaux,

$$Q'' = Q_1 + \pi f Q_1 \frac{n+n'}{nn'}.$$

Enfin, comme dans le n.° 118,

$$Q = \frac{Q''(R' + f'_2\rho''') + {}^2/_3 f'' p''' \rho^{v}}{(R - f'_3\rho'^{v})\cos 11^\circ + {}^2/_3 f'' \rho^{v} \sin 11^\circ}.$$

FORERIES A MANÈGE.

123. La seule différence d'une forerie à un tour consiste dans la position et la forme de l'opérateur.

Au lieu d'un ciseau qu'un chariot promène le long de la bouche à feu, un foret est placé selon l'axe et poussé par un cric, d'abord contre la tranche de la bouche, puis contre le fond du trou cylindrique qu'il creuse pour former l'âme. Cependant, la forerie ressemble plutôt au tour général qui nous a servi d'exemple, qu'au tour à double effet que nous avons décrit ensuite, car on ne fore jamais qu'une pièce à la fois. Ainsi, les formules du n.° 118 sont immédiatement applicables aux foreries de canon, pourvu qu'on prenne pour r le rayon du cylindre creusé par chaque foret, ou le rayon de l'âme, si l'on veut embrasser d'un seul coup l'opération tout entière.

124. Le calcul d'une forerie de fusils est analogue à celui du tour à double effet, si elle est mise en mouvement par des chevaux ; car elle se compose d'une couronne de manége qui engrène avec une lanterne sur l'arbre horizontal de laquelle sont montés quatre rouets (P. II, F. 19), et ces rouets mettent en mouvement chacun une lanterne horizontale dont l'arbre est lié au foret. C'est donc le foret qui tourne, tandis que le canon de fusil, forgé en tube, formant un cylindre creux imparfait, et porté par une espèce de chariot A nommé *sépé* (F. 20), est poussé contre l'outil par un ouvrier qui s'aide d'un levier coudé appelé *crosse*. Le sépé n'est autre chose qu'un double T qui glisse dans les coulisses d'un cadre rectangulaire B ; des chevilles implantées sur les longs côtés de ce cadre servent d'appuis à la crosse.

MACHINES MUES PAR L'EAU.

Toutes les machines mues par l'eau, dans les usines d'artillerie, ont pour récepteur une roue hydraulique,

et leur perfection dépend de la grandeur du rapport qui a lieu entre le travail de cette roue et celui dont l'eau motrice est capable. Il convient donc, pour simplifier l'étude de ces machines, d'apprendre d'abord comment se détermine la quantité d'action que peut fournir le moteur, puis de comparer les diverses roues hydrauliques, au moyen des pertes de force qu'elles occasionnent.

EAU MOTRICE.

125. Pour que l'eau puisse être employée à mouvoir une machine, il faut qu'elle tombe d'une certaine hauteur, ou qu'elle coule sur un plan incliné; en d'autres termes, elle doit former une *chute* ou un *courant*. Dans les deux cas, la quantité d'action dont elle se trouve capable en un point quelconque est, pour une seconde, la moitié de sa force-vive en ce point. Ainsi, l'appréciation du travail de l'eau repose sur la connaissance de la masse liquide qui s'écoule en $1''$, et de la vitesse qui a lieu au point considéré.

JAUGEAGE.

126. La détermination de la masse dépend de celle du volume, et cette dernière est ce qu'on nomme le *jaugeage*. Il se fait directement ou indirectement. Le jaugeage direct consiste à recevoir dans des vases ou bassins d'une capacité connue l'eau qui s'écoule pendant un certain nombre de secondes, et à diviser par ce nombre le volume obtenu. Mais toute simple que paraisse l'opération, elle offre d'assez grandes difficultés à qui veut y mettre de l'exactitude. Aussi n'y recourt-on que dans les cas où il s'agit d'expériences dont les résultats ont besoin d'une extrême précision.

Le jaugeage indirect se fait au moyen de formules expérimentales qui donnent une justesse suffisante aux calculs de la mécanique pratique. Soit l la largeur de l'orifice rectangulaire par lequel l'eau sort du réservoir où elle s'est accumulée, h la hauteur de cet orifice, et H celle à laquelle est due la vitesse d'écoulement. Cette vitesse $\sqrt{2gH}$ sera la longueur du prisme d'eau qui passera en 1″, et l'on aurait pour le volume $lh\sqrt{2gH}$, si le liquide formait réellement un prisme. Mais, comme il n'en est pas ainsi, et que, pour éviter la détermination exacte de la vitesse, on remplace souvent H par une hauteur différente H′ mesurée sur l'appareil, il faut donner à $lh\sqrt{2gH'}$ un coefficient de correction C déduit de l'expérience; de sorte que la valeur empirique et générale du volume liquide écoulé en 1″ est

$$Clh\sqrt{2gH'}=X.$$

JAUGEAGE DES DÉVERSOIRS.

127. Voyons ce que devient X dans le cas où l'orifice est un *déversoir,* et dans celui où il est un *pertuis.*

Le déversoir diffère du pertuis en ce qu'il n'a pas de bord supérieur : il offre seulement un *seuil* horizontal A perpendiculaire à l'axe du courant (P. II, F. 21), et deux faces verticales AB parallèles à cet axe. Nous supposerons que l'épaisseur du barrage AC soit celle de la pièce de bois qui forme le seuil : c'est là le cas le plus ordinaire. La largeur du déversoir ou la longueur du seuil est l, et si h désigne la distance verticale de ce seuil au niveau constant BD de l'eau du réservoir, lh donnera la section du passage offert au liquide. Prenons aussi la hauteur h pour H′ ; ce sera considérer la vitesse

moyenne du courant comme égale à celle des particules qui affleurent le seuil en s'écoulant, et le volume du prisme qui passerait dans 1″ par le déversoir, en le remplissant, aura pour expression $lh\sqrt{2gh}$.

Mais l'orifice est loin d'être rempli : l'eau se déprime avant d'arriver au-dessus du barrage, et même elle se trouve moins élevée près des faces verticales du déversoir qu'au milieu. Le vrai volume X du liquide écoulé en 1″ est donc moindre que $lh\sqrt{2gh}$, et l'on doit écrire

$$X = Clh\sqrt{2gh},$$

le coefficient C étant une fraction dont voici les valeurs trouvées par MM. Poncelet et Lesbros.

Lorsqu'on a $h > 0^m,2$, $C = 0^m,39$;
$h > 0^m,04$, $C = 0^m,4$;
$h < 0^m,04$, $C = 0^m,425$.

Comme la dépression de l'eau commence, dans les cas ordinaires, à 2^m environ du barrage, il faut, pour obtenir h, prendre la différence de niveau du seuil A et d'un point D situé à 2^m au moins en arrière; mais il est encore plus sûr de considérer un point D′ tel que BD′ vaille 2 à 3 fois l.

Si l'on était dépourvu d'instruments propres au nivellement, il faudrait mesurer l'épaisseur $h' = AE$ de la lame liquide au-dessus du seuil, et la multiplier par 1,25, ou par 1,178, selon que la largeur l égalerait celle du réservoir ou qu'elle en serait seulement les 0,8; car la valeur de h est donnée à fort peu près, dans ces deux cas, par les équations

$$h = 1,25h',$$

$$h = 1,178h'.$$

JAUGEAGE DES PERTUIS.

128. Le nom de pertuis est réservé, comme nous l'avons fait entendre, à l'ouverture rectangulaire pratiquée dans l'une des parois du réservoir, dans celle AB qui, étant perpendiculaire au courant (P. II, F. 22), se nomme *tête d'eau* et remplace le barrage des déversoirs.

Nous désignerons toujours par l la largeur de l'orifice; mais la hauteur sera $h-h'$, si h est la distance verticale du bord inférieur au niveau de l'eau dans le réservoir, et h' la distance verticale du bord supérieur au même niveau. La superficie du pertuis vaudra donc $l(h-h')$.

Quant à la vitesse du courant, c'est évidemment celle des filets du milieu qu'il faut considérer. Or, elle est due à la hauteur du niveau dans le réservoir au-dessus du centre de l'orifice, et cette hauteur vaut

$$h'+\frac{h-h'}{2}=\frac{2h'+h-h'}{2}=\frac{h+h'}{2}.$$

Par conséquent, le volume du liquide qui s'écoulerait en 1'', s'il était réellement celui d'un prisme, aurait pour expression $l(h-h')\sqrt{2g\frac{h+h'}{2}}$.

Mais, comme un mobile ne peut changer de direction à l'endroit même où fait coude le chemin qu'il est obligé de parcourir, l'eau qui afflue obliquement vers chaque bord du pertuis, continue sa route oblique pendant un instant, presse les filets contigus, resserre la veine fluide ou la contracte, de sorte que cette veine a une section moindre que l'orifice, dès qu'elle l'a tra-

versé. Un peu plus tard ou plus loin, la section devient plus petite encore, puis elle s'agrandit, parce que la veine s'épanouit dans tous les sens, en raison de la réaction des filets comprimés. Du moins, la contraction et l'épanouissement sont réels, si l'explication pèche en admettant la compressibilité de l'eau. Nous dirons toutefois, pour la justifier, que plusieurs faits récemment observés, et notamment ceux qui se passent dans les canaux de navigation, semblent prouver que l'eau est compressible à un certain degré.

Le liquide qui s'écoule d'un pertuis n'a donc pas une forme prismatique; son volume X relatif à 1″ est moindre que $l(h-h')\sqrt{2g\frac{h+h'}{2}}$, et il faut poser

$$X = Cl(h-h')\sqrt{2g\frac{h+h'}{2}}.$$

MM. Poncelet et Lesbros ont fait à Metz, en 1827 et dans les années suivantes, pour déterminer les valeurs de la fraction C, une suite d'expériences qui se rapprochent beaucoup plus des circonstances de la pratique que toutes celles qu'on avait faites avant eux. L'orifice vertical était percé dans une paroi mince; ses bords se trouvaient éloignés des faces et du fond du réservoir, ce qui donnait contraction sur les quatre faces de la veine liquide; on avait $l = 0^m,2$; l'eau passait immédiatement du réservoir dans l'air; la hauteur $h-h'$ varia de $0^m,01$ à $0^m,2$, et h', *charge* d'eau du bord supérieur, fut élevée graduellement de $0^m,02$ à 5^m. Voici les principaux résultats obtenus: ils montrent que les charges supérieures à $1^m,7$ ne causent pas de diminutions importantes dans les valeurs du coefficient C; de sorte que ce coefficient peut être regardé comme constant, à partir de $h' = 1^m,7$.

TABLE DES VALEURS DU COEFFICIENT C POUR LES PERTUIS.

CHARGES du bord supérieur ou h'.	HAUTEURS DU PERTUIS OU $h - h'$.					
	0m,01	0m,02.	0m,03.	0m,05.	0m,1.	0m,2.
m	C =	C =	C =	C =	C =	C =
0,02	0,729	0,697	0,668	0,638	0,614	0,594
0,04	0,695	0,678	0,654	0,636	0,612	0,593
0,06	0,681	0,668	0,647	0,635	0,613	0,594
0,08	0,675	0,662	0,643	0,635	0,613	0,594
0,10	0,669	0,657	0,640	0,634	0,614	0,595
0,14	0,661	0,653	0,636	0,632	0,614	0,597
0,18	0,657	0,650	0,634	0,631	0,615	0,598
0,20	0,656	0,649	0,633	0,630	0,615	0,599
0,25	0,653	0,646	0,632	0,630	0,616	0,600
0,30	0,651	0,644	0,632	0,629	0,616	0,601
0,50	0,645	0,640	0,630	0,628	0,617	0,603
0,70	0,640	0,637	0,629	0,627	0,616	0,604
0,80	0,637	0,636	0,629	0,627	0,616	0,605
1,00	0,632	0,632	0,628	0,626	0,615	0,605
1,20	0,626	0,628	0,626	0,624	0,614	0,604
1,40	0,618	0,622	0,622	0,621	0,612	0,603
1,70	0,612	0,615	0,616	0,617	0,610	0,602
2,00	0,611	0,612	0,612	0,614	0,607	0,601
3,00	0,609	0,610	0,608	0,606	0,603	0,601

Lorsque la hauteur du pertuis sera supérieure à la plus grande 0m,2 du tableau, on pourra prendre encore le coefficient C dans la dernière colonne, car les différences des nombres de cette colonne aux nombres correspondants de la précédente étant assez faibles, surtout pour les fortes charges, il est à croire qu'on en trouverait de négligeables entre les valeurs de C relatives à 0m,2 et les valeurs relatives à 0m,21, 0m,22, etc.

129. Il y a toujours contraction à la face supérieure de la veine liquide, puisque le bord horizontal et supérieur d'un pertuis est au-dessous du niveau de l'eau en amont. Mais le bord inférieur peut affleurer le fond du réservoir ; un des bords latéraux peut se trouver sur la paroi correspondante de ce réservoir, et il est possible qu'il en soit de même du second bord latéral. Comme l'affleurement empêche évidemment la contraction du côté où il existe, elle peut n'avoir lieu que sur une seule face, ou sur deux faces, ou sur trois. Nommons C' le coefficient à employer dans ces divers cas.

Si la contraction n'existe que sur	3 faces,	$C'=1,035C$;
Id.	2	$C'=1,072C$;
Id.	1	$C'=1,125C$.

JAUGEAGE DES VANNES D'ÉCLUSE.

130. Lorsqu'un des bords du pertuis se trouve très-près de la face correspondante du réservoir, il y a contraction sur cette face, sans doute, mais elle est faible, et les coefficients C' du numéro précédent, ni les coefficients C du n.° 128 ne conviennent plus. C'est principalement dans les portes des écluses que se présente la circonstance dont il s'agit : le seuil de la vanne s'y trouve fort peu élevé au-dessus du fond du bief supérieur. La formule du jaugeage est alors

$$X=0,625\,l(h-h')\sqrt{2g\frac{h+h'}{2}}.$$

Mais, si les deux portes busquées ont une vanne chacune, la veine qui sort de l'une opère une contraction sur celle qui sort de l'autre, même lorsque les

orifices laissent entre eux un intervalle de 3^m, et le volume d'eau que verse chaque vanne en $1''$,

$$X = 0{,}55l(h - h')\sqrt{2g\frac{h+h'}{2}}.$$

JAUGEAGE DES AJUTAGES.

131. Parfois le pertuis est l'entrée d'un tuyau additionnel qu'on appelle *ajutage*. L'intérieur de ce tuyau est ordinairement formé d'une surface courbe circulaire, de sorte que l'orifice est alors un cercle de même diamètre au lieu d'un rectangle ; mais la surface courbe se trouve tantôt cylindrique, tantôt conique ; il arrive même que sa forme est celle de la veine contractée. Désignons par C'' les coefficients de correction relatifs à ces trois cas.

Pour un tuyau cylindrique dont la longueur varie entre $1\frac{1}{2}$ et 3 fois le diamètre.. $C'' = 0{,}815$.

Pour un tuyau conique dont la petite base a un diamètre égal aux 0,8 de celui de la grande ou du pertuis.. $C'' = 0{,}8$.

Pour un tuyau de même forme que la veine contractée.............. $C'' = 0{,}96$.

Mais, lorsqu'on emploie ces coefficients, il faut remplacer la superficie rectangulaire $l(h - h')$ par la superficie circulaire πr^2, r étant le rayon du pertuis, et la formule du jaugeage devient

$$X = C''\pi r^2\sqrt{2g\frac{h+h'}{2}}.$$

132. La roue à augets se trouve quelquefois placée sous une tête d'eau qui soutient une partie du poids du

liquide (P. II, F. 23), et cette tête est percée d'orifices garnis d'ajutages prismatiques par lesquels l'eau descend sur la roue. Alors on doit remplacer $h - h'$ par la distance d du bord inférieur A de l'orifice à la face opposée BC, $\frac{h+h'}{2}$ par la distance verticale h_1 du milieu de d au niveau dans le bief, et prendre 0,75 pour coefficient de correction. La formule du jaugeage est donc dans ce cas, pour chaque ajutage,

$$X = 0{,}75ld\sqrt{2gh_1}.$$

JAUGEAGE DES COURSIERS.

133. Les ajutages sont peu usités dans les usines, pour conduire l'eau sur les roues ; on y substitue des espèces d'auges, prismes rectangulaires creux et découverts qui portent le nom de *coursiers*.

Un coursier incliné de $1/_{10}$ à $1/_{20}$ diminue le volume d'eau que peut fournir un déversoir en 1″. Il faut donc pour employer alors la formule de jaugeage

$$X = Clh\sqrt{2gh},$$

donner au coefficient de correction C des valeurs moindres que celles du n.° 127. Voici celles qui résultent des expériences faites par MM. Poncelet et Lesbros : elles varient avec la charge du seuil, hauteur de l'eau au-dessus du barrage, et avec le tracé du coursier.

CHARGE du seuil.	VALEURS DE C POUR LE COURSIER				
	A.	B.	C.	D.	E.
m 0,21	0,319	0,324	0,322	0,324	0,336
0,15	0,314	0,313	0,314	»	»
0,10	0,303	0,303	0,303	0,308	0,313
0,06	0,283	0,281	0,280	0,271	0,287
0,04	0,272	0,259	0,257	0,246	0,260
0,03	0,227	0,227	»	»	»

Le coursier A (P. II, F. 24) a ses trois faces éloignées de celles du réservoir; le coursier B (F. 25) n'a que ses deux faces latérales qui soient dans ce cas; le coursier C (F. 26) n'en a qu'une; le coursier D (F. 27) présente une largeur égale à celle du réservoir, augmentée de l'épaisseur des deux parois latérales; le coursier E (F. 28), plus large aussi que le réservoir, y est joint par un tronc de pyramide; enfin le fond des deux derniers, comme celui de B et C, forme un seul plan avec le fond du réservoir.

134. Il arrive parfois que l'eau a plus de hauteur dans le coursier d'un déversoir qu'au-dessus du seuil (P. II, F. 29). Le jaugeage se fait alors en deux parties : l'une donne le volume d'eau qui s'écoulerait en 1″ par un pertuis de hauteur $AB = h''$, et l'autre le volume dû à un déversoir sans coursier dont le seuil serait en C (127). Ce dernier volume $X = Cl(h-h'')\sqrt{2g(h-h'')}$; le premier $X' = Clh''\sqrt{2g(h-h'')}$, parce qu'il faut le considérer comme produit par un écoulement qui aurait lieu d'un vase où la hauteur de l'eau serait constamment h, dans un second vase où le liquide conserverait tou-

jours une hauteur h''. La vitesse du filet médium provient en effet de la pression qu'exerce l'eau du premier vase au centre D du pertuis, diminuée de la pression qu'exerce au même point l'eau du second vase, ou bien cette vitesse est due à la hauteur $DE = h - \frac{h''}{2}$, diminuée de la hauteur $CD = \frac{h''}{2}$.

Ainsi, on calcule X en prenant la valeur de C parmi celles du n.° 127, X′ en prenant la valeur de C parmi celles du n.° 133, et la somme $X + X'$ donne à très-peu près le volume d'eau versé par le coursier pendant chaque seconde.

135. Lorsque la charge d'eau est forte, le coursier d'un grand pertuis ne diminue pas notablement le volume d'eau, quel que soit son tracé, et l'on peut employer pour le jaugeage la formule du n.° 128, avec les coefficients de ce paragraphe ou ceux du n.° 129, selon les cas.

Il n'en est plus de même quand l'orifice est petit et la charge faible; la diminution causée par le coursier devient alors une telle fraction du volume d'eau qui résulterait de l'écoulement libre dans l'air, qu'on ne peut plus la négliger : ce fait ressort des expériences de MM. Poncelet et Lesbros. Mais on doit au premier de ces officiers un tracé propre à détruire une grande partie de la contraction, et des coefficients qui, appliqués au coursier établi selon le tracé, permettent de le jauger, dans tous les cas, à l'aide de la formule donnée pour les pertuis (128).

136. Le fond du coursier doit être le prolongement de celui du réservoir; mais, si cette disposition est impossible, il suffit de raccorder les deux plans horizontaux par une surface courbe tangente à chacun, et quand

leur distance verticale est trop grande pour qu'un tel raccordement soit praticable, on peut se contenter d'arrondir le bord inférieur de l'orifice du côté du réservoir. Les faces latérales sont traitées de la même manière.

La vanne n'est plus placée à la tête d'eau ; on l'établit dans le coursier même, à une certaine distance CD du pertuis (P. II, F. 30). Soit AB la largeur qu'il s'agit de donner au coursier ; on la donne aussi à la vanne ; $CD = \frac{4}{3}AB$ au moins ou 2 AB au plus, et $\frac{1}{2}CD$ est la distance qui doit séparer le milieu C de l'orifice des points E, F, où se terminent les courbes par lesquelles les faces latérales AI, BK sont raccordées avec la tête d'eau GH. A partir de la vanne, le fond du coursier s'incline vers la roue ; il convient que cette portion LM soit courte et présente une pente un peu forte.

Enfin, si les fonds ont aussi un raccordement, il doit s'unir à ceux des faces verticales par deux surfaces à double courbure.

Pour appliquer au jaugeage d'un pareil coursier la formule (128)

$$X = Cl(h - h')\sqrt{2g\frac{h + h'}{2}},$$

il faut prendre l, h, h' sur le pertuis formé par les parois et par le bord inférieur de la vanne IK, puis donner au coefficient de correction une valeur C''' relative à l'angle que fait le plan de cette vanne avec le fond horizontal ABIK.

Si l'angle est droit............. $C''' = 0,7$;

Si l'angle a une tangente double du rayon........................ $C''' = 0,74$;

Si l'angle est de 45°........... $C''' = 0,8$.

Mais, quand la charge d'eau est faible et l'orifice peu

haut, c'est-à-dire quand les hauteurs h, $h-h'$ sont petites, on doit prendre pour C les $^{11}/_{10}$ de C'''.

137. Lorsque le coursier n'a qu'une faible pente, et qu'en même temps le niveau du réservoir est peu élevé au-dessus du pertuis, le frottement sur les parois détruit une partie notable de la petite vitesse du liquide, il y a remou; la veine se trouve recouverte d'eau à sa sortie même de l'orifice (P. II, F. 31), et l'on dit que le pertuis est *noyé*.

Dans de telles circonstances, le volume qui sort du coursier en $1''$ est nécessairement moindre que celui des deux cas précédents. Pour le déterminer, nous désignerons par h, h'' les distances verticales du seuil au niveau du réservoir et à celui du coursier; par a, v, l'aire du pertuis et la vitesse qu'y possède la veine; par A, u, l'aire d'une section de l'eau en un des points du coursier où l'écoulement soit sensiblement uniforme, et la vitesse qu'a le liquide dans cette section.

La masse d'eau m qui passe en un instant par le centre de l'orifice a, a reçu de la gravité une vitesse $\sqrt{2g(h-h'')}$, et elle est capable d'une quantité d'action $mg(h-h'')$; la quantité d'action qu'elle possède en A est seulement $\frac{mu^2}{2}$; celle qu'elle a perdue par l'effet du choc vaut $\frac{m(v-u)^2}{2}$. Conséquemment,

$$mg(h-h'')=\frac{mu^2}{2}+\frac{m(v-u)^2}{2},$$

et

$$u^2+(v-u)^2=2g(h-h'').$$

Mais le volume d'eau qui sort du pertuis en $1''$, $X=Cav$, C représentant le coefficient qu'exige la contraction (128); le volume qui passe par la section A

dans le même temps est Au, et nécessairement $Au=Cav$, puisque le coursier ne déborde point. On a donc

$$u=\frac{Ca}{A}v,\quad \frac{C^2a^2}{A^2}v^2+\left(v-\frac{Ca}{A}v\right)^2=2g(h-h''),$$

$$v^2\left[\frac{C^2a^2}{A^2}+\left(1-\frac{Ca}{A}\right)^2\right]=2g(h-h''),$$

$$v=\sqrt{\left[\frac{2g(h-h'')}{\frac{C^2a^2}{A^2}+\left(1-\frac{Ca}{A}\right)^2}\right]},$$

et

$$X=Ca\sqrt{\left[\frac{2g(h-h'')}{\frac{C^2a^2}{A^2}+\left(1-\frac{Ca}{A}\right)^2}\right]}.$$

Cette formule, qui a été confirmée par des expériences dues à M. Lesbros, est aussi celle qu'on doit employer au jaugeage du volume d'eau Au sorti du coursier en 1''.

JAUGEAGE DES COURS D'EAU LIBRES.

138. Les canaux qui amènent l'eau dans les réservoirs des usines ont peu de pente et une grande longueur; leur section droite et transversale est quelquefois un rectangle, ordinairement un trapèze de forme et de superficie constantes; enfin le mouvement du liquide y est sensiblement uniforme. Si donc A désigne la section en mètres carrés, et u la vitesse moyenne en mètres, le volume d'eau X qui passe en 1'' par cette section est en mètres cubes

$$X=Au.$$

La même formule est applicable au jaugeage des ri-

vières, partout où le courant a une vitesse à peu près constante.

VITESSES DE L'EAU.

On a souvent besoin de connaître les vitesses avec lesquelles l'eau motrice d'une machine passe dans les différentes sections du courant. Nous devons donc montrer comment se déterminent celles que produisent les déversoirs, les pertuis, les coursiers et les cours d'eau libres.

VITESSES DANS LES DÉVERSOIRS.

139. La vitesse qu'a le filet médium au-dessus du barrage d'un déversoir est due à la hauteur verticale comprise entre ce filet et le niveau BD du réservoir (P. II, F. 21). Si donc h, h' désignent la distance du seuil A à ce niveau et l'épaisseur verticale AE de la lame d'eau, la vitesse

$$v = \sqrt{2g\left(h - \frac{h'}{2}\right)}.$$

Or, il y a entre les deux hauteurs (127) la relation $h = 1{,}25\,h'$ ou $h = 1{,}178\,h'$, selon que la largeur du déversoir égale celle du réservoir ou en est seulement les 0,8. Donc, dans le premier cas,

$$h - \frac{h'}{2} = 1{,}25h' - \frac{h'}{2} = 0{,}75h',$$

et $$v = \sqrt{2g \times 0{,}75h'} = 0{,}87\sqrt{2gh'};$$

dans le second,

$$h - \frac{h'}{2} = 1{,}178h' - \frac{h'}{2} = 0{,}678h',$$

et $$v = \sqrt{2g \times 0{,}678h'} = 0{,}8234\sqrt{2gh'}.$$

Si la vitesse devait être trouvée au moyen de h, on aurait, pour le premier cas,

$$h - \frac{h'}{2} = h - \frac{h}{2\times 1{,}25} = 0{,}6h,$$

et $$v = 0{,}775\sqrt{2gh};$$

puis, pour le second,

$$h - \frac{h'}{2} = h - \frac{h}{2\times 1{,}178} = 0{,}576h,$$

et $$v = 0{,}759\sqrt{2gh}.$$

140. La vitesse que le filet médium devrait à la gravité en un point I situé en aval du barrage (P. II, F. 21), est altérée par le frottement du liquide sur le seuil A et par la résistance de l'air; mais la diminution peut être négligée quand le barrage est mince, et

$$v = \sqrt{2gH},$$

H représentant le nombre de mètres de la distance IK comprise entre le niveau BD du réservoir et le milieu I de la tranche verticale FG.

VITESSES DANS LES PERTUIS.

141. Au centre d'un pertuis, la vitesse égale à fort peu près celle qui est due à la distance verticale de ce point au niveau du réservoir, c'est-à-dire que, sous le rapport de la rapidité, l'écoulement diffère très-peu de

celui qui aurait lieu si les tranches horizontales du liquide descendaient sans s'incliner ou se courber vers l'orifice. On peut donc prendre pour valeur de la vitesse celle qui a été employée pour le jaugeage (128). Ainsi,

$$v=\sqrt{2g\frac{h+h'}{2}},$$

h, h' étant les distances verticales du niveau au bord inférieur et au bord supérieur du pertuis.

142. La plus petite section de la veine contractée se trouve à une distance de la tête d'eau qui varie entre la moindre dimension de l'orifice et la moitié de cette dimension. On admet que la vitesse du filet médium y est la même qu'au centre du pertuis; de sorte que le coefficient de correction C, employé (128) pour jauger le volume d'eau écoulé en 1″, est relatif à la contraction seulement.

VITESSES DANS LES COURSIERS.

143. La veine liquide s'épanouit après sa contraction, et ordinairement elle rencontre les parois latérales du coursier. La section droite où se fait cette rencontre est située à une distance du barrage qui vaut environ 2 fois la plus petite dimension de l'orifice, et on l'appelle l'*origine* du coursier.

Lorsque la contraction a lieu sur trois faces de la veine, et que la charge d'eau est forte, la vitesse du filet médium à l'origine d'un coursier peut être évaluée aux 0,85 de celle qui serait due à la hauteur h_1 comprise entre le centre de l'orifice et le niveau du réservoir. La formule est donc, d'après l'expérience,

$$v=0,85\sqrt{2gh_1}.$$

Mais, dans tout autre cas, celui du remou excepté,

$$v = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{C}-1\right)^2}}\sqrt{2gh_1},$$

parce que la largeur du coursier est ordinairement celle de l'orifice.

Les relations établies dans le n.° 137 donnent en effet

$$u^2 + \left(\frac{A}{Ca}u - u\right)^2 = 2g(h - h''),$$

$$u^2\left[1 + \left(\frac{A}{Ca} - 1\right)^2\right] = 2g(h - h''),$$

$$u = \frac{\sqrt{2g(h-h'')}}{\sqrt{1+\left(\frac{A}{Ca}-1\right)^2}},$$

et quand $A = a$,

$$u = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{C}-1\right)^2}}\sqrt{2g(h-h'')};$$

or, $h - h''$ indiquant la charge du centre de l'orifice dans le cas du remou, doit être ici remplacé par h_1, puisqu'il n'y a plus, en sens contraire du mouvement, de pression exercée sur l'orifice par l'eau du coursier.

144. On nomme *extrémité* du coursier la section droite qui, située près du bout opposé à la vanne, précède immédiatement celle dans laquelle l'épaisseur du prisme d'eau commence à diminuer, comme en amont du seuil d'un déversoir. Lorsque le coursier est court et fortement incliné, son extrémité devient la dernière section droite, parce qu'il n'y a plus de dépression sensible.

La vitesse à l'extrémité d'un coursier provient évidemment, comme la vitesse dans une section quelconque, de celle qui existe à l'origine, de celle que donne la gravité entre les deux points, et de celle qui est détruite par le frottement sur les parois. Mais, quand le coursier se trouve court et incliné à 30 ou 40°, la diminution causée par le frottement peut être négligée. Si donc h''' indique la hauteur de l'origine au-dessus de l'extrémité, v' la vitesse en ce dernier point, et m la masse liquide que fournit en un temps quelconque le filet médium, l'égalité des quantités d'action donne

$$\frac{mv'^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{m \times 2gh'''}{2}, \quad \text{puis} \quad v' = \sqrt{v^2 + 2gh'''}.$$

Lorsque le coursier a trop de longueur et trop peu de pente pour qu'on puisse faire abstraction de la perte de vitesse due au frottement, la vitesse à l'extrémité peut être trouvée au moyen de la relation

$$v' = \frac{X}{A},$$

dans laquelle X est le volume d'eau versé par l'orifice en 1'', et A l'aire de la section droite qui précède immédiatement celle où commence la dépression du prisme.

Mais pour connaître A, il faut lever le profil de l'extrémité du coursier, et parfois ce canal est recouvert de manière à rendre la chose impossible. En pareille circonstance, on emploie, pour évaluer le frottement du liquide sur les parois, l'équation

$$F = \delta(l + 2e)\,L\,(ku + k'u^2)$$

établie par Coulomb d'après ses propres observations, confirmée par Prony qui en a montré l'accord avec

plusieurs résultats d'expériences, et dans laquelle δ est la densité du liquide, l, L la largeur et la longueur du canal, e l'épaisseur du prisme, u la vitesse moyenne ou la vitesse constante qui produirait le même volume d'eau que la vitesse réelle et variable, k, k' deux coefficients dépendants de la nature du fluide. D'ailleurs, ku peut être négligé, et $k' = 0{,}0035$, quand il s'agit de l'eau. Alors donc, $F = 0{,}0035\,\delta(l+2e)Lu^2$, et la quantité d'action dépensée par la masse m qui s'écoule dans le temps t, est $Ftu = 0{,}0035\,\delta(l+2e)Lu^2 \times tu$.

Mais $\dfrac{X}{u} = A'$ est la section droite qu'aurait partout le prisme, si l'écoulement était réellement uniforme; $m = \delta A'tu$ et $\delta tu = \dfrac{m}{A'}$. Par conséquent,

$$Ftu = 0{,}0035m\,\frac{l+2e}{A'}\,Lu^2.$$

Pour trouver u, il faut calculer la vitesse à l'origine du coursier (143) au moyen de la formule

$$v = \sqrt{\frac{2gh_1}{1+\left(\frac{1}{C}-1\right)^2}},$$

et la vitesse à l'extrémité, abstraction faite du frottement, au moyen de la formule $v'_1 = \sqrt{v^2 + 2gh''}$, puis poser $u = \dfrac{v+v'_1}{2}$. On a ainsi une valeur de la vitesse moyenne suffisamment approchée.

L'égalité des quantités d'action donne maintenant

$$\frac{mv'^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{m \times 2gh'''}{2} - 0{,}0035m\,\frac{l+2e}{A'}\,Lu^2,$$

et cette relation conduit à

$$v' = \sqrt{\left(v^2 + 2gh''' - 0,007 \frac{l+2e}{A'} Lu^2\right)},$$

formule propre au calcul approximatif de la vitesse qui a lieu à l'extrémité d'un coursier long, peu incliné, couvert ou découvert. Les quantités l, e y sont évidemment relatives à la section droite A' du prisme : $l+2e$ est la partie frottante du périmètre de cette section moyenne, partie qu'on appelle assez improprement *contour mouillé*.

Ainsi, après avoir calculé le volume d'eau X versé par l'orifice en 1'', puis l'aire A', on devra diviser cette superficie par la largeur l du coursier pour obtenir e, épaisseur moyenne du prisme.

VITESSES HORS DES COURSIERS.

145. L'eau sortie d'un coursier parcourt dans l'air une trajectoire courbe qui dépend de la vitesse initiale v' possédée à l'extrémité du canal, de la gravité et de la résistance du milieu. Désignons par h_2 la hauteur comprise entre le centre de la section nommée *extrémité* du coursier et un point quelconque de la trajectoire du filet médium; nous trouverons (144) la vitesse en ce point au moyen de l'équation

$$v'' = \sqrt{v'^2 + 2gh_2}.$$

Mais il faut avoir l'équation de la courbe du filet, pour déterminer h_2, quand le point est indiqué par sa distance horizontale au centre de l'extrémité du coursier, ou pour marquer le point, quand h_2 est donnée.

Comme l'eau n'exerce jamais son action motrice à une grande distance du coursier, le point pour lequel

on cherche la vitesse est toujours peu éloigné de l'origine de la trajectoire, et l'on est en droit de négliger la résistance de l'air, ce qui rend la courbe une parabole. Mettons l'origine A des coordonnées sur celle de cette courbe (P.III, F. 1), c'est-à-dire au centre même de la section extrême du coursier; prenons l'horizontale pour axe des abscisses, la verticale pour axe des ordonnées, et indiquons par α l'angle que forme le premier avec la tangente AB au point A de la trajectoire. Cet angle α a pour sinus le rapport de la pente totale à la longueur du coursier, puisque AB est évidemment parallèle au fond.

La particule liquide arrivée en A suivrait la droite AB avec une vitesse v', si la gravité ne la sollicitait pas; parvenue en B, au bout d'un temps t, elle aurait parcouru un chemin horizontal $x = tv'\cos\alpha$, et un chemin vertical $CB = tv'\sin\alpha$. Mais, dans le même temps, la gravité l'a fait descendre d'une hauteur $BD = \frac{gt^2}{2}$. Donc, le chemin vertical total h_2 ou

$$y = CB + BD = tv'\sin\alpha + \frac{gt^2}{2}.$$

Eliminant t, on obtient, pour équation de la courbe AD,

$$y = x\,\text{tang}\,\alpha + \frac{gx^2}{2v'^2\cos^2\alpha},\ \text{ou}\ x = \frac{v'\cos\alpha}{g}\left[\sqrt{(2gy + v'^2\sin^2\alpha)} - v'\sin\alpha\right].$$

Dans le cas d'un coursier horizontal, le liquide sort comme celui d'un déversoir,

$$\alpha = 0, \quad y = \frac{gx^2}{2v'^2}, \quad \text{et} \quad x = v'\sqrt{\frac{2y}{g}}.$$

146. Il est bon de montrer, par une application, de

combien la vitesse en dehors d'un coursier, déduite des formules précédentes, diffère de la vitesse due à la chute totale.

Soient $1^m,31 = h_1$, distance du centre de l'orifice au niveau du réservoir; $0^m,35 = l$, largeur de cet orifice et du coursier; $0,8 = C$, coefficient de correction pour une vanne inclinée à 45° et une contraction réduite au minimum (136); $6^m,5 = L$, longueur du canal; $0^m,3 = h'''$, sa pente totale, et $0^m,1 = h_2$, ordonnée du point assigné sur la trajectoire.

La vitesse à l'origine du coursier (143)

$$v = \sqrt{\frac{2gh_1}{1 + \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 9^m,81 \times 1^m,31}{1 + \left(\frac{1}{0,8} - 1\right)^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{25^{mm},7022}{1 + \left(\frac{10-8}{8}\right)^2}} = \sqrt{\frac{25^{mm},7022}{1,0625}} = \sqrt{24^{mm},19} =$$

$4^m,918.$

La vitesse à l'extrémité du coursier, abstraction faite du frottement (144),

$$v_1 = \sqrt{v^2 + 2gh'''} = \sqrt{24^{mm},19 + 2 \times 9^m,81 \times 0^m,3} = 5^m,48.$$

La vitesse moyenne

$$u = \frac{v + v_1}{2} = \frac{4^m,918 + 5^m,48}{2} = 5^m,199.$$

Si nous supposons $0^m,18$ pour la hauteur de l'orifice, le volume d'eau qu'il verse en $1''$,

$$X = Cl(h - h')\sqrt{2g\frac{h + h'}{2}} = Cl(h - h')\sqrt{2gh_1}$$

$$= 0,8 \times 0^m,35 \times 0^m,18 \sqrt{2 \times 9^m,81 \times 1^m,31} = 0^{mc},2555.$$

L'aire de la section moyenne

$$A' = \frac{X}{u} = \frac{0^{mc},2555}{5^{m},199} = 0^{mm},049.$$

L'épaisseur moyenne du prisme liquide

$$e = \frac{A'}{l} = \frac{0^{mm},049}{0^{m},35} = 0^{m},14.$$

La vitesse réelle à l'extrémité du coursier

$$v' = \sqrt{\left(v^2 + 2gh''' - 0,007\frac{l+2e}{A'}Lu^2\right)} =$$
$$\sqrt{\left[24^{mm},19 + 2 \times 9^{m},81 \times 0^{m},3 - 0,007\frac{0^{m},35 + 0^{m},28}{0^{mm},049} \times\right.}$$
$$\left.6^{m},5\,(5^{m},199)^2\right] = \sqrt{30^{mm},076 - 15^{mm},81} = 3^{m},777.$$

Enfin, la vitesse au point donné de la trajectoire

$$v'' = \sqrt{v'^2 + 2gh_2} = \sqrt{14^{mm},266 + 2 \times 9^{m},81 \times 0^{m},1} = 4^{m},028.$$

Mais la chute totale

$$H = h_1 + h''' + h_2 = 1^{m},31 + 0^{m},3 + 0^{m},1 = 1^{m},71,$$

et la vitesse due à cette chute

$$V = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \times 9^{m},81 \times 1^{m},71} = 5^{m},792.$$

Le coursier cause donc une perte de vitesse

$$V - v'' = 5^{m},792 - 4^{m},028 = 1^{m},764.$$

Pour marquer le point où la vitesse de l'eau est $4^{m},028$, il faut en connaître l'abscisse x. Or,

$$\sin\alpha = \frac{h'''}{L} = \frac{0^{m},3}{6^{m},5} = 0,046,\ \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = 0,999,$$
$$v' = 3^{m},777,\ y = h_2 = 0^{m},1.$$

Par conséquent,

$$x = \frac{v' \cos \alpha}{g} \left[\sqrt{(2gy + v'^2 \sin^2 \alpha)} - v' \sin \alpha \right] = 0^m,3199 \text{ ou } 0^m,32$$

à très-peu près.

VITESSES DANS LES CABINETS D'EAU.

147. Certaines localités forcent à placer la roue hydraulique fort loin du réservoir, et alors, pour éviter l'emploi d'un long coursier, on établit près de la roue un petit réservoir prismatique B (P. III, F. 2), appelé *cabinet d'eau*, qui verse le liquide par un pertuis à vanne a, et communique au grand réservoir E par un canal souterrain A façonné en cylindre ou en prisme carré. Mais il s'en faut que cet appareil annule la diminution qu'un long coursier ferait éprouver à la vitesse qu'engendrerait la chute H comprise entre le niveau du grand réservoir et le centre du pertuis a : le liquide cesse d'être à la même hauteur dans les deux réservoirs, dès que la vanne est levée ; la distance h_1 du centre du pertuis au niveau du cabinet devient moindre que H, et de la différence $H - h$ résulte une perte de vitesse. Il y en aurait même une autre causée par le tourbillonnement du liquide à son entrée dans le cabinet, si la largeur de ce prisme, mesure prise parallèlement au courant, étant moindre que 2 à 3 fois la largeur du canal A, ne permettait pas à l'eau d'arriver au pertuis par tranches à peu près parallèles.

On trouve la relation qui s'établit entre la chute totale H et h_1, celle du cabinet, en exprimant que la quantité d'action due à la première égale celle que produit la seconde, augmentée de la perte causée par le frottement

dans le canal A, et de la perte qui résulte de la destruction de la vitesse à la sortie de ce canal.

La quantité d'action qui serait due à la chute H est mgH, pour la masse liquide m écoulée dans un certain temps.

La quantité d'action que possède réellement la masse m en passant par le pertuis a, est mgh_1.

La vitesse moyenne u qui a lieu dans le canal horizontal A, abstraction faite du frottement, égale la vitesse à l'origine (144), et celle-ci (143) vaut

$$\frac{u'}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{1}{C}-1\right)^2\right]}},$$

si u' représente la vitesse due à la différence des pressions exercées par le liquide sur les deux extrémités du même tuyau, et si C est le coefficient relatif à la contraction qu'occasionne l'orifice du grand réservoir E. Par conséquent,

$$u'=u\sqrt{\left[1+\left(\frac{1}{C}-1\right)^2\right]}.$$

Or, c'est cette vitesse u' qui est annulée dans le cabinet, et il s'ensuit une perte de quantité d'action

$$\frac{mu'^2}{2}=\frac{mu^2}{2}\left[1+\left(\frac{1}{C}-1\right)^2\right].$$

Nous avons trouvé (144), pour la quantité d'action consommée par le frottement d'un coursier,

$$Ftu=0,0035\,m\frac{l+2e}{A}Lu^2,$$

A exprimant le nombre de mètres carrés de la section droite du prisme liquide. Comme ici l'eau coule à

plein tuyau, tout le contour γ de cette section est mouillé; $l+2e$ doit être remplacé par γ, et

$$Ftu = 0{,}0035\, m \frac{\gamma}{A} Lu^2.$$

On a donc enfin l'équation

$$mgH = mgh_1 + \frac{mu^2}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2\right] + 0{,}0035\, m \frac{\gamma}{A} Lu^2,$$

ou

$$H = h_1 + \frac{u^2}{2g}\left[1 + \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2\right] + 0{,}0035 \frac{\gamma}{A} \cdot \frac{L}{g} u^2.$$

La vitesse u peut être éliminée au moyen de la relation $Au = C_1 a v$ qui existe entre les volumes d'eau écoulés en 1″ par les orifices des deux réservoirs.

Comme (141) $v = \sqrt{2gh_1}$, $u = \frac{C_1 a}{A}\sqrt{2gh_1}$,

et

$$H = h_1 + \frac{C_1^2 a^2}{A^2} h_1 \left[1 + \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2\right] + 0{,}007 \frac{\gamma L C_1^2 a^2}{A^3} h_1.$$

Par conséquent,

$$H - h_1 = h_1 \frac{C_1^2 a^2}{A^2}\left[1 + \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2 + 0{,}007 \frac{\gamma L}{A}\right],$$

ce qui fait voir que la distance comprise entre les niveaux des deux réservoirs, et la perte de vitesse qu'elle occasionne, sont d'autant plus grandes que le canal a plus de longueur et une moindre section droite.

148. La valeur de H fournit l'équation

$$h_1 = \frac{H}{1 + \frac{C_1^2 a^2}{A^2}\left[1 + \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2 + 0{,}007 \frac{\gamma L}{A}\right]},$$

au moyen de laquelle la vitesse en a peut être déduite de la chute totale H.

Si un coursier, substitué au cabinet, avait le centre de son extrémité au centre même du pertuis a, la vitesse qui aurait lieu à cette extrémité (144) serait

$$v' = \sqrt{(v^2 + 2gh''' - 0,007 \frac{l+2e}{A'} Lu^2)}.$$

Recherchons, à l'aide de ces deux équations, lequel est le plus avantageux d'établir un cabinet d'eau ou un coursier entre un réservoir et une roue hydraulique. Nous prendrons pour exemple l'appareil moteur de l'une des scieries que la Seille fait mouvoir dans l'arsenal d'artillerie à Metz. On y trouve $H=1^m,725$, $C_1=0,67$, $C=0,62$, $a=0^{mm},0682$, $L=7^m,6$, et le canal par lequel le réservoir communique au cabinet, a pour section droite un carré dont le côté est de $0^m,5$, ce qui donne $\gamma=2^m$, $A=0^{mm},25$. Substituant ces nombres dans la valeur de h_1, on obtient $h_1=1^m,624$, et le mesurage direct de cette hauteur a confirmé le résultat. Il s'ensuit que la vitesse au centre du pertuis a est de $5^m,64=\sqrt{2gh_1}$, tandis que la vitesse due à la chute totale, $\sqrt{2gH}=5^m,81$.

Nous supposerons maintenant que le canal soit remplacé par un coursier qui ait aussi $7^m,6$ de longueur horizontale, et dont la pente totale $h'''=0^m,3$. Il en résultera, dans la valeur de v',

$$L=\sqrt{[(7^m,6)^2+(0^m,3)^2]}=7^m,606.$$

Plaçons l'orifice du réservoir près du fond; donnons-lui les mêmes dimensions qu'à celui du cabinet supprimé, et adoptons le même coefficient de correction $C_1=0,67$. La vitesse à l'origine du coursier

$$v=\sqrt{\frac{2g(H-h''')}{1+\left(\frac{1}{C_1}-1\right)^2}}=\sqrt{\frac{2\times 9^m,81\times 1^m,423}{1+(1,49-1)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{27^{mm},92}{1,24}}=\sqrt{22^{mm},5161}=4^m,74.$$

La vitesse à l'extrémité du coursier, abstraction faite du frottement,

$$v'_1=\sqrt{v^2+2gh'''}=\sqrt{(22^{mm},5161+2\times 9^m,81\times 0^m,3)}=5^m,32.$$

La vitesse moyenne

$$u=\frac{v+v'_1}{2}=\frac{4^m,74+5^m,32}{2}=5^m,03.$$

Le volume d'eau qui sortira du pertuis en 1″,

$$C_1a\sqrt{2g(H-h''')}=A'u,$$

volume qui passera dans le même temps par chaque section droite du coursier. Ainsi

$$0,67\times 0^{mm},0682\sqrt{27^{mm},92}=5^m,03A',\text{ et }A'=0^{mm},048.$$

Donnons au pertuis, pour hauteur, $1/4$ de sa largeur. Nous aurons

$$l\times\frac{l}{4}=0^{mm},0682,\qquad l=0^m,522,$$

$$e=\frac{A'}{l}=\frac{0^{mm},048}{0^m,522}=0^m,092,\quad l+2e=0^m,706,$$

et

$$v'=\sqrt{}[22^{mm},5161+5^{mm},886-0,007\frac{0^m,706}{0^{mm},048}\times$$
$$7^m,606(5^m,03)^2]=2^m,93.$$

Ainsi, le coursier causerait une perte de vitesse égale à $5^m,81 - 2^m,93 = 2^m,88$, tandis que le cabinet en produirait seulement une de $5^m,81 - 5^m,64 = 0^m,17$, qui n'est qu'environ les 0,06 de la première.

Il y aurait encore avantage pour le cabinet, quand même on diminuerait la longueur du coursier à l'effet de lui donner plus de pente par mètre ; car, dans l'exemple du n.° 146 où $L = 6^m,5$ seulement, la vitesse v' n'est que les 0,652 de celle qui est due à la hauteur H, et si ce nombre surpasse 0,504, rapport de $2^m,93$ à $5^m,81$, il est moindre que 0,97, rapport relatif au cabinet d'eau.

VITESSES DANS LES COURS D'EAU LIBRES.

149. Le canal que suit l'eau motrice d'une usine pour se rendre au réservoir, celui par lequel elle s'écoule après avoir produit son effet, et les rivières dont le courant fait tourner des roues, peuvent être regardés comme ayant un *régime uniforme*, c'est-à-dire que les différentes sections du prisme liquide sont sensiblement égales, et que le même volume d'eau passe dans toutes durant un temps donné. Mais pour ces cours d'eau, comme pour les coursiers, le frottement des parois fait décroître la vitesse de la surface au fond, et du milieu aux bords. C'est donc une vitesse moyenne qu'il faut employer pour le jaugeage (138).

L'expérience a montré que le frottement sur les parois est, aux coefficients près, une fonction de la vitesse moyenne u pareille à celle qui se rapporte aux coursiers (144); ainsi,

$$F = \delta(l + 2e)L(k_1 u + k'_1 u^2),$$

et la quantité d'action dépensée par une masse m en un temps t,

$$Ftu = m\frac{l+2e}{A'}L(k_1u \times k'_1u^2).$$

Prenons pour L la longueur parcourue dans le temps quelconque t, parallèlement au fond. La gravité produira durant ce même temps une quantité d'action $\frac{2gHm}{2}$, si H désigne la pente relative à L, et puisque l'écoulement se fait avec une vitesse constante, nous devrons écrire

$$\frac{2gHm}{2} = m\frac{l+2e}{A'}L(k_1u + k'_1u^2).$$

Par conséquent,

$$gH = \frac{l+2e}{A'}L(k_1u + k'_1u^2), \quad u^2 + \frac{k_1}{k'_1}u = \frac{g}{k'_1} \times \frac{A'}{l+2e} \times \frac{H}{L},$$

et
$$u = -\frac{k_1}{2k'_1} + \sqrt{\left(\frac{g}{k'_1} \times \frac{A'}{l+2e} \times \frac{H}{L} + \frac{k_1^2}{4k'^2_1}\right)}.$$

La comparaison de cette formule aux résultats des expériences de Dubuat a conduit Prony à trouver que $k_1 = 0^m,000\,436$, et que $k'_1 = 0,003\,034$. Il s'ensuit, si A' représente un nombre de mètres linéaires,

$$u = 56^m,86\sqrt{\frac{A'}{l+2e} \times \frac{H}{L}} - 0^m,071\,85,$$

car le terme $\left(\frac{k_1}{2k'_1}\right)^2$ est d'une petitesse qui permet de le négliger.

Il y a des canaux dont la section forme un rectangle, comme celle des coursiers; d'autres ont pour section un trapèze. Dans ce dernier cas, l est la largeur du fond ou la petite base du trapèze, et l'un des côtés concou-

rants donne e, mesure prise du fond à la surface de l'eau.

Lorsque la section du prisme liquide n'offre pas une figure immédiatement quarrable, et il en est ainsi pour les rivières, il faut la lever, la construire exactement d'après une échelle, et en mesurer sur le dessin la superficie, puis la partie frottante du périmètre, pour avoir A' et $l+2c$. Le lever se fait par abscisses et ordonnées : les premières, qui sont horizontales, se prennent perpendiculairement au courant et à partir de l'un des bords ; les secondes, distances de la surface liquide au sol, se mesurent à l'aide d'une perche placée perpendiculairement à cette surface.

150. Prony a donné pour la vitesse moyenne des cours d'eau une autre valeur qui, appliquée aux rivières, dispense des opérations longues et pénibles qu'exige le lever de la section droite du prisme liquide. Soit u' la plus grande vitesse à la surface,

$$u=\frac{u'(u'+2^{m},37187)}{u'+3^{m},15312}.$$

Ordinairement u' varie entre 1^{m} et 2^{m} ; la formule fait alors varier u entre $1^{m}\times 0,812$ et $2^{m}\times 0,848$. Il suffit donc, dans la plupart des cas de la pratique, d'employer la relation

$$u=0,8\,u'.$$

151. Le moyen le plus simple et le plus sûr de mesurer la vitesse u' de la surface, c'est de jeter dans la partie la plus rapide du courant un prisme en bois de chêne. S'immergeant presque en entier, ce flotteur se meut comme l'eau, et par conséquent, on obtient la vitesse cherchée, en divisant le chemin qu'il a parcouru pendant plusieurs minutes, par le temps estimé en se-

condes. Mais il faut, pour que le mesurage ait quelque exactitude, répéter une ou deux fois l'opération et prendre la moyenne des deux ou trois résultats.

Lorsque la vitesse moyenne a été déduite de la section droite du prisme liquide et de la pente du canal (149), on peut déterminer la vitesse à la surface au moyen des relations établies (150) entre u et u'. La première donne pour tous les cas,

$$u' = \frac{u - 2^{m},37187 + \sqrt{(u^2 + 7^{m},8687\,u + 5^{mm},62577)}}{2},$$

et la seconde donne pour les cas les plus fréquents,

$$u' = 1,25\,u.$$

152. La conservation du fond d'un canal impose à la vitesse de la dernière lame liquide une limite qu'elle ne saurait dépasser. On a reconnu que les parties constituantes du lit sont arrachées et entraînées quand la vitesse au fond surpasse

$0^{m},076$	pour la terre facile à détremper,
0 ,152	l'argile tendre,
0 ,305	le sable,
0 ,609	le gravier,
0 ,614	les cailloux,
1 ,22	les fragments de pierres et le silex,
1 ,52	les cailloux agglomérés et les schistes tendres,
1 ,83	les roches disposées en couches,
3 ,05	les roches dures.

Il est aisé de reconnaître si de la vitesse moyenne qu'on veut donner à un cours d'eau, résultera une vitesse convenable sur le fond. Soit u'' la vitesse de la dernière lame liquide; $u = \frac{u' + u''}{2}$. Par conséquent, $u'' = 2u - u'$,

et la relation $u' = 1,25u$ conduit à

$$u'' = 2u - 1,25u = 0,75u.$$

155. Mais on doit plutôt se demander quelle vitesse moyenne permet la nature du fond. La réponse est alors fournie par la relation

$$u = \frac{u''}{0,75} = 1,333\,u'',$$

si l'on y met à la place de u'' l'un des nombres du tableau précédent.

Lorsque la vitesse moyenne est ainsi fixée, il reste à déterminer la pente $\frac{H}{L}$ qui peut la produire. On tire pour cela du n.° 149 l'équation

$$\frac{H}{L} = \frac{l+2e}{A'} \times \frac{k_1 u + k'_1 u^2}{g},$$

puis cette autre

$$\frac{H}{L} = \frac{l+2e}{A'} u \left(0,000\,044 + 0,000\,309 \frac{u}{1^m}\right).$$

154. Supposons qu'à la profondeur qu'il s'agit de donner à un canal, on ait trouvé le sable. Il faudra qu'au maximum

$u'' = 0^m,305$, que $u = 1,333 \times 0^m,305 = 0^m,4066$,

et que la pente par mètre

$$\frac{H}{L} = \left\{ \begin{matrix} \frac{l+2e}{A'} \times 0^m,4066\,(0,000\,044 + \\ 0,000\,309 \times 0,4066) \end{matrix} \right\} = \frac{l+2e}{A'} \times 0^m,000\,069.$$

Si la section droite est un trapèze ABCD (P. III, F. 3) dans lequel l'eau doive s'élever à 1^m, dont les côtés

concourants s'inclinent à 45°, et que $l = AB = 2^m$, on trouve

$$EF = 4^m,\ A' = \frac{2^m + 4^m}{2} \times 1^m = 3^{mm},\ c = BE = \sqrt{2^{mm}} = 1^m,414,$$

$$l + 2c = 2^m + 2 \times 1^m,414 = 4^m,828,$$

$$\frac{l+2c}{A'} = \frac{4^m,828}{3^{mm}} = \frac{1,609}{1^m},\ \text{et}\ \frac{H}{L} = 1,609 \times 0,000069 = 0,000111.$$

Il en résulterait, pour la surface liquide au milieu du courant, une vitesse

$$u' = 1,25 \times 0^m,4066 = 0^m,50825.$$

ÉNERGIE DE L'EAU MOTRICE.

155. L'énergie d'un moteur se mesure à la quantité d'action qu'il peut produire dans l'unité de temps. Celle de l'eau motrice est donc donnée par le produit fait avec le poids du liquide qui s'écoule dans chaque seconde et la chute totale, c'est-à-dire la distance verticale du niveau dans le réservoir au point le plus élevé de la surface dans le canal de fuite.

En effet, soit h la hauteur de laquelle est descendu le prisme de poids P écoulé en 1''. Puisqu'il y avait continuité entre ce prisme et tous les prismes égaux qui lui étaient superposés, le prisme de poids P qu'il soutenait a dû descendre aussi d'une hauteur h en 1'', ainsi que le suivant, ainsi que tous les autres. La quantité d'action produite en 1'' par le courant d'eau vaut donc nPh, n étant le nombre de prismes égaux compris entre l'extrémité de la chute et le niveau constant du réservoir. Or, pour qu'un prisme qui prend la place d'un autre, égal et situé au-dessous, descende

d'une hauteur h, il faut nécessairement que h soit la hauteur de chaque prisme. Le facteur n est donc aussi le rapport de la chute totale H à h; $nh = H$, et la quantité d'action $nPh = PH$.

Comme 1^{mc} d'eau pure pése 1000^{kg}, on peut prendre pour P le produit de 1000^{kg} et du nombre X de mètres cubes contenu dans le prisme écoulé en $1''$. Si donc T désigne le travail mécanique dont l'eau motrice est capable en $1''$, la formule par laquelle s'apprécient l'énergie du courant et la valeur vénale de la chute, devient

$$T = 1000^{kg} XH;$$

et parce que le travail d'un cheval de moyenne force vaut 75^k, pour le même temps, le courant peut remplacer un nombre de chevaux

$$N = \frac{1000^{kg} XH}{75^k}.$$

156. Lorsque la chute totale H ne peut être mesurée, on prend pour T la moitié de la force-vive que possède à la fin de la chute la masse d'eau écoulée en une seconde. Ainsi, dans ce cas, la vitesse du filet médium étant u au point le plus bas,

$$T = \frac{1000^{kg} X}{g} \times \frac{u^2}{2},$$

et

$$N = \frac{1000^{kg} Xu^2}{2g \times 75^k}.$$

157. Appliquons les formules du travail de l'eau à tous les cas d'écoulement que nous avons précédemment étudiés, et supposons d'abord un déversoir (127)

d'une largeur $l = 4^m,5$, qui donne une lame épaisse de $h' = 0^m,3$.

Si le réservoir a aussi $4^m,5$ de largeur, la distance verticale comprise entre son niveau constant et le seuil, $h = 1,25h' = 1,25 \times 0^m,3 = 0^m,375$. Par conséquent, le coefficient de correction $C = 0,39$, et le volume d'eau écoulé en 1″,

$$X = Clh\sqrt{2gh} = \left.\begin{array}{l} 0,39 \times 4^m,5 \times \\ 0^m,375\sqrt{2 \times 9^m,81 \times 0^m,375} \end{array}\right\} = 1^{mc},784.$$

Dans le cas où le niveau du réservoir serait à $3^m,5$ de la surface liquide à l'origine du canal de fuite, on trouverait pour l'énergie du moteur,

$$T = 1000^{kg} \times 1,784 \times 3^m,5 = 6244^k,$$

et

$$N = \frac{6244}{75} = 83^{ch},25.$$

Lorsque le déversoir est suivi d'un coursier du modèle B, par exemple (133), et que sa largeur $4^m,5$ fait à peu près les 0,8 de celle du réservoir,

$$h = 1,178h' = 1,178 \times 0^m,3 = 0^m,3534.$$

Par conséquent, $C = 0,324$,

$$X = 0,324 \times 4^m,5 \times 0^m,3534\sqrt{2 \times 9^m,81 \times 0^m,3534} = 1^{mc},356,$$

$$T = 1000^{kg} \times 1,356 \times 3^m,5 = 4746^k, \quad \text{et} \quad N = \frac{4746}{75} = 63^{ch},28.$$

Ainsi, l'influence du coursier et de l'élargissement du réservoir suffit pour diminuer l'énergie de 20 chevaux ou d'à peu près $1/4$.

158. Considérons maintenant un pertuis rectangulaire (128) qui débouche dans l'air, et pour lequel $l = 0^m,35$, $h - h' = 0^m,18$, $h = 1^m,4$.

Nous aurons $h'=h-0^m,18=1^m,4-0^m,18=1^m,22$. Si la contraction a lieu sur les quatre faces de la veine, le coefficient de correction $C=0,603$, d'après la table, car h' surpasse $1^m,20$, et $h-h'$ diffère peu de $0^m,2$. Dans les autres cas (129), le coefficient de correction est C', et si la contraction s'opère seulement sur

3 faces, $C'=1,035\times 0,603=0,6241$;
2 id. $C'=1,072\times 0,603=0,6464$;
1 id. $C'=1,125\times 0,603=0,6784$.

Il s'ensuit

$$X=Cl(h-h')\sqrt{2g\frac{h+h'}{2}}=\left.\begin{matrix}C\times 0^m,35\times\\ 0^m,18\sqrt{2\times 9^m,81\dfrac{1^m,4+1^m,22}{2}}\end{matrix}\right\}=C\times 0^{mc},3194,$$

et pour 4 contractions, $X=0,603\times 0^{mc},3194=0^{mc},1926$,
3 $X=0,6241\times 0^{mc},3194=0^{mc},19934$,
2 $X=0,6464\times 0^{mc},3194=0^{mc},20646$,
1 $X=0,6784\times 0^{mc},3194=0^{mc},2167$.

Enfin, si la contraction unique est produite par une vanne inclinée à 45° (136), le coefficient $C'''=0,8$, et $X=0,8\times 0^{mc},3194=0^{mc},2555$.

Dans les mêmes circonstances, on a pour l'énergie de l'eau motrice, au seuil de l'orifice,

$T=1000^{kg}\times 0,1926\times 1^m,4=269^k,64$, $N=3^{ch},59$,
$T=1000^{kg}\times 0,19934\times 1^m,4=279^k,076$, $N=3^{ch},72$,
$T=1000^{kg}\times 0,20646\times 1^m,4=289^k,044$, $N=3^{ch},85$,
$T=1000^{kg}\times 0,2167\times 1^m,4=303^k,38$, $N=4^{ch},04$,
$T=1000^{kg}\times 0,2555\times 1^m,4=357^k,7$, $N=4^{ch},77$.

Ainsi l'énergie d'un courant varie de plus d'un cheval,

selon la disposition du pertuis et de la vanne. Mais observons bien qu'on ne crée pas de la force en diminuant les contractions : tout ce qu'on fait, c'est de livrer passage à une plus grande portion de l'eau qui afflue dans le réservoir. Supposons effectivement que ce réservoir reçoive par seconde $0^{mc},3194$ de liquide, ou que le courant soit capable du travail

$$1000^{kg} \times 0,3194 \times 1^{m},4 = 447^{k},16 = 5^{ch},96.$$

Si la vicieuse disposition de l'orifice cause quatre contractions, il ne s'écoulera par seconde que $0^{mc},1926$ d'eau, et le moteur vaudra seulement 3 chevaux $\frac{1}{2}$. Chaque seconde accumulera donc dans le réservoir un nombre de mètres cubes égal à $0^{mc},3194 - 0^{mc},1926$, ou à $0^{mc},1268$. Par suite, il est vrai, le niveau haussera, l'écoulement deviendra bientôt plus rapide, plus abondant, l'énergie du courant augmentera sans cesse et tendra continuellement à égaler celle d'environ 6 chevaux ; mais la vitesse du moteur ne sera point uniforme, et c'est là un grand inconvénient. Si, pour y remédier, on établit un déversoir de décharge qui rende le niveau constant, les $0^{mc},1268$, au lieu de s'accumuler, s'échappent par cette voie et sont tout à fait perdus pour l'effet qu'on veut obtenir du courant. Finalement donc, c'est en réduisant cette perte au minimum possible, qu'une bonne disposition du pertuis et de la vanne augmente l'énergie utile d'une chute d'eau.

159. Nous prendrons pour sujet de l'application aux ajutages un cylindre horizontal qui ait $0^{m},18$ de diamètre, $0^{m},36$ de longueur, et dont la génératrice inférieure soit à $1^{m},4$ au-dessous du niveau constant dans le réservoir. Le coefficient de correction (131) $C'' = 0,815$;

le rayon de l'orifice, $r = 0^{m},09$; la distance du niveau à la génératrice supérieure, $h' = 1,4 - 0^{m},18 = 1^{m},22$, et l'on a pour le volume d'eau qui s'écoule dans chaque seconde,

$$\left.\begin{array}{l} X = C''\pi r^2 \sqrt{2g\frac{h+h'}{2}} = 0,815 \times 3,1416\,(0^{m},09)^2 \\ \times \sqrt{\left(2 \times 9^{m},81 \times \frac{1^{m},4 + 1^{m},22}{2}\right)} \end{array}\right\} = 0^{mc},105.$$

Par conséquent, l'énergie du courant, au point le plus bas de l'orifice,

$$T = 1000^{kg} \times 0,105 \times 1^{m},4 = 147^{k},$$

et elle équivaut à un nombre de chevaux

$$N = \frac{147^{k}}{75^{k}} = 1^{ch},96.$$

160. Pour faire une application aux ajutages prismatiques qui versent dans une roue à augets (132), nous supposerons la tête d'eau inclinée à 40° sur l'horizon et percée de trois orifices d'une longueur de 2^{m}. Le plus élevé aura $0^{m},08$ de largeur horizontale, le suivant $0^{m},07$, et le troisième $0^{m},06$, attendu que les projections horizontales des entrées des augets vont en diminuant de largeur à mesure qu'on descend sur la roue. Enfin, le bord supérieur du premier orifice sera de $0^{m},1$ au-dessous du niveau constant dans le réservoir. Ainsi, dans la formule $X = 0,75ld\sqrt{2gh_1}$, on connaît déjà, pour chaque ajutage, les quantités l, d, et il reste à trouver h_1, distance du niveau au bord inférieur de l'orifice. Pour le premier, cette distance vaut sensiblement $0^{m},1 + BD$, distance verticale des deux bords (P. II, F. 23). Or

$$BD = 0^{m},08 \tan 40° = 0^{m},067128.$$

Par conséquent, $h_1 = 0^m,17$. Pour le second ajutage,

$$AE = \frac{BD}{DF} \times EF = \frac{0^m,07}{0^m,08} \times 0^m,15 = 0^m,13, \text{ et } h_1 = 0^m,23.$$

Pour le troisième,

$$h_1 = 0^m,1 + \frac{0^m,07}{0^m,08}(0^m,08 + 0^m,07 + 0^m,06) = 0^m,28.$$

Le volume total du liquide versé par les trois ajutages dans chaque seconde est donc

$$X = \left\{\begin{matrix} 0,75 \times 2^m \left(0^m,08\sqrt{2 \times 9^m,81 \times 0^m,17} + 0^m,07 \times \right. \\ \left. \sqrt{2 \times 9^m,81 \times 0^m,23} + 0^m,06\sqrt{2 \times 9^m,81 \times 0^m,28}\right) \end{matrix}\right\} = 0^{mc},653;$$

le travail dont ce volume d'eau se trouve capable à la hauteur du bord inférieur du troisième orifice,

$$T = 1000^{kg} \times 0,653 \times 0^m,28 = 182^k,84,$$

et le nombre de chevaux que le courant peut remplacer,

$$N = \frac{182^k,24}{75^k} = 2^{ch},44.$$

161. Passons au cas d'un coursier raccordé avec le réservoir (156), en supposant que dans ce coursier se trouve une vanne inclinée à 45° qui forme un pertuis pour lequel la largeur $l = 0^m,35$, la hauteur $h - h' = 0^m,18$, et la distance du seuil au niveau constant du réservoir, $h = 1^m,4$.

Le coefficient de correction $C''' = 0,8$, et le volume d'eau qui s'écoule dans chaque seconde,

$$X = \left\{\begin{matrix} C'''l(h-h')\sqrt{2g\frac{h+h'}{2}} = 0,8 \times 0^m,35 \times \\ 0^m,18\sqrt{2 \times 9^m,81\,\frac{1^m,4 + 1^m,22}{2}} \end{matrix}\right\} = 0^{mc},2555.$$

Si, à partir de la vanne, le coursier a une pente de $^1/_{10}$ et une longueur horizontale de $0^m,7$, sa pente totale sera $0^m,07$; le courant formera une chute de $1^m,4 + 0^m,07 = 1^m,47$; il se trouvera capable, à l'extrémité inférieure du coursier, d'un travail

$$T = 1000^{kg} \times 0,2555 \times 1^m,47 = 375^k,585,$$

et pourra remplacer un nombre de chevaux

$$N = \frac{375^k,585}{75^k} = 5^{ch}.$$

162. Il nous reste à faire une application aux cours d'eau libres, et c'est là le cas où, ne pouvant déterminer la chute, on est obligé d'employer la vitesse moyenne (149).

Nous supposerons pour section droite du prisme liquide un trapèze qui ait 7^m de largeur à sa grande base EF (P. III, F. 4), $1^m,5$ de hauteur, et dont les côtés concourants BE, CF présentent des pentes, l'un de 3, l'autre de 2. La pente du fond sera d'ailleurs portée à

$$0,001 = \frac{H}{L}.$$

D'après ces données,

$$AB = \frac{1^m,3}{3} = 0^m,433, \quad CD = \frac{1^m,3}{2} = 0^m,65,$$

$$BE = \sqrt{(\overline{AE}^2 + \overline{AB}^2)} = 1^m,37, \; CF = \sqrt{(\overline{DF}^2 + \overline{CD}^2)} = 1^m,45,$$

$$BC = EF - (AB + CD) = 5^m,92;$$

la section droite du prisme liquide,

$$BCFE = A' = \frac{(7^m + 5^m,92)\,1^m,3}{2} = 8^{mm},398;$$

le contour frottant de la même section

$$EB + BC + CF = 1^m,57 + 5^m,92 + 1^m,45 = 8^m,74,$$

et la vitesse moyenne

$$u = 56^m,86 \sqrt{\frac{A'}{l+2e} \times \frac{H}{L}} - 0^m,072 =$$

$$56^m,86 \sqrt{\frac{8^m,398}{8^m,74} \times 0,001} - 0^m,072 = 1^m,69.$$

Donc, le volume d'eau qui s'écoule dans chaque seconde,

$$X = A'u = 8^{mm},398 \times 1^m,69 = 14^{mc},193;$$

le courant est capable d'un travail (156)

$$T = \frac{1000^{kg}X}{g} \times \frac{u^2}{2} = \frac{14193^{kg}}{9^m,81} \times \frac{(1^m,69)^2}{2} = 2066^k,$$

et il équivaut à un nombre de chevaux

$$N = \frac{2066^k}{75^k} = 27^{ch},55.$$

ROUES HYDRAULIQUES.

163. Toutes les roues hydrauliques peuvent être rapportées à deux espèces principales : les roues verticales et les roues horizontales. La première espèce renferme trois variétés que distinguent les hauteurs des points où les roues reçoivent l'eau ; ces variétés portent les noms de *roues en dessous, roues de côté, roues en dessus.* Enfin les roues en dessous sont à *aubes* planes ou à aubes courbes, et les premières occupent toute la largeur du courant ou seulement une partie de cette largeur.

Quant à la deuxième espèce, elle n'a que deux variétés : les *turbines* où l'eau agit horizontalement, et les *danaïdes* pour lesquelles le courant est incliné. Nous avons donc à étudier successivement sept sortes de roues hydrauliques.

ROUES EN DESSOUS A AUBES PLANES.

164. La roue en dessous à aubes planes ou *palettes* a, pour pièces principales, deux couronnes égales, équidistantes, et maintenues chacune par 4 ou 6 bras implantés dans un arbre horizontal. Ces bras dépassent un peu les couronnes, pour servir d'appui à autant d'aubes. On soutient les autres aubes au moyen de fortes chevilles nommées *bracons* que portent les couronnes.

Un grand nombre de roues en dessous n'ont que douze palettes; l'expérience a pourtant prouvé depuis long-temps qu'avec 18 elles produisent un plus grand effet. Selon la théorie, il faudrait, pour le maximum de travail, qu'à chaque instant il y eût une aube exposée à toute l'action de l'eau, ce qui signifie que le nombre des aubes devrait être infini. Or, bien loin de pouvoir le rendre fort grand, on ne saurait laisser entre deux palettes consécutives une distance qui différât très-sensiblement de leur hauteur, laquelle varie de $0^m,32$ à $0^m,4$, selon le rayon de la roue : un moindre écartement diminuerait d'une quantité notable l'effort utile de l'eau sur le récepteur.

La longueur des aubes ne peut être fixée : elle dépend de l'intensité de la résistance ou du volume d'eau nécessaire dans chaque seconde. Divisant ce volume par la vitesse du liquide, on a la superficie de la section droite du courant, et le quotient divisé par le quart ou tout au plus le tiers de la hauteur des aubes donne leur

longueur ; car, quel que soit le rayon de la roue, chaque palette doit plonger seulement du quart ou du tiers de sa hauteur, afin que l'eau ne puisse se perdre en passant par-dessus. On conçoit effectivement que le choc du liquide contre le récepteur cause une certaine augmentation dans l'épaisseur du prisme affluent.

Le plan AB de chaque palette (P. III, F. 5) ne passe point par l'axe C de la roue : il le laisse à quelque distance en arrière, c'est-à-dire du côté d'où vient l'eau, de manière à former un petit angle ABD avec le plan méridien CD, qui contient la génératrice B de la couronne sur laquelle s'applique l'aube. L'inclinaison produite par cette disposition est surtout nécessaire lorsque la roue doit avoir une grande vitesse, attendu qu'augmentant la hauteur des aubes, elle retarde le débordement de l'eau, et diminue ainsi la vitesse que conserve le liquide après avoir produit son effet.

On peut encore atténuer la vitesse restante, en formant une espèce de tambour au moyen de planchettes clouées sur les couronnes ; mais cette disposition, qui empêche tout débordement, exige qu'un jour BE soit laissé en avant de chaque aube, pour ménager une issue à l'air et prévenir sa réaction.

La grandeur du rayon d'une roue en dessous est tout à fait arbitraire ; mais, en la fixant, on doit considérer que le nombre des tours de l'arbre, dans un temps donné, et la solidité de l'appareil diminuent quand le rayon de la roue augmente, tandis qu'au contraire il y a accroissement dans le poids dont sont chargés les tourillons, et par suite dans la perte de force due au frottement.

La vanne doit être placée le plus près possible de la roue, pour que l'eau perde moins de vitesse par son frottement dans le coursier, et la ligne du fond de ce

coursier, qui répond verticalement à l'axe de l'arbre, sera de très-peu au-dessous du seuil du pertuis, afin que chaque aube soit frappée normalement dans sa position la plus basse : s'il n'en était pas ainsi, la chute serait évidemment altérée. La pente d'écoulement est bien suffisante, quand elle s'élève au quinzième.

Enfin, le coursier doit emboîter les aubes de manière à ne laisser entre elles et ses parois qu'un jeu de 2 centimètres, pour qu'il n'y ait qu'une faible partie du volume d'eau dépensé qui passe sans produire d'effet.

165. Lorsque le récepteur remplit toutes les conditions précédentes, on peut, dans les calculs, négliger les pertes du liquide, et supposer que la masse entière qui sort du pertuis agit sur la roue. C'est donc dans cette hypothèse que nous résoudrons les deux problèmes suivants : Quelle vitesse doit prendre une roue en dessous à aubes planes, pour produire un effet maximum, et quelle est la quantité d'action dont elle est capable sous cette vitesse?

La quantité d'action que le récepteur reçoit du moteur et peut transmettre au reste de la machine, est effectivement susceptible d'un maximum relatif à une certaine vitesse; car, supposons la vitesse nulle, la roue au repos ne produira aucun travail; augmentons la vitesse jusqu'à ce qu'elle égale celle de l'eau, les aubes n'étant plus soumises à aucune pression, ne pourront vaincre aucune résistance, et le récepteur tournera inutilement. Ainsi, les deux limites de la vitesse rendent nulle la quantité d'action de la roue, et par conséquent, entre ces limites se trouve une valeur qui donne le maximum du travail.

Soit donc v la vitesse constante du courant un instant avant le choc, v' celle du centre de l'aube, quand le mouvement est devenu uniforme, et m la masse cho-

quante. L'eau pousse l'aube en vertu de sa vitesse relative $v-v'$; l'effort constamment exercé par le liquide, ou celui qui s'oppose à l'écoulement, ou encore celui Q que fait l'aube contre les résistances de la machine, égale la quantité de mouvement $m(v-v')$. La formule qui détermine cet effort est donc

$$Q=m(v-v'),$$

et l'on a, pour trouver la quantité d'action dont la roue est capable en 1″,

$$Qv'=m(v-v')v'.$$

Les mêmes formules peuvent être établies tout aussi simplement d'une autre manière due à Petit, qui en a fait voir la facile application à toutes les sortes de roues hydrauliques. Elle est fondée sur ce principe évident que la quantité d'action possédée par l'eau un instant avant le choc égale celle qui est détruite par la percussion, plus celle que reçoit la roue, plus encore celle qui reste au liquide quand il abandonne l'aube.

Or, d'après les notations ci-dessus employées, $\frac{mv^2}{2}$ est la quantité d'action dont l'eau est capable au moment du choc. Ce choc fait perdre au liquide, supposé dénué d'élasticité, une vitesse $v-v'$ et une quantité d'action $\frac{m(v-v')^2}{2}$; la quantité d'action transmise à la roue est Qv'; enfin l'eau, après avoir accompagné l'aube avec la vitesse v', la quitte en conservant cette même vitesse et une quantité d'action $\frac{mv'^2}{2}$. De là donc la relation

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{m(v-v')^2}{2}+Qv'+\frac{mv'^2}{2}.$$

Elle donne successivement

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv^2-2mvv'+mv'^2}{2}+Qv'+\frac{mv'^2}{2},$$

$$Qv'=\frac{2mvv'-2mv'^2}{2}=m(v-v')v',\quad Q=m(v-v').$$

C'est de la méthode de Petit que nous ferons usage désormais, parce qu'elle est souvent plus simple que l'emploi des quantités de mouvement, et qu'elle permet la comparaison immédiate des diverses roues hydrauliques relativement aux quantités d'action perdues, conservées et transmises.

Différentions maintenant, par rapport à la seule variable v', l'équation

$$Qv'=m(v-v')v'.$$

Nous obtiendrons

$$d(Qv')=mvdv'-2mv'dv',\quad \text{et}\quad \frac{d(Qv')}{dv'}=mv-2mv'.$$

Le maximum de Qv' a donc pour condition

$$m(v-2v')=0 \quad \text{ou} \quad v=2v' \quad \text{ou} \quad v'=\frac{v}{2},$$

c'est-à-dire que, d'après la théorie, la roue doit, pour produire le maximum d'effet, avoir une vitesse égale à la moitié de celle du liquide moteur.

Mais ce n'est là qu'une limite au-dessous de laquelle on doit se tenir. Les expériences de Bossut et de Smeaton prouvent qu'à cause des pertes d'eau, il faut se borner à faire $v'=0,4v$.

166. En prenant $v'=\frac{v}{2}$, on aurait

$$Qv' = m\left(v - \frac{v}{2}\right)\frac{v}{2} = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{2}.$$

Or $\frac{mv^2}{2}$ est la quantité d'action dont le moteur est capable. Par conséquent, le maximum du travail de la roue vaut théoriquement la moitié de celui du liquide. Mais comme les expériences de Smeaton apprennent qu'il ne faut guère compter que sur les $^3/_{10}$, la formule à employer dans la pratique est

$$Qv' = 0{,}3\,\frac{mv^2}{2} = 0{,}6\,\frac{mv^2}{4} = 0{,}6m\left(v - \frac{v}{2}\right)\frac{v}{2},$$

et généralement

$$Qv' = 0{,}6m\,(v - v')v'\,;$$

car elle reste vraie, quelle que soit la vitesse v', pourvu qu'elle ne diffère pas beaucoup de $0{,}4v$. Divisant par v', on obtient pour l'effort qu'exerce le milieu de l'aube,

$$Q = 0{,}6m\,(v - v').$$

Quant à la masse m, on la trouve aisément au moyen de la relation

$$m = \frac{1000^{\text{k}}X}{g},$$

dans laquelle X est en mètres cubes le volume d'eau qui s'écoule par le pertuis en $1''$.

167. Si l'on veut apprécier théoriquement la quantité d'action consommée dans le choc, lors du travail maximum, on considérera que l'eau quittant les aubes avec la vitesse de la roue $\frac{v}{2}$, ne conserve qu'une force-vive exprimée par $\frac{mv^2}{4}$ ou une quantité d'action égale à

$\frac{mv^2}{8}$, et l'on en conclura que la perte due au choc est

$$\frac{mv^2}{2} - \left(\frac{mv^2}{4} + \frac{mv^2}{8}\right) = \frac{mv^2}{2} - \frac{3}{8}mv^2 = \frac{mv^2}{8} = \frac{1}{4}\frac{mv^2}{2},$$

c'est-à-dire qu'elle forme le quart de la quantité d'action dont le moteur est capable.

D'aprés l'expérience, l'eau qui s'en va avec une vitesse égale à celle de la roue, conserve les 0,4 de sa vitesse primitive et peut encore donner les 0,16 de la quantité d'action $\frac{mv^2}{2}$. Ainsi, la perte réellement due au choc est

$$\frac{mv^2}{2} - \left(0{,}3\frac{mv^2}{2} + 0{,}16\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv^2}{2} - 0{,}46\frac{mv^2}{2} = 0{,}54\frac{mv^2}{2},$$

un peu plus que moitié de la quantité d'action du courant.

168. Les valeurs précédemment trouvées pour Q et Qv' ne conviennent pas aux cas assez communs où le jeu laissé entre la roue et les parois du coursier surpasse $0^m{,}02$. Alors, en effet, on ne peut plus considérer la masse m du liquide sorti du réservoir en $1''$ comme agissant tout entière sur les aubes. Le choc n'est évidemment opéré que par la masse m' du prisme d'eau qui a pour base droite la surface noyée A' d'une aube et pour longueur la vitesse v du courant. Or, si $A'v = X'$ mètres cubes,

$$m' = \frac{1000^{k}X'}{g},\quad \frac{m'}{m} = \frac{X'}{X} = \frac{A'v}{Av} = \frac{A'}{A},$$

la section droite et mouillée du coursier en mètres carrés étant représentée par A, et $m' = \frac{A'}{A}m$. C'est donc le second membre de cette dernière équation qu'il faut

substituer à m dans nos formules théoriques. Elles deviennent conséquemment

$$Qv' = \frac{A'}{A} m(v - v')v', \text{ et } Q = \frac{A'}{A} m(v - v').$$

M. Christian a trouvé, par expérience, que, dans ce cas, la vitesse de la roue relative au maximum d'effet est encore donnée par la relation

$$v' = 0{,}4v,$$

et que, pour cette vitesse, les valeurs théoriques de Qv' et de Q doivent être multipliées par 0,75. Lors donc qu'on a rempli la condition du maximum d'effet, les formules à employer sont

$$Qv' = 0{,}75 \frac{A'}{A} m(v - v')v', \text{ et } Q = 0{,}75 \frac{A'}{A} m(v - v').$$

Mais, si l'on a $v' \gtrless 0{,}4v$, le coefficient nécessaire est comme précédemment 0,6, et les formules deviennent

$$Qv' = 0{,}6 \frac{A'}{A} m(v - v')v', \quad Q = 0{,}6 \frac{A'}{A} m(v - v').$$

169. Supposons qu'il faille déterminer la quantité d'action et l'effort dont se trouve capable une roue en dessous à aubes planes, soumise à un courant qui, avec une vitesse de $5^{m},07$, donne par seconde un volume d'eau de $0^{mc},2166$. Cette roue fait dix-sept tours en $1'$; son rayon, pris de l'axe de l'arbre au milieu d'une aube, égale $1^{m},8$; le jeu qu'elle laisse dans le coursier est d'environ $0^{m},02$.

Il faut d'abord chercher la vitesse du point où le choc est supposé concentré. Ce point parcourt à chaque tour une circonférence longue de $2 \times 3{,}1416 \times 1^{m},8 =$

$11^m,30976$; son chemin pour $1'$ vaut $11^m,30976 \times 17 = 192^m,26592$, et pour $1''$, on a

$$v' = \frac{192^m,26592}{60} = 3^m,204432.$$

La masse du liquide qui s'écoule dans le même temps,

$$m = \frac{1000^{kg} X}{g} = \frac{1000^{kg} \times 0,2166}{9^m,81} = \frac{216^{kg},6}{9^m,81} = 22,08.$$

Donc

$$Q = 0,6m(v - v') = 0,6 \times 22,08(5^m,07 - 3^m,204) = 24^{kg},73,$$

et

$$Qv' = 0,6m(v - v')v' = 24^{kg},73 \times 3^m,204 = 79^k,235.$$

Supposons une vanne inclinée, placée très-près du point le plus bas de la roue. Le frottement des parois du coursier pourra être négligé, et la vitesse $5^m,07$ regardée comme due à la chute totale. Alors, le courant est capable, par seconde, d'un travail

$$T = \frac{1000^{kg} X v^2}{2g} = \frac{1000^{kg} \times 0,2166 \times (5^m,07)^2}{19^m,62} = 288^k,873,$$

et le travail de la roue forme seulement à peu près les 0,274 de celui que pourrait faire le moteur.

S'il arrivait que le jeu sous l'aube perpendiculaire au courant fût $^1/_8$ de la hauteur h de la section droite du prisme d'eau, et que le jeu latéral égalât en totalité $^1/_{10}$ de la largeur l du coursier, on aurait pour la hauteur de la partie noyée de l'aube, $h' = h - {}^1/_8 h = {}^7/_8 h$; pour la longueur, $l' = l - {}^1/_{10} l = {}^9/_{10} l$; pour la superficie choquée, $A' = l'h' = {}^9/_{10} l \times {}^7/_8 h = {}^{63}/_{80} lh$; et comme lh serait la superficie représentée par A, on aurait aussi

$\frac{A'}{A}=\frac{63}{80}$. Donc, dans le cas dont il s'agit, où le jeu dépasse $0^m,02$ sur chaque côté de l'aube, il faudrait multiplier par $^{63}/_{80}$ les valeurs précédemment trouvées pour Q et Qv'; de sorte qu'on obtiendrait

$$Q=24^{kg},73\times{}^{63}/_{80}=19^{kg},475,$$

et

$$Qv'=79^{k},235\times{}^{63}/_{80}=62^{k},4.$$

ROUES EN DESSOUS A AUBES COURBES.

170. Les roues à aubes courbes ou cylindriques sont dues à M. Poncelet. Il a réuni dans leur tracé et dans celui de leurs accessoires tous les moyens qu'ont fournis jusqu'à présent la théorie et l'expérience pour économiser la force de l'eau. Voyons d'abord comment se détermine le profil d'une aube : la construction a pour but de prolonger l'action de l'eau sur la roue, de rendre facile et prompt le dégagement du liquide qui a produit son effet, et d'annuler le choc.

Soient AB le fond du coursier (P. III, F. 6), CD le filet médium du courant, EF, GH, l'arête extérieure et l'arête intérieure d'une couronne. Au point de rencontre D de la surface CD et du cercle extérieur EF, on élève une normale au courant, et du point I où cette perpendiculaire coupe le cercle intérieur GH, on décrit un arc de cercle DK, avec ID pour rayon. Cet arc est la génératrice courbe de la surface cylindrique de l'aube.

Toutefois, si les couronnes avaient une grande largeur, il faudrait prendre le centre I au-dessous de l'arête circulaire GH, mais toujours sur la perpendiculaire DI; si les couronnes étaient étroites au contraire,

le centre I devrait être pris au-dessus du cercle GH. Dans tous les cas, on doit faire en sorte que l'arc DK, tangent à CD, coupe d'équerre la circonférence GH, afin que l'eau qui pourra jaillir au-dessus de l'aube, parvenue à sa plus basse position, s'élève verticalement et retombe presque aussitôt sur la surface courbe. Or, portons le moindre rayon OH, de D en L, sur le filet médium; puis tirons DK parallèle à LO. Le rayon OK rencontrera le prolongement de LD en un point M, tel que nous aurons MD=MK, puisque LD=OK. Si donc de M on abaisse une perpendiculaire sur DK, elle coupera DI en un point I' également éloigné de D et de K; l'arc de cercle décrit de I' avec I'D passera par K, et il aura OM pour tangente, parce que l'angle I'KM sera droit comme I'DM.

Le nombre des aubes et leurs intervalles dépendent du rayon de la roue et du volume de liquide qu'elle reçoit. Lorsque le diamètre est de 3 à 4 mètres, il faut 36 aubes, et davantage si le cours d'eau est faible; on doit en placer au moins 48, quand le diamètre est de 6 à 7 mètres.

Pour que l'eau qui se meut sur les aubes ne les dépasse pas, ou plutôt pour qu'il se perde peu de liquide, l'arc DK du profil a besoin d'une corde proportionnée à la charge sur le seuil du pertuis, et comme cette corde dépend de la largeur des couronnes, il convient de mettre une différence de $0^m,35$ à $0^m,4$ entre les rayons des arêtes circulaires EF, GH, lorsque la charge est de $0^m,8$ seulement; si elle approche de 2^m, la différence des rayons sera portée à $0^m,6$ au moins.

171. La construction des aubes et des couronnes ne présente d'ailleurs aucune difficulté. Les premières peuvent être formées de petites planchettes en bois de chêne, assemblées, comme les douves planes d'un ton-

neau, dans des rainures circulaires pratiquées sur les faces verticales et intérieures des couronnes, ou bien on cloue ces mêmes planchettes sur des liteaux circulaires qui remplacent les rainures. Il serait mieux sans doute de substituer des feuilles de tôle aux planchettes : la roue se trouverait moins sujette aux réparations; mais si, par économie, les aubes sont faites en bois, il faut à tout le moins garnir le bord extérieur d'une lame de tôle large de 6 à 8 centimètres, car ce bord doit être façonné en biseau très-mince, pour que le choc de l'eau soit pour ainsi dire nul.

Il serait avantageux, sous le rapport de la durée, de faire les couronnes en fonte; mais il n'y a pas d'inconvénient à les construire en bois. Chacune de ces pièces est alors composée de deux cercles de jantes assemblées sur les bras, à mi-bois et en queue d'aronde, sans tenon, de manière que les faces intérieures des parties superposées forment un seul plan vertical. Les jantes doivent avoir $0^{m},054$ d'épaisseur et de $0^{m},162$ à $0^{m},189$ de largeur. L'intervalle des deux anneaux d'une même couronne est rempli par des planches de $0^{m},027$ à $0^{m},034$ d'épaisseur, boulonnées de distance en distance sur la face intérieure des jantes et des bras, et assez longues pour recouvrir entièrement les assemblages de ces pièces. Enfin, il est bon de s'opposer à l'écartement des deux couronnes par des boulons qui les lient l'une à l'autre, bien que, dans la roue de M. Poncelet, le liquide, presque totalement employé à presser les aubes, agisse fort peu contre les faces verticales intérieures.

172. L'intervalle des mêmes faces ou la longueur des aubes surpasse d'environ $0^{m},06$ la largeur qu'a le coursier en amont, afin qu'il n'y ait point choc de l'eau contre les couronnes. Il en résulte que les joues du coursier doivent présenter des retraites cylindriques ABC, A'B'C'

(P. III, F. 7) où la roue puisse se loger et se mouvoir librement. La profondeur AB de ces retraites, mesurée horizontalement, ne peut être moindre de $0^m,18$, pour que les aubes s'y engagent de $0^m,03$ par les deux bouts, que chaque couronne épaisse de $0^m,09$ s'y trouve à l'abri du choc, et qu'il reste de chaque côté un jeu de $0^m,06$. Quant à celui qu'il est nécessaire de laisser entre les retraites et les faces cylindriques des couronnes, on peut le réduire à $0^m,03$, ce qui montre que le rayon à employer pour tracer le profil des deux renfoncements excède seulement de $0^m,03$ le plus grand rayon de la roue.

Le fond AB du coursier d'amont (F. 8) est parallèle à un plan CD qui touche la roue en s'inclinant de $^1/_{15}$ ou de $^1/_{10}$ au plus. L'intervalle des deux plans ou le jeu est de $0^m,01$ pour les roues en fer ou en fonte, et de $0^m,02$ pour les roues en bois, attendu que ces dernières ne sont jamais aussi bien exécutées que les premières, et que d'ailleurs la nature de leur matière les expose à fléchir, à se déformer.

Arrivé au-dessous du contact D du plan qui lui est parallèle, le fond du coursier devient cylindrique, et embrasse concentriquement un arc DE de la roue plus long de 5 à 6 centimètres que celui qui sépare deux aubes consécutives. Le jeu pour cette partie courbe égale celui de la partie plane. Il résulte évidemment d'une telle disposition que, malgré la pesanteur et la force centrifuge, l'eau se maintient sur l'aube emboîtée pendant tout le temps employé par la roue pour parcourir un arc égal à celui qui se trouve entre deux aubes voisines.

A l'extrémité de sa partie cylindrique, le fond du coursier s'abaisse tout à coup, et forme une marche ou ressaut F destiné à empêcher l'eau sortie des aubes de nuire au mouvement de la roue. La hauteur de ce res-

saut doit être combinée avec la largeur qu'a le coursier en aval, de manière que, dans cette partie, le niveau du liquide soit, en temps ordinaire, inférieur de quelque peu à l'arête qui termine la portion cylindrique. Observons cependant que le ressaut diminuant la chute totale, il faut lui donner le moins d'élévation possible. Pour une raison semblable, le canal de fuite doit n'avoir que la pente strictement nécessaire.

173. D'après ce qui vient d'être dit du tracé des aubes et du coursier, la théorie de la roue Poncelet peut évidemment être basée sur l'hypothèse que l'eau agit sans produire aucun choc, ou qu'il n'y a aucune perte de vitesse. Si donc v est la vitesse du liquide au moment où il atteint le bord antérieur d'une aube, et v' la vitesse de ce bord, l'eau montera sur la surface cylindrique en vertu d'une vitesse $v-v'$. Mais elle ne s'y élèvera pas à la hauteur génératrice de cette vitesse, car son ascension sera contrariée par la force centrifuge, en même temps que par la pesanteur. Néanmoins ces deux forces, après avoir détruit la vitesse $v-v'$, la restitueront au liquide, en le forçant à descendre le long de l'aube; de sorte que sa vitesse de sortie égalerait sa vitesse d'entrée, si la roue ne l'emportait pas avec la vitesse v' dans son mouvement en sens contraire. A cause de cette circonstance, la sortie, qui a lieu d'aval en amont, se fait avec la vitesse $(v-v')-v'=v-2v'$, et l'eau conserve une quantité d'action $\frac{m(v-2v')^2}{2}$. Comme celle dont elle était capable en arrivant sur l'aube, est $\frac{mv^2}{2}$, on a pour la dépense faite sur la roue, ou pour le travail que peut donner cette roue en une seconde,

$$Qv'=\frac{mv^2}{2}-\frac{m(v-2v')^2}{2}=2m(v-v')v'.$$

174. La valeur de v' relative au maximum d'effet est évidemment déterminée par la condition que l'eau perde toute sa vitesse avant de quitter la roue, et il en résulte $v - 2v' = 0$, puis $v' = \frac{v}{2}$. La différentiation de la valeur de Qv' conduirait d'ailleurs au même résultat. Ainsi, pour la roue en dessous à aubes courbes comme pour la roue en dessous à aubes planes, la vitesse qui convient théoriquement au maximum d'effet est la moitié de celle du courant ; mais la première de ces roues, animée d'une telle vitesse, reproduit toute la quantité d'action du moteur, tandis que la seconde en donne seulement la moitié (166). On obtient ici en effet

$$Qv' = \frac{mv^2}{2},$$

quand $v' = \frac{v}{2}$.

L'expérience n'est pas tout à fait d'accord avec les résultats théoriques, bien entendu. Elle apprend que la vitesse qui doit animer la roue, pour le maximum d'effet réel, surpasse $\frac{v}{2}$, sans s'élever au-dessus de $0{,}55v$; si cependant la dépense d'eau est forte, on peut porter v' jusqu'à $0{,}6v$: la quantité d'action n'en est pas notablement altérée. Or c'est là un grand avantage, quand la roue met en mouvement des machines qui ont besoin de marcher vite.

175. L'estimation du travail d'une roue à aubes courbes varie dans la pratique avec la hauteur due à la vitesse du courant et la grandeur du pertuis. Lorsque la hauteur génératrice de v surpasse 2^m, et que le pertuis présente une faible superficie, de $0^{mm},012$ à $0^{mm},08$, la quantité d'action produite par la roue est les 0,65

de la valeur théorique de Qv'; de sorte qu'on a

$$Qv' = 0{,}65 \times 2m(v - v')v' = 1{,}3m(v - v')v',$$

ou bien, en désignant par X le nombre de mètres cubes de la dépense d'eau,

$$Qv' = 1{,}3\,\frac{1000^{kg}X}{g}(v - v')v' = 132{,}52X(v - v')v'.$$

Si la hauteur due à v ne dépasse pas $1^m{,}5$, et que la vanne s'élève de 20 à 30 centimètres au-dessus du seuil du pertuis, la quantité d'action de la roue est les 0,75 de la valeur théorique de Qv', et

$$Qv' = 0{,}75 \times 2m(v - v')v' = 1{,}5m(v - v')v',$$

ou bien

$$Qv' = 1{,}5\,\frac{1000^{kg}X}{g}(v - v')v' = 152{,}9X(v - v')v'.$$

Ainsi, dans le premier de ces deux cas, l'effet maximum de la roue vaut les 0,65 de celui dont l'eau motrice est capable, et dans le second, les 0,75; de sorte que, terme moyen, on peut l'estimer aux 0,7, et poser en fait qu'il est au moins double de celui des roues en dessous à aubes planes placées dans les mêmes circonstances.

176. Nous prendrons les données précédemment employées pour la roue à aubes planes. Ainsi,

$$v = 5^m{,}07, \quad X = 0^{mc}{,}2166, \quad v' = 3^m{,}204.$$

Cette dernière vitesse est celle du bord extérieur de l'aube, et pour la déduire du nombre de tours, il faut mesurer le rayon depuis ce bord jusqu'à l'axe de la roue.

Comme nous avons trouvé (161), pour un coursier à raccordements, que la dépense $X=0^{mc},255$, quand la chute $h=1^{m},4$ et que la hauteur du pertuis $h-h'=0^{m},18$, nous pouvons admettre que ces hauteurs ont ici à peu près les mêmes valeurs, et en conclure qu'il faut employer la formule

$$Qv' = 152,9X(v-v')v'.$$

Elle donne

$$Qv'=152,9\times 0,2166(5^{m},07-3^{m},204)3^{m},204=198^{k}.$$

Pour l'effort de la roue rapporté à la plus grande circonférence, on a

$$Q=152,9X(v-v')=152,9\times 0,2166\,(5^{m},07-3^{m},204)=61^{kg},798.$$

Si $v'=5^{m},07\times 0,55=2^{m},79$, l'effet est au maximum, et

$$Qv'=152,9\times 0,2166(5^{m},07-2^{m},79)\,2^{m},79=210^{k},67,$$

nombre peu différent de 198^{k}. Ainsi, la vitesse de la roue peut être augmentée de $3^{m},204-2^{m},79=0^{m},414$, sans que le travail soit diminué d'une quantité importante.

La quantité d'action dont le courant se trouve capable au moment où l'eau passe sur l'aube (155),

$$T=1000^{kg}XH=1000^{kg}\times 0,2166\times 1^{m},4=303^{k},24,$$

car avec une vanne inclinée, fort rapprochée du ressaut, la chute totale diffère peu de la distance $1^{m},4$ du niveau dans le réservoir au seuil du pertuis. Par conséquent, la roue à aubes courbes donne une fraction du travail égale à

$$\frac{198^{k}}{303^{k},24}=0,653,$$

tandis que la roue à aubes planes n'en fournit que les 0,274. L'effet de la première est donc plus que double de celui de la seconde.

ROUES PENDANTES.

177. Les deux espèces de roues qui viennent de nous occuper prennent à peu près toute la largeur et la profondeur du courant que leur amène le coursier; mais il existe des roues en dessous dont les aubes planes ont une longueur et une hauteur bien moindres que ces deux dimensions du moteur. L'arbre est porté par des pilots plantés sur le fond d'une rivière, ou par deux bateaux accouplés et fixes, ou même par un seul bateau qu'il traverse. Dans ce dernier cas, la roue *pend* en quelque sorte à l'un des bouts de l'arbre, et de là vient à tous les récepteurs hydrauliques dépourvus de coursiers, le nom de *roues pendantes*.

Les aubes ont 3 à 4 mètres de longueur et 4 à 8 décimètres de hauteur, ou plus généralement leur hauteur varie entre $^1/_5$ et $^1/_4$ du plus grand rayon de la roue. Comme ce rayon, dans sa position verticale inférieure, peut être mouillé sur $^1/_3$ de sa longueur, sans inconvénient, il y a des cas où les aubes plongent entièrement dans l'eau; mais il vaut mieux ne les faire plonger qu'en partie, à moins pourtant qu'on ne puisse atteindre ainsi la lame où règne la plus grande vitesse. Elles doivent d'ailleurs être inclinées sur le plan diamétral correspondant, s'en écarter de 27 à 30 degrés en amont, et avoir aux deux bouts un rebord, saillant de 5 à 10 centimètres sur la face qui reçoit le choc, afin que le liquide ne pouvant glisser aussi facilement se dérobe moins à la pression qu'il doit exercer.

Le plus grand nombre de roues pendantes actuellement construites ont seulement 12 aubes ; mais d'après les expériences et les calculs de Bossut, il est plus avantageux de leur en donner 18; on pourrait même aller jusqu'à 24, en les écartant toujours de manière que l'arc intercepté sur la plus grande circonférence égale leur hauteur. Cette prescription est contraire au préjugé assez général qu'il y a perte d'effet quand plusieurs aubes sont en prise à la fois, ou lorsqu'une aube en masque une autre. Mais Desparcieux a fait voir que celle-ci n'en reçoit pas moins un certain effort, et que la circonstance la plus favorable à l'action, au lieu d'être celle où l'aube frappée se trouve perpendiculaire au courant, comme nombre de personnes le croient, est celle où deux aubes consécutives plongent également.

178. Si la vitesse v qu'a le fluide à sa surface était commune à tous les filets qui frappent la superficie A d'une palette perpendiculaire à leurs directions, Av serait en mètres cubes le volume d'eau que recevrait cette palette dans chaque seconde ; ce volume peserait $1000^{kg}Av$; il renfermerait une masse $\frac{1000^{kg}Av}{g}$, et l'on aurait (165) pour l'effort constant exercé sur la roue, au centre de A,

$$Q = \frac{1000^{kg}Av}{g}(v - v'),$$

v' étant la vitesse du milieu de la partie mouillée de l'aube.

Des expériences faites à Lyon, par M. Poncelet, sur des moulins du Rhône, out prouvé que les 0,8 de la valeur hypothétique de Q donnent assez exactement l'effort réel d'une roue pendante. On peut donc adopter pour formule de cet effort,

$$Q = 0,8\,\frac{1000^{kg}Av}{g}(v - v') = 81,55Av(v - v'),$$

et pour celle de la quantité d'action dont la roue est capable par seconde,

$$Qv' = 81,55Av(v - v')v'.$$

179. L'expérience a montré aussi que la valeur la plus avantageuse de v' se trouve comprise entre $\frac{v}{3}$ et $\frac{v}{2}$. La condition du maximum de travail est donc à peu près $v'=0,4v$, comme pour les roues à aubes planes qui tournent dans un coursier (165).

180. Supposons qu'une roue pendante ait $1^m,5$ de son axe au milieu de la partie mouillée de la palette verticale inférieure, et fasse par minute un nombre de tours égal à 4,77 ; que, pour la palette perpendiculaire au courant, la partie immergée $A=1^{mm},85$, et que la vitesse à la surface de l'eau $v=1^m,87$.

Nous aurons

$$v' = \frac{2\times3,1416\times1^m,5\times4,77}{60''} = 0^m,749,\quad \text{et}\quad \frac{v'}{v} = \frac{0,749}{1,87} = 0,4,$$

ce qui montre que le mouvement est réglé de manière à produire le plus grand travail possible. Nous trouverons ensuite que l'effort de la roue à l'extrémité du rayon $1^m,5$,

$$Q = 81^{kg},55\times1,85\times1,87\,(1,87 - 0,749) = 316^{kg},25,$$

et que la quantité d'action dont cette roue est capable par seconde,

$$Qv' = 316^{kg},25\times0^m,749 = 236^k,87.$$

Or (150), la vitesse moyenne du courant

$$u = 0,8v = 0,8\times1^m,87 = 1^m,496,$$

et le travail qu'il peut faire dans chaque seconde (156),

$$T = \frac{1000^{kg} X}{g} \times \frac{u^2}{2} = \frac{1000^{kg} \times 1,85 \times 1,496}{9^m,81} \times \frac{(1^m,496)^2}{2} = 315^k,69.$$

Par conséquent, une roue pendante n'utilise au plus que les 0,75 de l'énergie du moteur.

ROUES DE CÔTÉ.

181. On appelle *roues de côté* toutes celles qui reçoivent l'eau beaucoup plus haut que les roues en dessous, sans la recevoir pourtant à leur partie supérieure. Ordinairement leur axe A (P. III, F. 9) se trouve élevé d'un tiers de rayon au-dessus du seuil du pertuis. Les aubes sont planes et forment des plans diamétraux. Souvent un tambour ferme leurs intervalles du côté de l'axe; mais au-dessous de chaque aube on laisse un jour large de $0^m,03$ à $0^m,05$, pour faciliter la sortie de l'air. Le coursier emboîte la roue depuis l'entrée de l'eau jusqu'au point le plus bas; son fond BC est disposé en surface cylindrique, concentrique au tambour avec un jeu de $0^m,01$, raccordée au fond du réservoir par une surface courbe BD, et terminée brusquement, dans le plan vertical de l'axe de l'arbre, à un ressaut C qui permet au liquide de s'échapper sans nuire au mouvement de la roue, dès qu'il a produit son effet.

Mais une chose particulière aux roues de côté est à considérer : le volume d'eau que reçoit, en traversant la veine fluide, l'espèce d'auge formée par deux aubes consécutives, doit être au plus les $^2/_3$ de la capacité, pour le cas d'un pertuis, et la moitié pour celui d'un déversoir : au-delà de ces limites, une partie du liquide sort de l'auge.

Soient R la distance du milieu d'une aube à l'axe, distance qu'on appelle *rayon moyen* de la roue, l' la longueur des aubes, r le rayon du tambour, e l'écartement de deux aubes consécutives mesuré sur la circonférence $2\pi R$. La surface d'une aube sera $2(R-r)l'$, et la capacité d'une auge aura pour expression

$$2(R-r)l'.e.$$

Or le volume d'eau X dépensé en 1″ est reçu presque en totalité par la roue dans le même temps, quand le jeu est très-petit, et si v' représente la vitesse de cette roue rapportée à l'extrémité de R, v' forme l'arc de la circonférence $2\pi R$ par lequel entre le même volume. Le volume reçu par chaque mètre de cet arc vaut donc $\frac{X}{v'}$, et celui qui entre par l'arc e ou dans chaque auge est $\frac{X}{v'}e$.

On doit donc avoir au plus, pour le cas d'un pertuis,

$$\frac{X}{v'}e = \frac{2}{3}\times 2(R-r)l'.e, \quad \text{ou} \quad X = \frac{2}{3}\times 2(R-r)l'v',$$

et pour le cas d'un déversoir,

$$X = {}^1/_2 \times 2(R-r)l'v',$$

c'est-à-dire les $^2/_3$ ou la moitié de la capacité qui reçoit le volume total X.

Comme v' est déterminée par d'autres considérations, et que $l' = l + 0^m,1$, l étant la largeur du pertuis ou du déversoir, la valeur de X donne la limite inférieure de la largeur $2(R-r)$ des aubes et laisse e arbitraire. Quant à la limite supérieure de $2(R-r)$, elle est ordinairement $0^m,5$.

Il est visible d'ailleurs que, s'il s'agit d'une machine à établir, d'une machine dont aucune partie n'est cons-

truite, on peut encore satisfaire à la condition de capacité en faisant varier l' et v'.

Le plus grand rayon de la roue ne saurait jamais être moindre que la chute totale. Lors donc qu'on l'aura déterminé d'après cette condition, la localité et le nombre de tours que la roue devra faire par minute, on en retranchera $2(\mathrm{R}-r)$ pour avoir le rayon du tambour, et la moyenne de ces deux rayons donnera R.

Puisque e reste indéterminé, il en est de même de l'écartement des aubes sur la plus grande circonférence de la roue. Mais, pour la facilité des constructions, on le prend égal à $2(\mathrm{R}-r)$, et le nombre des aubes s'ensuit.

182. Passons à la théorie des roues de côté, et supposons d'abord que la masse d'eau m sortie du réservoir en 1″ frappe perpendiculairement l'aube en prise. Il en résulte qu'elle lui communique une quantité d'action $m(v-v')v'$, comme dans le cas d'une roue en dessous (165), et parce que les aubes se succèdent sans interruption, la roue de côté est, en premier lieu, continuellement capable d'une quantité d'action $m(v-v')v'$ par seconde.

Mais une fois entré dans l'auge, le liquide en presse la paroi inférieure jusqu'au ressaut, et si nous désignons par H la hauteur de laquelle il descend depuis son introduction jusqu'à sa sortie, la masse d'eau m fait un travail $mg\mathrm{H}$ en accompagnant l'aube. Par conséquent, la même masse, au moment où elle sort de la roue, en a augmenté de $mg\mathrm{H}$ la quantité d'action. Or l'augmentation se répète à chaque seconde, puisque m entre et sort dans ce temps. La roue se trouve donc continuellement capable d'une quantité d'action

$$m(v-v')v'+mg\mathrm{H}$$

par seconde, et l'on a l'équation

$$Qv' = m(v - v')v' + mgH.$$

Différentiant par rapport à v', il vient

$$\frac{dQv'}{dv'} = mv - 2mv',$$

ce qui montre que le maximum théorique du travail par seconde Qv' répond à

$$mv - 2mv' = 0 \qquad \text{ou à} \qquad v' = \frac{v}{2},$$

comme pour les roues en dessous (165).

Ainsi, dans le cas du maximum, la masse m une fois reçue dans les auges n'aura plus que la vitesse $\frac{v}{2}$; c'est avec cette vitesse qu'elle quittera la roue, et, à cause du terme invariable mgH, la fraction de sa quantité d'action qu'elle communiquera au récepteur sera d'autant plus grande que la vitesse d'entrée v se trouvera plus petite, ou que la charge d'eau sur le centre de l'orifice sera moins forte.

Il faudrait donc, pour qu'une roue de côté produisît tout l'effet du moteur, que sa vitesse fût extrêmement faible. Mais l'expérience prouve qu'on ne peut la rendre moindre qu'un mètre pour les roues en bois, ni moindre que $0^m,6$ pour les roues en fer, à cause de la perte d'eau qui a lieu par le jeu du coursier, et dont le rapport au liquide utilement employé croît avec la lenteur du mouvement de la roue.

Il suit de là que la vitesse d'entrée v devrait être seulement d'environ 2^m ou $1^m,2$. On parvient à la rendre telle, en substituant au pertuis un déversoir qui ne laisse qu'une épaisseur d'à peu près $0^m,3$ ou $0^m,2$

à la lame d'eau. Mais il peut en résulter une trop grande longueur pour les aubes, si la roue, devant être puissante, exige une grande dépense de liquide, et alors on est obligé de sacrifier une partie de l'effet du moteur, en augmentant la vitesse d'entrée. Toutefois, la longueur du tambour d'une roue de côté peut être de 6 à 7^m sans inconvénient.

Lorsque la vitesse v est convenablement fixée, on détermine v', dans la pratique, par l'une des deux relations

$$v' = 0,5v, \qquad v' = 0,7v,$$

pour que les auges puissent se remplir à peu près aux $^2/_3$ ou à la moitié, car au fond v' peut varier entre $0,3v$ et v sans que le travail de la roue varie d'une quantité notable, et cela vient de la grande influence qu'a le terme mgH sur ce travail, principalement quand l'eau sort d'un déversoir, attendu qu'alors la hauteur H surpasse celle qui résulte d'un pertuis.

183. Des expériences de M. le capitaine Morin apprennent que, pour une roue de côté à pertuis, avec tambour ou sans tambour, dont chaque auge se remplit aux $^2/_3$ tout au plus, et dont la vitesse ne surpasse pas ou surpasse de peu celle qu'a le liquide à son entrée, la quantité d'action réellement produite dans chaque seconde,

$$Qv' = 0,75[m(v-v')v' + mgH],$$

v' représentant la vitesse à la plus grande circonférence de la roue, v celle du filet médium au point où il rencontre cette circonférence, et H la hauteur de l'intersection au-dessus de l'extrémité inférieure du rayon vertical.

Si l'eau tombe d'un déversoir dont le seuil soit très-

voisin de la roue, que les auges se remplissent au plus à moitié, et que v' satisfasse à la condition ci-dessus imposée,

$$Qv' = 0,799[m(v-v')v' + mgH].$$

Comme le terme $m(v-v')v'$ reste toujours le même, quelle que soit la hauteur H, il y a évidemment de l'avantage à établir une roue de côté de manière que le coursier l'embrasse sur presque toute la hauteur de chute.

On rend plus simples et plus aisément applicables les deux formules pratiques en y remplaçant m par sa valeur $\frac{1000^{kg}X}{g}$. Elles deviennent alors, pour le cas d'un pertuis,

$$Qv' = 750^{kg}X\left(\frac{v-v'}{g}v' + H\right),$$

et pour celui d'un déversoir,

$$Qv' = 799^{kg}X\left(\frac{v-v'}{g}v' + H\right).$$

Quand la condition de capacité n'est pas remplie, ou que la vitesse de la roue, trop supérieure à celle de l'eau, cause une force centrifuge capable d'atténuer l'effet de la pesanteur, on doit remplacer les coefficients 750^{kg}, 799^{kg} par 650^{kg}, 699^{kg}, et si le jeu de la roue dans le coursier surpasse $0^m,01$, il faut multiplier X par le rapport de l'aire d'une aube à la section droite du coursier.

184. Lorsque l'eau choque l'aube obliquement, il suffit, pour rendre applicables les valeurs de Qv', d'y

remplacer la vitesse v, qui a été supposée tangentielle à la roue, comme v', par $v\cos\alpha$, α étant l'angle compris entre la tangente à la plus grande circonférence et la tangente à la trajectoire du filet médium (145), au point de rencontre des deux courbes. Il est clair en effet qu'alors la vitesse v de ce filet se décompose en deux autres : l'une, $v\cos\alpha$, perpendiculaire à l'aube frappée ; l'autre, $v\sin\alpha$, dirigée vers l'axe de la roue.

On a donc, pour le cas d'un pertuis,

$$Qv' = 750^{kg}\,X\left(\frac{v\cos\alpha - v'}{g}\,v' + H\right),$$

et pour le cas d'un déversoir,

$$Qv' = 799^{kg}\,X\left(\frac{v\cos\alpha - v'}{g}\,v' + H\right).$$

Mais, la perte de force-vive, au lieu d'être $m(v-v')^2$, comme lorsqu'elle est simplement due au choc, vaut

$$m(v\cos\alpha - v')^2 + mv^2\sin^2\alpha = m(v^2 - 2vv'\cos\alpha + v'^2).$$

185. Nous appliquerons à la roue de côté de la scierie anciennement établie dans l'arsenal de Metz la formule relative au pertuis. D'après un lever de cette machine, $h=1^m,35$, $h'=1^m,138$, $h-h'=0^m,212$, $l=0^m,65$, et comme la contraction a lieu sur les quatre faces de la veine (128), $C=0,604$. Par conséquent,

$$X = Cl(h-h')\sqrt{2g\,\frac{h+h'}{2}} =$$

$$0,604\times0^m,65\times0^m,212\sqrt{9^m,81\,(1^m,35+1^m,138)} = 0^{mc},411.$$

La partie droite du coursier a si peu de longueur, qu'on peut prendre la vitesse à l'origine (143) pour celle que possède l'eau en arrivant sur la roue, et

$$v = \frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{1}{C}-1\right)^2\right]}} = \frac{\sqrt{9^m,81\,(1^m,35+1^m,138)}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{1}{0,604}-1\right)^2\right]}} = 4^m,15.$$

La direction du courant fait un angle de 10° avec la perpendiculaire à l'aube frappée. On a donc

$\text{Log}\,v\cos\alpha = \text{Log}\,4^m,15 + \text{Log}\cos 10° = 0,6180481 + \bar{1},9933515 = 0,6113996$ et $v\cos\alpha = 4^m,087.$

L'observation a donné d'ailleurs

$$v' = 3^m,456,\ H = 0^m,55,$$

et le jeu est $\frac{1}{8}$ de la section droite du coursier, ou bien le rapport de l'aire d'une aube à cette section vaut $\frac{7}{8}$.

Mais avant de choisir la formule à employer pour calculer la quantité d'action, il faut reconnaître si le volume d'eau admis par la roue en 1″ est plus grand ou plus petit que les $\frac{2}{3}$ de la capacité qui le reçoit (181). On a, pour cela,

$$l' = 0^m,6,\ R = 1^m,82,\ r = 1^m,685,$$

et

$$\tfrac{2}{3}\times 2(R-r)\,l'v' = \tfrac{2}{3}\times 2(1^m,82-1^m,685)0^m,6\times 3^m,456 = 0^{mc},37.$$

Comme ce nombre est supérieur à $0^{mc},411\times\frac{7}{8} = 0^{mc},36$, volume d'eau réellement reçu dans les auges,

$$Qv' = \tfrac{7}{8}750^k\times 0,411\left(\frac{4^m,087-3^m,456}{9^m,81}3^m,456+0^m,55\right) = 208^k,23,$$

et l'effort que peut exercer la roue au centre des aubes,

$$Q = \frac{208^k,23}{3^m,456} = 60^k,25.$$

Or, à cause du peu de longueur et du peu de pente

qu'à la partie du coursier qui va de l'orifice à la roue, la chute totale est à fort peu près

$$h+\mathrm{H}=1^{m},35+0^{m},55=1^{m},9.$$

L'énergie du moteur (155) a donc pour expression

$$\mathrm{T}=1000^{kg}\times0,411\times1^{m},9=780^{k},9,$$

et la roue en prend seulement les 0,27.

186. Cherchons, comme application de la formule relative au déversoir, le travail et l'effort dont se trouve capable une roue de côté d'un rayon total de 2^{m}, bien construite, qui fait 9 tours par minute, et reçoit l'eau à $1^{m},2$ de son point le plus bas. Nous supposerons à la lame d'eau une largeur de $4^{m},5$, comme celle du déversoir, une épaisseur de $0^{m},3$, et nous placerons le seuil à $0^{m},2$ au-dessus du point où le filet médium rencontre la circonférence extérieure de la roue.

On a d'abord (127), pour la distance du seuil au niveau dans le réservoir,

$$h=1,25\,h'=1,25\times0^{m},3=0^{m},375,$$

ce qui donne $\mathrm{C}=0,39$, et

$$\mathrm{X}=\mathrm{C}lh\sqrt{2gh}=0,39\times4^{m},5\times0^{m},375\sqrt{2\times9^{m},81\times0^{m},375}=1^{mc},783.$$

La vitesse de la roue

$$v'=\frac{2\times3,1416\times2^{m}\times9}{60}=1^{m},885.$$

La hauteur du niveau au-dessus du point d'entrée du filet médium,

$$\mathrm{H}'=0^{m},375+0^{m},2=0^{m},575.$$

Si donc le barrage est mince (140), la vitesse d'entrée de l'eau,

$$v=\sqrt{2gH'}=\sqrt{2\times 9^{m},81\times 0^{m},575}=3^{m},36.$$

En conséquence,

$$Qv'=799^{kg}X\left(\frac{v-v'}{g}v'+H\right)=$$

$$799^{k}{}_{g}\times 1,783\left(\frac{3^{m},36-1^{m},885}{9^{m},81}1^{m},885+1^{m},2\right)=2108^{k},43,$$

ou

$$Qv'=\frac{2108^{k},43}{75^{k}}=28^{ch},11,\ \text{ et }\ Q=\frac{2108^{k},43}{1^{m},885}=1118^{kg},5.$$

Or, la chute totale

$$H'+H=0^{m},575+1^{m},2=1^{m},775.$$

La quantité d'action dont le courant est capable par seconde vaut donc

$$1000^{kg}\times 1,783\times 1^{m},775=3164^{k},825,$$

et la roue en transmet les 0,666, rapport un peu plus grand que celui qui a été trouvé (176) pour la roue en dessous à aubes courbes.

ROUES EN DESSUS.

187. Les roues en dessus présentent deux couronnes pareilles à celles des roues à aubes cylindriques; mais les petites arêtes circulaires de ces couronnes sont les bases d'un tambour qui, n'ayant aucune ouverture, intercepte tout passage à l'eau et forme les *faces pos-*

térieures AD d'un certain nombre d'*augets* destinés à recevoir le liquide (P. III, F. 10). Les couronnes font les faces latérales de ces augets. Le fond AB, situé dans un plan diamétral de la roue, a une largeur qui vaut la moitié de celle des couronnes. Une cinquième face BC, dite *antérieure*, fait avec la tangente CE de la plus grande circonférence un angle de 30 à 40°, afin qu'en traversant la lame d'eau, elle n'éprouve pas de chocs nuisibles au mouvement de la roue. Les *bords extérieurs* C, F de deux augets consécutifs sont distants de 3 à 4 décimètres, et en général leur écartement doit être tel que la capacité de l'auget soit au moins double du volume d'eau qu'il peut recevoir en traversant la lame, et même triple, si la roue est destinée à marcher vite, pour que la force centrifuge ne cause pas de grandes pertes. Enfin, ces mêmes bords se trouvent ordinairement chacun sur le prolongement du fond précédent, et le coin K est arrondi, lorsque les deux parois qui le forment sont en tôle.

188. Désignons par e l'écartement CF (P. III, F. 10), par l la longueur des augets, par r, r', le plus grand et le plus petit rayon de la roue. Comme le triangle BCF = CGI, la capacité d'un auget vaut

$$l(\mathrm{COF}-\mathrm{DOA})=l\left(\frac{er}{2}-\frac{\mathrm{AD}.r'}{2}\right)=l\left(\frac{er}{2}-\frac{er'^2}{2r}\right)=el\frac{r^2-r'^2}{2r}.$$

Or, e' étant l'épaisseur de la lame d'eau mesurée au milieu de l'arc CH qu'intercepte cette lame sur la circonférence extérieure de la roue, et α l'angle fait par la tangente au même point avec le filet médium, il n'y a pas grande erreur à prendre pour l'arc CH, $\frac{e'}{\cos\alpha}$. Si donc v' représente la vitesse de la roue à la circonférence extérieure, le bord C de l'auget emploiera, pour

traverser la lame, un nombre de secondes $\frac{e'}{v'\cos\alpha}$; pendant ce temps, le pertuis fournira un volume d'eau $\frac{e'X}{v'\cos\alpha}$, X désignant le volume relatif à une seconde, et l'on devra avoir

$$el\frac{r^2-r'^2}{2r}=3\frac{e'X}{v'\cos\alpha}, \quad \text{ou au moins} \quad el\frac{r^2-r'^2}{2r}=2\frac{e'X}{v'\cos\alpha},$$

relations qui permettront de déterminer l'écartement e ou la longueur l, car évidemment $e'=\frac{X}{vl'}$, si v représente la vitesse du filet médium à son entrée dans la roue, et l' la largeur de la lame.

Mais on peut se dispenser de calculer l'épaisseur e' de la lame et de lever l'angle α. En effet, nommons n le nombre de tours que fait la roue par minute, et n' le nombre total des augets. Le nombre de ceux qui devront être remplis en 1″, au tiers ou au plus à moitié, sera $\frac{n}{60}n'$. Mais $\frac{n}{60}=\frac{v'}{2\pi r}$; par conséquent $\frac{n}{60}n'=\frac{n'v'}{2\pi r}$, et

$$\frac{n'v'}{2\pi r}\times\frac{el(r^2-r'^2)}{2r}=3X, \quad \text{ou} \quad \frac{n'v'}{2\pi r}\times\frac{el(r^2-r'^2)}{2r}=2X,$$

ce qui donne

$$el\frac{r^2-r'^2}{2r}=\frac{6\pi rX}{n'v'}, \quad \text{ou} \quad el\frac{r^2-r'^2}{2r}=\frac{4\pi rX}{n'v'}.$$

Si enfin nous remplaçons n' par sa valeur $\frac{2\pi r}{e}$, il vient

$$l\frac{r^2-r'^2}{2r}=\frac{3X}{v'}, \quad \text{ou} \quad l\frac{r^2-r'^2}{2r}=\frac{2X}{v'}.$$

Ces nouvelles relations, indépendantes de e, montrent

que la condition de capacité laisse indéterminé l'écartement des bords extérieurs. On peut donc le fixer arbitrairement, pourvu que l reçoive une valeur convenable.

189. Les roues à augets qui doivent vaincre une forte résistance ont un rayon tellement grand, qu'elles ne peuvent souvent recevoir l'eau en dessus. L'entrée du liquide est ordinairement alors à une distance verticale du point culminant égale au quart du diamètre, et parfois au-dessous de cette entrée commence un coursier circulaire qui, emboîtant la roue jusqu'au point le plus bas, force l'eau à rester plus long-temps dans les augets.

190. La théorie des roues en dessus est absolument la même que celle des roues de côté, car en entrant dans les premières, l'eau choque la face antérieure de l'auget et même le fond, puis elle agit par son poids sur ces mêmes parois, jusqu'à ce que la pesanteur et la force centrifuge la contraignent à les abandonner.

Conséquemment, la roue à augets approche d'autant plus de produire une quantité d'action égale à celle dont le moteur est capable, que sa vitesse et celle de l'eau sont plus petites; mais, dans tous les cas, la première doit être théoriquement moitié de la seconde, pour que l'effet soit porté au maximum.

L'expérience enseigne que la roue à augets a communément besoin, comme la roue de côté, de la vitesse 1^m, pour que le mouvement ait de l'uniformité. Cependant, les grandes roues, de 10^m de diamètre par exemple, peuvent sans inconvénient avoir une vitesse de $0^m,6$ seulement. La force-vive qu'en reçoit leur énorme masse suffit pour maintenir la régularité de la rotation.

Quant à la valeur générale de la quantité d'action produite en $1''$, elle est, selon la théorie, comme pour la roue de côté (182 et 184),

$$Qv' = m[(v\cos\alpha - v')v' + gH],$$

si H représente toujours la hauteur de laquelle descend la masse m depuis son introduction jusqu'à sa sortie.

191. Voici maintenant des formules pratiques que M. Morin a déduites de nombreuses expériences, et pour lesquelles la notation est celle du n.° 183. Quand l'eau remplit au plus à moitié la capacité de chaque auget (187), et que la roue, portant 2^m de diamètre, n'a pas à sa circonférence extérieure une vitesse supérieure à 2^m, la quantité d'action dont cette roue est capable par seconde,

$$Qv' = m(v\cos\alpha - v')v' + 780^{kg} \times H. \qquad \text{(I)}$$

La même formule est encore applicable aux roues plus grandes, lorsque la vitesse de la circonférence extérieure n'excède pas $2^m,5$.

Si les augets sont remplis au plus aux $^2/_3$, les autres circonstances restant les mêmes,

$$Qv' = m(v\cos\alpha - v')v' + 650^{kg} \times H. \qquad \text{(II)}$$

Dans le cas où une roue à augets est embrassée par un coursier circulaire (189), il faut recourir aux formules données pour les roues de côté (184).

192. Reste à établir la formule pratique qui convient aux circonstances différentes des précédentes. Or, lorsque la vitesse de la circonférence extérieure surpasse les limites assignées, ou quand les augets sont remplis au-delà des $^2/_3$ de leur capacité, il faut tenir compte des pertes causées par la force centrifuge, et c'est ce que M. Poncelet a fait le premier. Comme lui, nous diviserons la hauteur H en deux parties: l'une h, distance verticale du point le plus bas de la roue à celui où l'eau commence à sortir des augets; l'autre h', distance verticale de ce dernier point à celui où le filet médium

rencontre la circonférence extérieure, et nous représenterons par q' le volume en mètres cubes de l'eau reçue par chaque auget. Puisque le nombre des augets qui reçoivent l'eau dans chaque seconde (188) est $\frac{nn'}{60}$, le volume total qui entrera dans la roue pendant le même temps sera $\frac{nn'q'}{60}$; son poids vaudra en kilogrammes $\frac{1000\,nn'q'}{60}$, et avant d'atteindre l'origine du versement, il communiquera à cette roue une quantité d'action $\frac{1000\,nn'q'h'}{60}$ par seconde.

Soit maintenant q en mètres cubes le volume d'eau variable qui reste dans un auget pendant la très-petite descente verticale dh. Le poids $1000^{kg}q$ fera un travail $1000\,qdh$, et à l'extrémité de la descente h, le travail produit sera $1000\int qdh$. Mais un nombre d'augets égal à $\frac{nn'}{60}$ arrivent en $1''$ à l'extrémité inférieure de h. Le travail total relatif à cette hauteur est donc $\frac{1000^{kg}nn'}{60}\int qdh$ pour $1''$.

D'ailleurs, le choc de l'eau contre les faces des augets communique par seconde (190) une quantité d'action $m(v\cos\alpha - v')v'$. Conséquemment, la quantité d'action dont une roue à grande vitesse est capable par seconde,

$$Qv' = \frac{1000^{kg}nn'}{60}\left(q'h' + \int qdh\right) + m\,(v\cos\alpha - v')\,v'.$$

Le moyen d'obtenir simplement $\int qdh$, c'est d'employer la méthode de Thomas Simpson. Partageons donc la hauteur h en un nombre pair k de parties égales,

et nommons q_1, q_2, q_3, etc., q_{k-1}, q_k, q_{k+1}, les volumes d'eau que contient un auget au moment où son bord extérieur passe dans l'horizontale de chaque point de division, q_1 répondant à celui de l'origine du versement, et q_{k+1} à l'extrémité inférieure de h ou au point le plus bas. de la roue. Nous aurons

$$\int q\mathrm{d}h = \frac{h}{3k}\left[q_1 + 4(q_2 + q_4 \ldots + q_k) + 2(q_3 + q_5 \ldots + q_{k-1}) + q_{k+1}\right].$$

Or, $q_1 = q'$, puisqu'à l'extrémité supérieure de h, l'auget commence seulement à se vider, et q_{k+1} est toujours nul, attendu qu'il ne reste plus d'eau dans l'auget dont le bord extérieur se trouve verticalement au-dessous de l'axe de la roue. L'équation se réduit donc à

$$\int q\mathrm{d}h = \frac{h}{3k}\left[q' + 4(q_2 + q_4 \ldots + q_k) + 2(q_3 + q_5 \ldots + q_{k-1})\right].$$

Il suffit, dans la plupart des cas, de faire $k = 4$, et alors

$$\int q\mathrm{d}h = \frac{h}{12}\left[q' + 4(q_2 + q_4) + 2q_3\right].$$

Mais s'il arrive que cette division de h rende q_4 nul, la valeur de $\int q dh$ n'est plus suffisamment approchée, et il faut faire $k = 6$, afin que q_4 ne réponde pas au point où l'auget achève de se vider. Comme alors q_6 et même q_5 sont presque toujours nuls, la formule générale donne

$$\int q\mathrm{d}h = \frac{h}{18}\left[q' + 4(q_2 + q_4) + 2q_3\right],$$

et

$$Qv' = \frac{1000^{\text{kg}} nn'}{60}\left\{q'h' + \frac{h}{18}\left[q' + 4(q_2 + q_4) + 2q_3\right]\right\} + m(v\cos\alpha - v')v'. \text{ (III)}$$

193. L'application de la troisième valeur de Qv'

n'exige aucun coefficient de correction, mais elle nécessite la détermination préalable de q', h, q_2, q_3, q_4. Celle de q' est facile, quand la roue est disposée comme elle doit toujours l'être, c'est-à-dire de manière que toute l'eau sortie du pertuis soit reçue dans les augets. Alors, en effet, le volume de liquide contenu dans un seul auget, avant le versement, vaut la dépense X divisée par le nombre des augets qui se remplissent en 1″, et

$$q' = X : \frac{nn'}{60} = \frac{60X}{nn'}.$$

Pour déterminer h, il faut dessiner la roue d'aprés une échelle, et marquer sur la plus grande circonférence le point où se trouve, au commencement du versement, le bord extérieur de l'auget qui se vide; en d'autres termes, il faut connaître la position qu'a un auget à l'instant où la surface de l'eau qu'il renferme atteint le bord extérieur. Or, cette surface n'est pas à beaucoup prés horizontale dans les roues qui tournent avec rapidité : elle affecte une forme cylindrique dont l'axe est plus ou moins élevé au-dessus de celui de la roue, mais toujours parallèle à ce dernier et situé dans le même plan vertical.

En effet, l'effort exercé par la pesanteur sur une particule d'eau dm' est gdm'; l'effort exercé par la force centrifuge F sur le même élément est Fdm', et, comme on sait, $F = \frac{u^2}{\rho}$, si ρ exprime la distance de la particule à l'axe de la roue, et u la vitesse de cette particule. Mais en désignant par ω la vitesse angulaire, on a

$$u = \rho\omega, \quad F = \rho\omega^2, \quad \text{et} \quad Fdm' = \rho\omega^2 dm'.$$

Conséquemment, la masse élémentaire dm' est sollicitée

par une force verticale gdm', et par une force $\rho\omega^2 dm'$ dirigée, selon un rayon de la roue, du centre C à la circonférence (P. III, F. 11). Elle se trouve donc pressée dans l'auget par la résultante AB de ces deux forces. Soit D le point où cette résultante rencontre une verticale menée dans le plan ABE par un point C de l'axe de rotation. La similitude des triangles ACD, ABE, donnera CD : BE :: CA : AE, ou $CD = \frac{\rho g dm'}{\rho\omega^2 dm'} = \frac{g}{\omega^2}$, valeur constante qui montre que les forces par lesquelles sont pressées les particules d'eau situées dans le plan vertical CAD, concourent toutes en D. On a d'ailleurs pour chacune de ces forces, AB : AD :: BE : CD;

d'où
$$AD = \frac{AB \times \frac{g}{\omega^2}}{g dm'} = \frac{AB}{\omega^2 dm'}.$$

Ainsi, la distance AD ne peut varier qu'avec la résultante AB, et comme les particules d'un liquide ne restent en équilibre que dans le cas où celles de la surface sont pressées par des forces égales, il s'ensuit que, pour ces dernières, AB est constante, que la distance AD l'est aussi, et que la surface de l'eau d'un auget prend la forme cylindrique.

Voici maintenant comment on trouve le point où commence le versement. Calculez la vitesse angulaire au moyen de la relation $\omega = \frac{v'}{R}$, v' et R se rapportant à la circonférence extérieure; calculez ensuite l'élévation CD de l'axe de la surface liquide au-dessus de l'axe de la roue; décrivez du point D des arcs de cercle *ab* qui passent par les bords extérieurs des augets (F. 12); mesurez les superficies *abcd;* multipliez chacune par la

longueur l des augets, et si vous trouvez que, par exemple, $abcd \times l = q' = \frac{60\,X}{nn'}$, volume d'eau reçu, vous en conclurez que le point a est l'origine du versement. Si le produit $abcd \times l$ surpasse q', et que le suivant en soit surpassé, le versement aura commencé entre les deux augets consécutifs. Traçant donc plusieurs profils d'augets dans l'intervalle, décrivant pour ceux-là les arcs ab, et faisant sur chacun les calculs qui viennent d'être indiqués, on arrivera aisément à trouver la position qui donne $abcd \times l = q'$.

Il reste, pour déterminer q_2, q_3, etc., à mener par l'origine a du versement, et par le point le plus bas de la roue, deux horizontales; à diviser leur distance ef en six parties égales; à mener par les points de division d'autres horizontales, jusqu'à la circonférence extérieure de la roue; à tracer les profils des augets aux bords extérieurs desquels appartiennent les points d'intersection; à décrire de D des arcs circulaires qui passent par ces mêmes points; à mesurer la superficie comprise entre chaque arc et les côtés du profil correspondant, et à multiplier cette superficie par la longueur l des augets. Si l'on trouve qu'au 5.e point de ef, par exemple, l'arc passe au-dessous du profil, on en conclura que $q_5 = 0$, et qu'arrivé au point k, chaque auget est entièrement vide.

194. Il est des roues sur lesquelles on fait affluer une telle quantité d'eau, que leurs augets ne peuvent en recevoir qu'une partie. Alors, au lieu de s'emplir à moitié ou aux deux tiers, ils s'emplissent entièrement, et le versement commence aussitôt. Donc, dans ce cas, $h' = 0$, h vaut à peu près le diamètre; le volume d'eau reçu par la roue en $1''$, au lieu d'être X, est seulement $q' \times \frac{nn'}{60}$,

sa masse égale $\frac{1000^{kg} nn' q'}{60 g}$, et q' représente la capacité totale de l'auget dans la position où il reçoit l'eau. Conséquemment, la formule du travail devient

$$Qv' = \frac{1000^{kg} nn'}{60} \left\{ \frac{h}{18} \left[q' + 4(q_2 + q_4) + 2q_3 \right] + \frac{q'}{g} (v\cos\alpha - v')v' \right\}. \text{(IV)}$$

195. Notre sujet d'application sera une roue de marteau à soulèvement, dont le lever a été fait par l'un de nous aux forges de Hayange, en 1832. Elle reçoit l'eau par un pertuis, fait 24 tours $^1/_4$ par minute, et renferme 20 augets dont les bords sont sur une circonférence qui a $1^m,37$ de rayon. La longueur de ces augets est $1^m,3$.

Ainsi, $n = 24,25$, $n' = 20$, $R = 1^m,37$, et la vitesse à la circonférence extérieure,

$$v' = 2\pi R \frac{n}{60} = 2 \times 3,1416 \times 1^m,37 \times \frac{24,25}{60} = 3^m,48.$$

Comme elle sort des limites du n.° 191, nous ne pouvons employer l'une des deux premières formules pour calculer la quantité d'action Qv'; il reste donc à choisir entre les deux dernières, puisqu'il n'y a pas de coursier circulaire (189).

Le pertuis (128) est tel que

$$h = 0^m,956, \quad h' = 0^m,856, \quad l = 1^m,27,$$

ce qui donne $C = 0,615$, parce qu'il y a contraction sur les quatre faces du prisme d'eau, et

$$X = 0,615 \times 1^m,27 \times 0^m,1\sqrt{2 \times 9^m,81 \times 0^m,906} = 0^{mc},329.$$

La quantité d'eau reçue par chacun des augets qui traversent la lame en $1''$ est donc

$$0^m,329 : \frac{nn'}{60} = \frac{0^{mc},329 \times 60}{24,25 \times 20} = 0^{mc},041 = q'.$$

Faisons à l'échelle le tracé des couronnes et du coursier, pour déterminer l'entrée du filet médium. Si u

désigne la vitesse au centre A de l'extrémité de ce coursier (P. III, F. 12), β l'angle compris entre l'horizontale AB et la tangente AE de la trajectoire, x les abscisses comptées de A en B, et y les ordonnées, l'équation de la courbe (145) est $y = x \tan\beta + \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\beta}$. Le premier terme forme l'équation de AE, droite facile à tracer, puisque évidemment elle est parallèle au fond du coursier. On peut donc se borner à calculer le second terme qui donne les parties EF d'ordonnées comprises entre AE et la trajectoire. Le rapporteur ou le mesurage d'un sinus montre d'abord que $\beta = 20°$. Quant à la vitesse u, nous la regarderons comme égale à celle qui a lieu au centre du pertuis (141); car le coursier a si peu de longueur, que le frottement des parois empêche à bien peu près la gravité d'accélérer le mouvement. Ainsi

$$u = \sqrt{2g\frac{h+h'}{2}} = \sqrt{2 \times 9^m,81 \times 0^m,906} = 4^m,216,$$

et de là résulte qu'en donnant à x successivement les valeurs

$0^m,2,\ 0^m,4,\ 0^m,5,\ 0^m,7,\ 1^m,\ 1^m,5,$

on obtient

$EF = 0^m,0125,\ 0^m,05,\ 0^m,078,\ 0^m,153,\ 0^m,3125,\ 0^m,703$:

par exemple,

$$\begin{aligned}
\text{Log. } 2 &= 0,3010300 \\
\text{Log. } u^2 = 2\,\text{Log. } 4^m,216 &= 1,2498012 \\
\text{Log. } \cos^2\beta = 2\,\text{Log. } \cos 20° &= \bar{1},9459716 \\
\text{Log. } 2u^2\cos^2\beta &= 1,4968028 \\
\text{Compl. Log. } 2u^2\cos^2\beta &= 8,5031972 \\
\text{Log. } g = \text{Log. } 9^m,81 &= 0,9916690 \\
\text{Log. } x^2 = 2\,\text{Log. } 1^m,5 &= 0,3521826 \\
\text{Log. EF} &= \bar{1},8470488
\end{aligned}$$

$=$ Log. $0^m,703$ à fort peu près.

Ayant tracé la trajectoire AF, marquons son intersection I avec la circonférence extérieure; portons de chaque côté de ce point la moitié de l'arc qu'un auget intercepte sur la même circonférence: cela déterminera les bords L, M de l'auget qui se remplit, et que nous désignerons par l'épithète *premier*. Mais, pour en former le profil, il faut avoir le centre D des arcs circulaires qui limitent l'eau.

La vitesse angulaire

$$\omega = \frac{v'}{R} = \frac{3^m{,}48}{1^m{,}37} = 2{,}54, \quad \text{et} \quad CD = \frac{9^m{,}81}{(2{,}54)^2} = 1^m{,}52.$$

Décrivant l'arc MN, quarrant la surface MNOPHGM, puis multipliant par la longueur $1^m{,}3$, on obtient $0^{mc}{,}141$ pour le volume d'eau qui peut être contenu dans le premier auget et dans chacun de ceux qui, après celui-là, traverseront la lame. Comme ce volume surpasse $0^{mc}{,}041$, c'est la formule (III) du n.° 192 que nous devons employer; dans le cas contraire, celle du n.° 194 devrait servir.

Passant maintenant à la détermination du point *a* où commence le versement, nous décrirons du centre D les arcs qui indiquent la surface de l'eau dans le 2.e auget, dans le 3.e, dans le 4.e, etc., arcs qui passent tous par les bords, comme le premier par M; puis, calculant en mètres carrés les superficies des profils, et multipliant par $1^m{,}3$, nous trouverons que le volume d'eau qui peut être contenu dans l'auget

	2.e,	3.e,	4.e,	5.e,
est de	$0^{mc}{,}116$,	$0^{mc}{,}091$,	$0^{mc}{,}071$,	$0^{mc}{,}0395$.

Comme chacun a reçu $0^{mc}{,}041$, le versement commence entre les positions du 4.e et du 5.e Formant donc dans l'intervalle plusieurs profils d'augets, avec leurs arcs

décrits de D, nous voyons que le bord a de celui qui ne peut plus contenir au-delà des $0^{mc},041$, se trouve à $0^{m},03$ au-dessus du bord du 5.e; que

$$h' = aq = 1^{m},3, \quad \text{et que} \quad h = ef = 1^{m},44.$$

Ainsi, le travail fait par le poids de l'eau, de l'entrée I à l'origine a du versement, ou dans la descente qa, c'est-à-dire la première partie de Qv',

$$\frac{1000^{kg}nn'}{60}q'h' = \frac{1000^{kg} \times 24,25 \times 20}{60} \times 0,041 \times 1^{m},3 =$$
$$8083^{kg},33 \times 0,041 \times 1^{m},3 = 430^{k},84.$$

Pour calculer la deuxième partie, partageons ef en six longueurs égales, menons par les points de division des horizontales qui rencontrent la circonférence extérieure, traçons les profils des augets dont les bords répondent aux intersections, décrivons de D les arcs limites de l'eau, et cubons comme précédemment. Les volumes de liquide que conserve chaque auget en passant successivement aux points 1, 2, 3, 4, 5, se trouvent de

$$0^{mc},041 = q' = q_1, \quad 0^{mc},027 = q_2, \quad 0^{mc},017 = q_3,$$
$$0^{mc},01 = q_4, \quad 0^{mc} = q_5.$$

Le travail fait par le poids de l'eau depuis l'origine a du versement jusqu'au point R le plus bas de la roue, ou dans la descente ef, vaut donc

$$8083^{kg},33\frac{1^{m},44}{18}\left[0,041+4(0,027+0,01)+2\times 0,017\right]=144^{k},153;$$

de sorte que l'eau motrice produit par son poids une quantité d'action totale

$$430^{k},84 + 144^{k},153 = 574^{k},993.$$

Reste à trouver l'effet du choc. Or

$$m = \frac{1000^{kg}X}{g} = \frac{1000^{kg} \times 0,329}{9^m,81}.$$

La vitesse v du filet médium au point I (145) est $\sqrt{u^2+2gh_2}$; et comme h_2, distance verticale de I au centre A de la section extrême du coursier, a $0^m,2$,

$$v = \sqrt{(4^m,216)^2 + 2 \times 9^m,81 \times 0^m,2} = 4^m,658.$$

Le rapporteur donne 13° pour l'angle SIT ou α que forme la tangente IS de la circonférence extérieure sur la tangente IT de la trajectoire, et $\cos 13° = 0,9744$.

Conséquemment,

$$m(v\cos\alpha - v')v' = \frac{1000^{kg} \times 0,329}{9^m,81}(4^m,658 \times 0,9744 - 3^m,48)3^m,48 = 123^k,75;$$

la roue est capable par seconde d'une quantité d'action

$$Qv' = 574^k,993 + 123^k,75 = 698^k,743,$$

et elle ne remplace que 9 chevaux $^1/_3$.

La chute totale comprend $0^m,956$, hauteur du niveau dans le réservoir au-dessus du seuil du pertuis; l'élévation $0^m,22$ de ce seuil au-dessus du point L, le plus haut de la roue; le diamètre LR ou $2^m,74$, et le jeu $0^m,03$ qui existe dans le canal de fuite au-dessous de R. On a donc $H = 3^m,946$, et pour l'énergie du moteur,

$$1000^{kg}XH = 1000^{kg} \times 0,329 \times 3^m,946 = 1298^k,234,$$

celle de 17 chevaux $^1/_3$.

Ainsi, le travail utile Qv' forme seulement les 0,538 de celui que pourrait faire la puissance motrice. Une

partie de la perte qui a lieu provient de la grande vitesse dont la roue est animée.

En effet, les augets ne se remplissent pas à moitié, puisque chacun peut contenir $0^{mc},141$ et ne reçoit que $0^{mc},041$. Si donc la vitesse v' était par exemple 2^{m}, au lieu d'être $3^{m},48$, le travail de la roue serait donné par la formule (I), dans laquelle $H = LR = 2^{m},74$, et il vaudrait

$$\frac{1000^{kg} \times 0,329}{9^{m},81}(4^{m},658 \times 0,9744 - 2^{m})2^{m} + 780^{kg} \times 0,329 \times 2^{m},74 = 873^{kg},51,$$

ou les 0,67 de celui du moteur.

TURBINES.

196. Le nom de *turbine* est donné à toute roue horizontale dont les aubes planes ou courbes sont poussées par un courant qui a son entrée au pourtour extérieur et sa sortie à l'intérieur, ou bien qui entre par le pourtour intérieur et sort par l'extérieur.

Le courant est horizontal, ou bien il a une inclinaison si faible qu'elle peut être négligée. Les aubes doivent donc être placées verticalement, quand elles sont planes; mais il faut que l'eau les choque obliquement, pour pouvoir ensuite glisser dessus et fuir vers l'axe de la roue, entre les deux couronnes égales qui les supportent. Arrivé dans le cylindre vide que forment ces couronnes, le liquide tombe et ruisselle sur la plate-forme où pivote l'arbre vertical. Cette plate-forme doit en conséquence avoir l'inclinaison du canal de fuite, et laisser entre elle et la roue assez d'espace pour que l'eau ne nuise pas au mouvement, après avoir produit son effet.

197. L'aube AB (P. III, F. 13) sera censée avoir une superficie qui permette au liquide de perdre toute sa vitesse normale avant de la quitter. Afin d'embrasser tous les cas, nous la placerons de manière qu'elle fasse un angle BAC avec le plan méridien AC de la roue. Nous nommerons α l'angle ADE sous lequel le filet médium ED vient frapper en D vers le milieu de l'aube, β l'angle BDF compris entre cette aube et la tangente à la circonférence décrite par D, R le rayon CD de la même circonférence, r le rayon CB des couronnes, ω la vitesse angulaire de la roue, v' sa vitesse tangentielle au point D, et v la vitesse du courant au même point.

La quantité d'action que possède la roue par suite de son effort Q tangentiel en D, est Qv'; celle de la masse liquide qui afflue en 1″ vaut $\frac{mv^2}{2}$; cette masse a une vitesse $v\sin\alpha$ selon la normale GD de l'aube; la roue a une vitesse $v'\sin\beta$ selon la même droite; le choc cause donc au liquide une perte de vitesse $v\sin\alpha - v'\sin\beta$ et une perte de quantité d'action $\frac{m(v\sin\alpha - v'\sin\beta)^2}{2}$. Si enfin U désigne la vitesse avec laquelle la masse m arrivée en B passe dans le cylindre des couronnes, $\frac{mU^2}{2}$ est la quantité d'action conservée par le liquide, et

$$Qv' = \frac{mv^2}{2} - \frac{m(v\sin\alpha - v'\sin\beta)^2}{2} - \frac{mU^2}{2}.$$

La vitesse de sortie U dépend de la vitesse u que possède m selon AB en arrivant au point B, et de la vitesse $r\omega$ propre à ce point. Soit γ l'angle compris entre le prolongement de AB et la direction de $r\omega$ perpendiculaire au rayon CB. La vitesse $r\omega\cos\gamma$, dirigée

de B vers A, réduit u à $u - r\omega\cos\gamma$, et cette dernière se compose avec la vitesse normale à l'aube, $r\omega\sin\gamma$, pour former U. Par conséquent,

$$U^2 = (u - r\omega\cos\gamma)^2 + r^2\omega^2\sin^2\gamma = u^2 - 2ur\omega\cos\gamma + r^2\omega^2,$$

et

$$Qv' = \frac{mv^2}{2} - \frac{m(v\sin\alpha - v'\sin\beta)^2}{2} - \frac{m(u^2 - 2ur\omega\cos\gamma + r^2\omega^2)}{2}$$
$$= \frac{m}{2}\left[v^2 - (v\sin\alpha - v'\sin\beta)^2 - (u^2 - 2ur\omega\cos\gamma + r^2\omega^2)\right].$$

Pour déterminer u, nous observerons que cette vitesse donne à la masse m arrivant en B une quantité d'action $\frac{mu^2}{2}$. Mais en D, la même masse possédait une vitesse propre $v\cos\alpha$ dirigée de D vers B; l'aube AB est animée elle-même d'une vitesse $v'\cos\beta$ dirigée de B vers D; m tendait donc à parcourir DB avec une vitesse relative $v\cos\alpha + v'\cos\beta$; cette masse possédait à l'origine de son mouvement une quantité d'action

$$\frac{m(v\cos\alpha + v'\cos\beta)^2}{2},$$

et elle en a perdu de D en B une partie qui vaut

$$\frac{m(v\cos\alpha + v'\cos\beta)^2}{2} - \frac{mu^2}{2}.$$

Or, c'est de la force centrifuge que provient cette perte. A une distance ρ de C, elle est $\frac{\rho^2\omega^2}{\rho}$ ou $\rho\omega^2$, et imprime à la masse m une quantité de mouvement $m\rho\omega^2$ dirigée de C vers le pourtour de la roue. Il s'ensuit une quantité d'action élémentaire $m\rho\omega^2 d\rho$; de sorte que, si la masse m était libre, la rotation lui donnerait de B en

D ou de D en B, mais toujours dans le sens centrifuge, une quantité d'action

$$\int_r^R m\rho\omega^2 d\rho = m\omega^2 \int_r^R \rho d\rho = m\omega^2 \frac{R^2 - r^2}{2}.$$

Par conséquent,

$$\frac{m(v\cos\alpha + v'\cos\beta)^2}{2} - \frac{mu^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2}\left(R^2 - r^2\right),$$

et $$u = \sqrt{[(v\cos\alpha + v'\cos\beta)^2 - \omega^2 (R^2 - r^2)]}.$$

De là ce principe utile : *Tout corps en mouvement le long d'une face plane ou courbe qui tourne circulairement et qu'il presse, perd ou gagne une quantité d'action égale à la différence de celles qu'il devrait aux vitesses circulaires des deux extrémités de son chemin.*

198. On voit, à l'inspection de la valeur générale de Qv', que le travail de la roue égale celui de l'eau motrice, quand les deux derniers termes sont nuls à la fois. Les conditions du maximum sont donc

$$v\sin\alpha = v'\sin\beta, \quad \cos\gamma = 1, \quad u = r\omega,$$

ou $$v' = v\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad \gamma = 0, \quad u = r\omega.$$

Or, il est impossible de satisfaire à la deuxième; car le liquide, au lieu d'entrer dans le cylindre des couronnes après avoir frappé une aube, irait à la rencontre de l'aube suivante, si ces aubes étaient tangentes aux surfaces cylindriques qui les portent. Il est également impossible de remplir la troisième condition, puisque, introduite avec la première dans la valeur de u, elle conduit à $\beta = 0$ et à $v' = \infty$. Tout ce qu'on peut faire,

c'est de prendre γ aussi petit que le permet l'obligation de ne point donner à la sortie du liquide une direction qui le ramène entre les aubes suivantes, d'en déduire β au moyen d'un tracé, de calculer α à l'aide de la valeur imposée à v' par la machine-ouvrière, et d'établir ensuite convenablement l'axe de la roue, en employant une autre opération graphique facile à imaginer.

L'angle α doit toujours être moindre que 90°; mais l'angle β pourrait être droit. Seulement alors γ aurait la même grandeur, et le travail de la roue s'éloignerait davantage de celui du moteur. La différence serait évidemment plus grande encore, si β devenait obtus.

Aucune expérience n'a été faite sur les turbines à aubes planes, de sorte qu'on ignore quel devrait être, pour la pratique, le coefficient du maximum théorique

$$Qv' = \frac{m}{2}\left(v^2 - u^2 + 2ur\omega\cos\gamma - r^2\omega^2\right).$$

Du reste, ce maximum est rendu lui-même si faible par la décomposition de l'effort mv sur l'aube en prise, que l'emploi de la roue est nécessairement fort rare, supposé qu'il ait lieu quelque part.

199. Pour faire voir qu'en effet la plus grande valeur de Qv' selon la théorie est une fraction assez petite du travail $\frac{mv^2}{2}$ qui pourrait être produit par le moteur, nous admettrons que la dépense d'eau par seconde,

$$X = 0^{mc},25,\quad v = 6^m,\quad \alpha = 45°,\quad \beta = 50°,$$
$$R = 4^m,\quad r = 5^m,\quad \gamma = 20°.$$

Il s'ensuivra

$$\text{Log.}\,v' = \text{Log.}\,6^m + \text{Log.}\sin 45° - \text{Log.}\sin 50° = 0,7433823,$$

$$v' = 5^m{,}54, \quad \omega = \frac{v'}{R} = \frac{5^m{,}54}{4^m} = 1{,}385, \quad r\omega = 4^m{,}155,$$

$$r^2\omega^2 = 17^{mm}{,}264, \qquad R^2\omega^2 = v'^2 = 30^{mm}{,}69,$$

$$\cos\alpha = 0{,}71, \qquad \cos\beta = 0{,}64, \qquad \cos\gamma = 0{,}94,$$

$$(v\cos\alpha + v'\cos\beta)^2 = (6 \times 0{,}71 + 5^m{,}54 \times 0{,}64)^2 = (7^m{,}81)^2 = 60^{mm}{,}996,$$

$$u = \sqrt{(60^{mm}{,}996 - 30^{mm}{,}69 + 17^{mm}{,}264)} = \sqrt{47^{mm}{,}57} = 6^m{,}89,$$

$$m = \frac{1000^{kg} \times 0{,}25}{9^m{,}81} = 25{,}48.$$

Par conséquent, le travail maximum de la turbine par seconde,

$$Qv' = \frac{25{,}48}{2}\left\{\begin{matrix}(36^{mm} - 47^{mm}{,}57 + 2 \times 6^m{,}89 \times 4^m{,}155 \times \\ 0{,}94 - 17^{mm}{,}264)\end{matrix}\right\} = 318^k{,}32;$$

le travail dont le moteur est capable dans le même temps,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{25{,}48 \times 36^{mm}}{2} = 458^k{,}64,$$

et le premier forme seulement les 0,694 du second; ce qui rend assez probable que, dans la pratique, l'eau ne communiquerait pas à la roue moitié de son énergie.

200. Les turbines à aubes courbes méritent seules d'être employées. La meilleure de celles dans lesquelles l'eau entre par le pourtour extérieur a été proposée par M. Poncelet. Son tracé a une grande analogie avec celui de la roue verticale à aubes courbes du même géomètre (170). Le liquide, animé d'une vitesse v, arrive tangentiellement à la circonférence extérieure, et presque tangentiellement à la surface cylindrique de l'aube AB (P. III, F. 14), de sorte qu'il n'y a point de choc, pour ainsi dire, ni perte importante de quantité d'action à l'entrée. Ensuite l'eau pousse l'aube en parcourant la

concavité de A vers B, et parvenue à ce dernier point, elle passe avec une vitesse à peu près nulle dans le manchon vide que forment les plateaux.

La courbe AB du profil des aubes est un arc de cercle; il fait un angle de 30° au plus avec la circonférence extérieure de la roue, au point commun A, et un angle d'environ 40° en B, avec la circonférence intérieure. Enfin, la paroi extérieure HI du coursier se courbe en surface cylindrique IK pour embrasser une certaine portion de la roue, à partir de l'entrée A, et empêcher ainsi le liquide qui afflue par le jeu, de s'échapper sans passer sur les aubes.

201. Puisque le choc peut être négligé, la relation des quantités d'action est, d'après la notation employée pour les turbines à aubes planes (197),

$$Qv' = \frac{mv^2}{2} - \frac{mU^2}{2}.$$

Mais le point A se trouve animé d'une vitesse propre $R\omega$, R désignant le plus grand rayon de la roue, et l'eau arrivée sur l'aube tend à continuer son mouvement avec une vitesse relative $v - R\omega$. Elle est donc capable alors d'une quautité d'action $\frac{m(v-R\omega)^2}{2}$; de sorte que, dans son trajet de A en B, elle éprouve une perte $\frac{m(v-R\omega)^2}{2} - \frac{mu^2}{2}$, due à la force centrifuge. Par conséquent (197),

$$\frac{m(v-R\omega)^2}{2} - \frac{mu^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2}(R^2 - r^2),$$

et la vitesse qui reste en B tangentiellement à l'aube,

$$u = \sqrt{(v^2 - 2vR\omega + r^2\omega^2)}.$$

Réduite à $u - r\omega\cos\gamma$ par la vitesse circulaire de B, puis composée avec la partie normale $r\omega\sin\gamma$ de la même vitesse, elle donne

$$U^2 = (u - r\omega\cos\gamma)^2 + r^2\omega^2\sin^2\gamma = u^2 - 2ur\omega\cos\gamma + r^2\omega^2,$$

et $$Qv' = \frac{m}{2}(v^2 - u^2 + 2ur\omega\cos\gamma - r^2\omega^2).$$

Ainsi, la valeur générale de la quantité d'action reçue par une turbine à aubes courbes est la même fonction que la plus grande valeur de celle que reçoit une turbine à aubes planes; circonstance qui annonce déjà un avantage de la première sur la seconde, et provient évidemment de la nullité du choc à l'entrée. D'ailleurs, les conditions du maximum sont ici pareilles aux deux dernières de l'autre cas : il faut $\gamma = 0$ et $u = r\omega$. A la vérité, elles ne peuvent pas non plus être remplies rigoureusement; car si l'aube était tangente en B à la surface cylindrique intérieure de la roue, et qu'en même temps le reste de la vitesse du liquide fût détruite par celle du point B, il y aurait engorgement : l'eau arrêtée ne passerait point dans le manchon vide, et nuirait au mouvement de l'aube suivante. Mais la condition $u = r\omega$ peut être maintenue, moyennant qu'on fasse γ assez grand pour que U donne une sortie suffisamment rapide à la masse m. Alors, la valeur générale de u conduit à la relation $r^2\omega^2 = v^2 - 2vR\omega + r^2\omega^2$, d'où l'on tire $R\omega = \frac{v}{2}$. Ainsi, le maximum de travail exige ici, comme pour les roues verticales à aubes courbes, que la vitesse à la circonférence extérieure soit moitié de celle du courant, et la valeur de ce maximum

$$Qv' = \frac{m}{2}\left[v^2 - 2r^2\omega^2(1 - \cos\gamma)\right].$$

Elle montre qu'avec le même angle γ, on utilisera une partie d'autant plus grande de la quantité d'action $\frac{mv^2}{2}$ du moteur, que la circonférence intérieure aura été faite plus petite. Mais le décroissement du rayon r a une limite : il faut que le produit de U et de l'aire que deux aubes consécutives laissent entre elles sur la surface du manchon vide, donne un volume au moins égal à celui de la masse m; autrement la roue s'engorgerait.

202. Nous prendrons les données du n.° 199 pour apprécier la turbine de M. Poncelet et la comparer aux turbines à aubes planes. Ainsi

$$m = 25{,}48, \quad v = 6^m, \quad r = 3^m, \quad R = 4^m,$$

mais $\gamma = 40°$. Il en résulte

$$\omega = \frac{v}{2R} = \frac{6^m}{2 \times 4^m} = 0{,}75, \qquad \cos\gamma = 0{,}766,$$

et pour le travail maximum,

$$Qv' = \frac{25{,}48}{2}\left[36^{mm} - 2 \times 9^{mm} \times 0{,}5625(1 - 0{,}766)\right] = 428^k{,}37.$$

Il formerait donc les 0,934 des $458^k{,}64$ que vaut l'énergie $\frac{mv^2}{2}$ du moteur. Mais à raison des pertes d'eau, du défaut de tangence des aubes, qui cause un choc réel à l'entrée et laisse une vitesse au liquide à la sortie, l'auteur estime que sa turbine rendrait seulement les 0,65 de l'effet du moteur, quand m et v seraient un peu grandes, et les 0,75 dans le cas d'une faible dépense d'eau et d'un courant peu rapide. Néanmoins, elle l'emporterait toujours de beaucoup sur la turbine à aubes planes du n.° 199, et bien plus encore sur les turbines à aubes courbes de certaines usines,

dans lesquelles il se produit un tel choc à l'entrée et un si fort engorgement à la sortie, que leur effet ne peut guère supasser les 0,066 de celui du moteur.

203. La turbine-Burdin a pour hauteur la moitié de la chute totale; elle est placée sous le réservoir, afin que l'eau y entre par l'intérieur. De petits canaux convenablement dirigés versent le liquide horizontalement dans le sens du mouvement de la roue, et d'autres lui permettent de sortir horizontalement aussi, mais en sens inverse, après sa descente le long d'aubes courbes renfermées entre deux tambours cylindriques. Cette turbine fait théoriquement un travail égal à celui dont le moteur est capable, quand les résistances lui permettent de se mouvoir avec la vitesse d'entrée; car alors il n'y a point de choc évidemment, et en second lieu, la vitesse de sortie est nulle, puisque, dans sa descente, commencée sans vitesse initiale, l'eau n'a pu acquérir horizontalement qu'une vitesse égale à celle de la roue. Mais, au dire de M. Burdin lui-même, sa turbine, réglée pour le maximum d'effet, ne rend en réalité que les 0,75 de celui du moteur. C'est donc seulement dans les grandes chutes qu'elle l'emporte de toute manière sur celle de M. Poncelet; dans les petites, sa supériorité se réduit à pouvoir tourner plus rapidement.

Soit, en effet, H la chute totale et à peu près celle qui engendrerait la vitesse v du courant au point le plus bas de la roue. La turbine-Poncelet exige que

$$R\omega = \frac{v}{2} = \frac{\sqrt{2gH}}{2},$$

ce qui donne

$$\omega = \frac{\sqrt{2gH}}{2R},$$

et dans la turbine-Burdin

$$R\omega=\sqrt{2g\frac{H}{2}} \quad \text{ou} \quad \omega=\frac{\sqrt{2gH}}{R\sqrt{2}}.$$

204. La plus avantageuse des turbines dans lesquelles l'eau entre par l'intérieur est sans contredit celle qu'a inventée M. Fourneyron. Recevant aussi le liquide sans choc et le rendant presque sans vitesse, elle approche pour le moins autant qu'aucune autre roue hydraulique, du travail dont le moteur est capable. En outre, elle convient aux grandes chutes comme aux petites; on peut lui donner des vitesses extrêmement différentes de celle qui répond au maximum d'effet, sans altérer notablement ce maximum; il n'éprouve pas non plus une réduction importante, lorsqu'elle est submergée, et même à 2^m au-dessous du niveau dans le canal de fuite; elle permet toujours d'utiliser entièrement la chute donnée par la différence des deux niveaux, car on peut la placer au-dessous de celui des plus basses eaux du canal inférieur; la variation de la dépense n'en cause presque aucune dans le rapport du travail de cette turbine à celui du moteur; enfin elle occupe peu de place, se loge aisément partout, et dispense des rouages qu'exigent les autres roues pour donner à l'opérateur une grande vitesse.

Le caractère distinctif de la nouvelle turbine, c'est que l'eau, conduite par les diaphragmes courbes d'un fond dormant A (P. III, F. 15), agit à la fois et de la même manière sur toutes les aubes courbes de la couronne mobile B. Le liquide du réservoir entre par une vanne C dans la huche D, que limitent par le bas le plancher E, le cylindre en tulipe F, le cylindre-vanne G et le fond dormant A. L'arrondissement du

bord supérieur du cylindre F empêchant presque entièrement la contraction de la veine, permet à l'eau de remplir toujours l'intervalle des diaphragmes. Un anneau de cuir mobile ferme l'intervalle fort étroit des cylindres F, G. Ce dernier s'élève et s'abaisse au moyen de deux tringles H; dans sa position la plus basse, il repose sur le fond dormant et empêche l'eau de s'introduire entre les aubes courbes; la roue est alors immobile.

Le fond dormant A est supporté par un manchon cylindrique I qui s'appuie sur le couvercle K de la huche, entoure l'arbre L de la roue et le défend du contact de l'eau.

Les diaphragmes ont plus de hauteur que les aubes et une courbure contraire. Leur courbe est d'équerre au manchon I, et se termine par une partie droite convenablement dirigée pour que le liquide ne choque pas les aubes en les atteignant. Quant à la courbe de ces aubes, elle se trace à peu près comme celle des aubes de la roue verticale de M. Poncelet.

Enfin, la couronne B a des supports M qui s'adaptent à l'arbre L; cet arbre tourne sur un pivot qu'une disposition très-ingénieuse tient toujours oint d'huile, et à l'extrémité supérieure est un tourillon embrassé par un collier que portent des arcs-boutants appuyés sur le couvercle K.

Dans le cas d'une grande chute, la huche aurait trop de hauteur, si son plancher E se trouvait au niveau du fond du réservoir. L'eau descend alors par un tuyau N (F. 16) et entre, par la vanne C, dans une huche cylindrique D terminée par le bas comme la précédente. Le couvercle K doit être très-solidement fixé, afin qu'il puisse résister à la pression que le liquide exerce de bas en haut.

205. La vitesse de l'eau, à son entrée dans une turbine-Fourneyron, peut toujours être regardée comme due à la chute totale : si la roue est noyée, cette chute égale la distance du niveau dans le canal de fuite au niveau dans le réservoir ; pour le cas contraire, elle surpasse de peu la hauteur qui engendre réellement la vitesse, parce que le milieu des aubes n'a qu'une faible élévation au-dessus de l'eau qui s'échappe.

La vitesse de la roue qui rend le travail un maximum est à peu près, pour la plus grande circonférence, les 0,61 de celle qu'a l'eau à son entrée dans la couronne.

Avec une telle vitesse, la turbine, hors de l'eau ou dans l'eau, fait, sous des chutes de 24^{m} à $0^{m},21$, un travail mécanique qui varie entre les 0,6 et les 0,75 au moins de celui dont le moteur est capable. Il existe en effet une roue de M. Fourneyron qui, sous une chute de 23^{m}, donne les 0,6 de la quantité d'action du moteur, et une autre qui, sous une très-petite chute, donne jusqu'aux 0,8 de la même quantité d'action. La formule à employer est donc (155),

Pour les grandes chutes,	$Q\upsilon' = 600^{kg}XH$;
Pour les moyennes,	$Q\upsilon' = 700^{kg}XH$;
Et pour les petites,	$Q\upsilon' = 800^{kg}XH$.

DANAÏDES.

206. Les roues horizontales, appelées *danaïdes*, qui reçoivent l'eau selon une direction plus ou moins inclinée, ont des aubes planes ou courbes comprises entre deux tambours sans fond. La différence des rayons de ces cylindres doit être peu grande, pour que la vitesse propre au maximum d'effet convienne à peu près à tous

les points de l'aube, quand elle est déterminée pour un de ceux du milieu. Les aubes planes doivent être normales aux tambours et d'équerre sur la direction du courant. Le profil des aubes courbes, tout à fait arbitraire, peut se former d'un arc de cercle dont la corde soit inclinée ; mais il faut en outre que la partie inférieure de cet arc se confonde presque avec l'horizontale, pour que l'eau n'ait à sa sortie qu'une vitesse fort petite, si ce n'est nulle. Enfin le liquide, dirigé par un tuyau, doit arriver sur l'aube selon une tangente au premier élément du profil : autrement il y aurait choc, et le travail obtenu différerait beaucoup plus de celui qui peut être fourni par la chute totale.

Si l'on est obligé d'employer une grande masse d'eau, on la divise en plusieurs courants partiels dirigés par autant de tuyaux sur diverses aubes, ou bien on la reçoit dans un cylindre qui domine la roue, et dont le fond est percé de plusieurs orifices garnis d'ajutages coniques convenablement inclinés. La multiplicité des conduites d'eau présente cet avantage, que leurs diverses positions peuvent être combinées entre elles et avec la direction de la résistance appliquée à l'arbre vertical, de manière à exempter cet arbre de toute pression latérale.

207. Nous établirons la théorie des danaïdes de la manière la plus générale, en commençant par le cas des aubes planes. La notation sera la même que pour les turbines : ainsi, v désignera la vitesse du courant au milieu D de l'aube AB, point où doit frapper le filet-médium (P. III, F. 17) ; α l'angle formé par la direction de ce filet et l'aube, dans le plan vertical tangent à la surface cylindrique sur laquelle se trouve D ; v' la vitesse horizontale de la roue à la même surface, β l'angle compris entre le plan horizontal DE et la face inférieure de l'aube.

Les vitesses v, v' ont $v \sin \alpha$, $v' \sin \beta$ pour composantes normales au plan AB. Comme ces composantes sont de même sens, le choc fait perdre à la masse m de liquide dépensée par seconde une vitesse $v \sin \alpha - v' \sin \beta$ et une quantité d'action $\frac{m(v \sin \alpha - v' \sin \beta)^2}{2}$; de sorte que si l'on nomme toujours U la vitesse effective de sortie,

$$Qv' = \frac{mv^2}{2} - \frac{m(v \sin \alpha - v' \sin \beta)^2}{2} - \frac{mU^2}{2}.$$

Or, les vitesses v, v' ont $v \cos \alpha$, $v' \cos \beta$ pour composantes parallèles à AB, et ces composantes sont de sens contraires. La masse m est donc animée en D d'une vitesse relative $v \cos \alpha + v' \cos \beta$ avec laquelle l'eau descend de D en A. Comme la roue a toujours peu de hauteur, on peut, faisant abstraction de l'effet de la gravité pendant la descente, admettre qu'en A la vitesse u de m est encore la même qu'à l'origine du mouvement, et poser $u = v \cos \alpha + v' \cos \beta$. Mais la vitesse circulaire du point A réduit u à $v \cos \alpha$. Par conséquent,

$$U^2 = v^2 \cos^2 \alpha + v'^2 \sin^2 \beta,$$

$$Qv' = \frac{mv^2}{2} - \frac{m(v \sin \alpha - v' \sin \beta)^2}{2} - \frac{m(v^2 \cos^2 \alpha + v'^2 \sin^2 \beta)}{2},$$

et toutes réductions faites,

$$Qv' = m(v \sin \alpha - v' \sin \beta) v' \sin \beta.$$

Ici l'emploi de la quantité de mouvement eût été plus simple que celui des quantités d'action, car on serait parvenu très-brièvement à la valeur finale de Qv', en observant que l'effort normal de l'eau contre l'aube est $m(v \sin \alpha - v' \sin \beta)$, et que l'effort horizontal Q vaut $m(v \sin \alpha - v' \sin \beta) \sin \beta$.

208. L'expression de Qv', différentiée par rapport à chacune des trois variables α, β, v', devient

$$\frac{dQv'}{d\alpha}=mvv'\sin\beta\cos\alpha,\quad \frac{dQv'}{d\beta}=mv'(v\sin\alpha\cos\beta-2v'\sin\beta\cos\beta),$$

$$\frac{dQv'}{dv'}=m\sin\beta(v\sin\alpha-2v'\sin\beta).$$

Ces coefficients différentiels égalés à zéro donnent pour conditions du travail maximum, le premier, $\cos\alpha=0$ ou $\alpha=90^\circ$, et les deux autres, $v'=\frac{v}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. Il faut donc, pour obtenir de la roue le plus grand effet possible, diriger le courant perpendiculairement à l'aube en prise, et disposer la machine-ouvrière de manière que $v'=\frac{v}{2\sin\beta}$. Alors,

$$Qv'=m\left(v-\frac{v}{2}\right)\frac{v}{2}=\frac{mv^2}{4}=0,5\,\frac{mv^2}{2};$$

ce qui montre que, d'après la théorie, une danaïde à aubes planes rend seulement la moitié du travail fait par le moteur. Mais aussi elle donne cette moitié sous toutes les vitesses ; car assignons à v' une grande valeur, beaucoup plus grande même que celle de l'eau, il suffira d'en déduire la valeur correspondante de β, au moyen de la relation $\sin\beta=\frac{v}{2v'}$, et d'incliner les aubes conformément à cette valeur, pour que Qv' reste égal à $0,5\,\frac{mv^2}{2}$, si d'ailleurs la direction du coursier est changée de façon à maintenir le courant dans la normale.

En réalité, l'effet utile d'une danaïde à aubes planes n'est que les 0,7 de celui qui résulte de la théorie; de

sorte qu'on doit employer pour formule pratique de la quantité d'action, quand les conditions du maximum ne sont pas remplies, l'équation

$$Qv' = 0{,}7m\,(v\sin\alpha - v'\sin\beta)v'\sin\beta,$$

et pour celle de l'effort horizontal tangent à la circonférence qui passe par le milieu de chaque aube, l'équation

$$Q = 0{,}7m\,(v\sin\alpha - v'\sin\beta)\sin\beta.$$

Mais, lorsque la roue est disposée pour le maximum de travail, les formules pratiques sont

$$Qv' = 0{,}7 \times 0{,}5\,\frac{mv^2}{2} = 0{,}35 \times 1000^{kg}XH,$$

$$Q = \frac{0{,}35 \times 1000^{kg}XH}{v'},$$

H représentant la chute totale.

209. Soit une danaïde à aubes planes dans laquelle

$$X = 0^{mc},25,\quad v = 6^m,\quad v' = 4^m,\quad \alpha = 70^\circ,\quad \beta = 50^\circ.$$

On aura successivement

$$Qv' = 0{,}7\,\frac{1000^{kg} \times 0{,}25}{9^m{,}81}\,(6^m\sin 70^\circ - 4^m\sin 50^\circ)4^m\sin 50^\circ,$$

$\operatorname{Log} 6^m = 0{,}7781513$	$\operatorname{Log} 4^m = 0{,}6020600$
$\operatorname{Log}\sin 70^\circ = \bar{1}{,}9729858$	$\operatorname{Log}\sin 50^\circ = \bar{1}{,}8842540$
$\operatorname{Log} 6^m\sin 70^\circ = 0{,}7511371$	$\operatorname{Log} 4^m\sin 50^\circ = 0{,}4863140$
$6^m\sin 70^\circ = 5^m{,}64$	$4^m\sin 50^\circ = 3^m{,}06$

$$Qv' = 0{,}7\,\frac{250^{kg}}{9^m{,}81}\,(5^m{,}64 - 3^m{,}06)\,3^m{,}06 = 140^k{,}835 = 1^{ch}{,}88.$$

Comme le moteur serait à peu près capable d'un travail de

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{250^{kg}}{9^m,81} \times \frac{36^{mm}}{2} = 458^k,7,$$

la roue en rend seulement les 0,307, au lieu des 0,35 qu'elle donnerait, si sa vitesse convenait au maximum.

210. Les danaïdes à aubes courbes ont plus de hauteur que les précédentes, afin que l'eau puisse y agir par son poids. Ainsi, l'on ne peut pas y négliger l'effet de la gravité. Les angles α, β sont, pour cette sorte de roue, ceux que la tangente AB au point A le plus élevé du profil-milieu de l'aube (P. III, F. 18) fait avec la direction du courant et la tangente à la circonférence qui a son centre sur l'axe vertical. Un troisième angle est à considérer : c'est celui que forme la tangente au point le plus bas D du profil-milieu avec la tangente de la circonférence sur laquelle se trouve ce point; il sera désigné par γ. Enfin, nous nommerons H' la hauteur du niveau dans le réservoir au-dessus du cercle supérieur de la roue, H'' la hauteur des aubes, et nous supposerons que la vanne soit assez voisine du point A d'entrée, pour que la vitesse v du liquide en ce point puisse être attribuée uniquement à la chute H'.

La composante de v normale à l'aube est ici

$$v \cos(90 - \alpha) = v \sin \alpha,$$

et le choc cause encore une perte de quantité d'action

$$\frac{m(v \sin \alpha - v' \sin \beta)^2}{2}.$$

Mais la masse m gagne mgH'' en descendant le long de la surface cylindrique AD. Si donc il n'y avait pas de

choc, cette masse arrivée en D serait capable d'une quantité d'action

$$\frac{mv^2}{2} + mgH'' = mg(H' + H'').$$

En conséquence,

$$Qv' = mg(H' + H'') - \frac{m(v\sin\alpha - v'\sin\beta)^2}{2} - \frac{mU^2}{2}.$$

La vitesse v' du point de sortie D a une composante $v'\cos\gamma$ dirigée, selon la tangente au profil de l'aube, en sens inverse de u. La vitesse finale de m parvenue en D est donc $u - v'\cos\gamma$; le quarré de la vitesse de sortie

$$U^2 = (u - v'\cos\gamma)^2 + v'^2\sin^2\gamma = u^2 - 2uv'\cos\gamma + v'^2,$$

et

$$Qv' = mg(H' + H'') - \frac{m(v\sin\alpha - v'\sin\beta)^2}{2} - \frac{m(u^2 - 2uv'\cos\gamma + v'^2)}{2}.$$

Au point d'entrée A, la masse m doit à la rapidité du courant une vitesse $v\cos\alpha$ selon la tangente AB du profil, et ce point reçoit de la rotation une vitesse $v'\cos\beta$ de même sens, ce qui fait que le liquide commence à descendre le long de l'aube avec une vitesse relative $v\cos\alpha - v'\cos\beta$. Mais la gravité lui donne de A en D une vitesse qui vaut $\sqrt{2gH''}$. Par conséquent,

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{m(v\cos\alpha - v'\cos\beta)^2}{2} + \frac{m}{2} \times 2gH'',$$

et $$u = \sqrt{[(v\cos\alpha - v'\cos\beta)^2 + 2gH'']}.$$

211. La valeur générale de Qv' rend visible que la roue ne peut faire un travail égal au travail $mg(H' + H'')$ dont le moteur est capable, à moins qu'on n'ait

$$v\sin\alpha - v'\sin\beta = 0, \quad u^2 - 2uv'\cos\gamma + v'^2 = 0.$$

Ainsi les conditions du maximum d'effet sont

$$v'=v\frac{\sin\alpha}{\sin\beta},\quad u=v',\quad \text{et}\quad \cos\gamma=1\quad \text{ou}\quad \gamma=0.$$

La dernière ne saurait être complètement remplie, attendu qu'on ne peut rendre tout à fait horizontal l'élément inférieur des aubes ; mais une valeur de 30° donnée à γ ne diminue pas beaucoup celle de Qv'.

La seconde condition, introduite dans l'expression générale de u, fournit l'équation

$$v'^2=(v\cos\alpha-v'\cos\beta)^2+2gH'',$$

puis successivement

$$v'^2=v^2\cos^2\alpha-2vv'\cos\alpha\cos\beta+v'^2\cos^2\beta+2gH'',$$

$$2vv'\cos\alpha\cos\beta=v^2\cos^2\alpha-v'^2+v'^2\cos^2\beta+2gH''=v^2-v^2\sin^2\alpha-v'^2\sin^2\beta+2gH''=2g(H'+H'')-(v^2\sin^2\alpha+v'^2\sin^2\beta),$$

$$2vv'(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2g(H'+H'')-(v^2\sin^2\alpha-2vv'\sin\alpha\sin\beta+v'^2\sin^2\beta)=2g(H'+H'')-(v\sin\alpha-v'\sin\beta)^2=2g(H'+H''),$$

et enfin

$$v'=\frac{g(H'+H'')}{v\cos(\beta-\alpha)}.$$

Telle est donc théoriquement la vitesse qu'on doit donner à la danaïde, pour que son travail soit porté au maximum ; elle pourra être très-grande sans que ce travail diminue, quand l'angle $\beta-\alpha$ sera convenablement déterminé.

Mais, on ne connaît pas encore d'une manière positive quelle est en réalité la vitesse la plus avantageuse d'une danaïde à aubes courbes, ni la vraie quantité d'action que ce récepteur peut fournir dans la pratique. Borda en estimait approximativement le travail utile

aux 0,75 de celui qui résulte de la théorie, et selon Navier, il pourrait s'élever jusqu'aux 0,8, si la hauteur H'' des aubes était augmentée de manière à rendre le choc très-faible par la diminution de la vitesse d'entrée v. En attendant que l'expérience ait prononcé, nous poserons pour formule pratique à employer quand les conditions du maximum ne sont pas remplies,

$$Qv' = 0{,}75\,\frac{1000^{kg}X}{2g}\left[2gH-(v\sin\alpha-v'\sin\beta)^2-u^2+2uv'\cos\gamma-v'^2\right],$$

et pour celle qui convient au plus grand effet,

$$Qv' = 750^{kg}XH,$$

H désignant la chute totale $H'+H''$.

212. Nous prendrons comme exemple une danaïde à aubes courbes qui soit le plus analogue possible à la danaïde à aubes planes du n.° 209. Ainsi,

$$X = 0^{mc},25,\quad v' = 4^{m},\quad \beta = 50^{\circ},\quad H = 1^{m},835,$$

afin que l'eau supposée libre ait à peu près une vitesse de 6^{m} au bas de la roue,

$$H' = 0^{m},835,\qquad H'' = 1^{m},\qquad \gamma = 40^{\circ}.$$

Quant à l'angle α, il sera pris seulement de 40° ; car s'il était encore de 70°, le liquide, à cause de la valeur de β, devrait agir de bas en haut.

D'après ces données,

$$v = \sqrt{2gH'} = \sqrt{2\times 9^{m},81\times 0^{m},835} = 4^{m},048,$$

$$\sin\alpha = \cos\beta = 0{,}643,\qquad \cos\alpha = \sin\beta = \cos\gamma = 0{,}766,$$

$$u = \sqrt{[(4\overset{m}{,}048\times 0{,}766-\overset{m}{4}\times 0{,}643)^2+2\times 9\overset{m}{,}81\times \overset{m}{1}]} = \sqrt{19^{mm},9} = 4\overset{m}{,}46,$$

et

$$Qv' = \frac{750^{kg} \times 0,25}{2 \times 9^m,81} \left\{ \begin{array}{l} 2 \times 9^m,81 \times 1^m,835 - (4^m,048 \times \\ 0,643 - 4^m \times 0,766)^2 - 19^{mm},9 \\ + 2 \times 4^m,46 \times 4^m \times 0,766 - \\ 16^{mm} \end{array} \right\} = 266^k,56 = 3^{ch},55.$$

Or, le moteur pourrait produire

$$1000^{kg} \times 0,25 \times 1^m,835 = 458^k,7.$$

Par conséquent, la danaïde à aubes courbes est seulement capable des 0,58 de ce travail, tandis qu'elle en donnerait les 0,75, si sa vitesse convenait au maximum. Néanmoins, il y a lieu de lui reconnaître une grande supériorité sur la danaïde à aubes planes.

213. Il existe une troisième espèce de danaïde dont les aubes courbes sont renfermées entre deux tambours coniques. Le point d'entrée n'est plus situé à la même distance de l'axe que le point de sortie, et la force centrifuge augmente ou diminue la vitesse u qu'a la masse liquide au bas de l'aube dans la danaïde cylindrique (197); de sorte qu'en nommant u_1 sa nouvelle valeur, on a $u_1^2 = u^2 \pm \omega^2(R^2 - R'^2)$. Mais le quarré U^2 de la vitesse de sortie est encore la même fonction; seulement il faut y remplacer u par u_1, et v' par $R\omega$, R étant la distance de l'axe au point où a lieu U. Ainsi, la formule de Qv' sert encore pour déterminer la quantité d'action dont la danaïde est capable; les conditions du maximum restent les mêmes, et l'on doit aussi employer dans la pratique le coefficient de correction 0,75.

COMPARAISON DES ROUES HYDRAULIQUES.

214. Si l'on veut comparer les roues hydrauliques, dans la vue de déterminer celle qui convient le mieux à une usine en projet, il suffit de résumer tout ce que

nous avons dit sur chacun de ces récepteurs. On rapproche ainsi les faits suivants, et le choix devient facile.

Les roues en dessous à aubes planes ne peuvent guère prendre que les 0,4 de la vitesse du courant, et rendent seulement les 0,3 du travail dont le moteur est capable. Leur construction montre d'ailleurs qu'elles cessent de marcher quand leurs aubes inférieures sont noyées, c'est-à-dire lorsque le niveau dans le canal de fuite atteint les couronnes : on conçoit effectivement qu'en une telle circonstance, la masse d'eau placée en aval s'appuyant contre les aubes, paralyse l'effort de la masse venue par le coursier. Mais ces mêmes roues ont une simplicité qui les rend peu coûteuses, et rien n'empêche de leur donner un rayon tel qu'on n'ait pas besoin d'engrenage pour multiplier la pression de l'eau. Il est clair toutefois que, si par là elles deviennent capables de vaincre sans secours une grande résistance, le nombre de leurs tours par minute devient moindre, et que la vitesse de l'opérateur diminue.

Les roues en dessous à aubes courbes peuvent recevoir une vitesse qui égale les 0,55 ou les 0,6 de celle du courant, et faire les 0,65 du travail de l'eau sous une chute égale ou supérieure à 2^{m}, et les 0,75 sous une chute moindre que cette limite. Elles marchent noyées, même quand le niveau en aval s'élève au-dessus des aubes et atteint le tiers de la chute totale. A dimensions égales, elles sont un peu plus chères que les précédentes; mais elles peuvent avoir un peu plus de vitesse, et c'est là souvent un avantage. Le défaut qu'on leur reproche, c'est de ne pouvoir tourner avec une rapidité inférieure à celle qu'exige le maximum d'effet, sans que l'eau se perde en partie dans le cylindre intérieur, ce qui cause une notable diminution de la quantité d'action produite.

Les roues pendantes sont spéciales pour les rivières; elles ne peuvent en remplacer aucune autre espèce, ni être remplacées.

Les roues de côté doivent avoir une très-petite vitesse; néanmoins leur effet diminue peu quand la rotation se trouve supérieure à celle qui convient au maximum. Bien construites, elles rendent à peu près les 0,8 du travail de l'eau. Mais comme leur rayon égale et surpasse même la hauteur du fond du réservoir au-dessus du niveau dans le canal de fuite, elles deviendraient très-grandes et très-pesantes, appliquées à de fortes chutes. D'ailleurs, elles ne peuvent marcher quand les aubes inférieures sont entièrement noyées, et la grande longueur dont elles ont besoin pour produire un effort puissant les rend difficiles à construire et à placer.

Les roues à augets demandent aussi une faible vitesse; mais, comme les roues de côté, elles s'écartent peu du maximum d'effet quand leur rotation est d'environ 2^m par seconde; le travail s'élève alors jusqu'aux 0,8 de celui du moteur. Admettant un grand volume d'eau par seconde, et pouvant recevoir un diamètre égal à la chute totale, elles n'ont pas besoin d'être fort longues pour produire un puissant effort. Enfin, la submersion sur une hauteur égale à la largeur des couronnes n'empêche pas ces roues de fonctionner.

Les turbines de M. Fourneyron peuvent prendre de très-grandes vitesses, marcher complètement noyées, produire de puissants efforts, sans avoir à beaucoup près le rayon ni le poids des autres roues, et transmettre pourtant au moins les 0,75 du travail de l'eau. Elles conviennent d'ailleurs à toutes les chutes, et communiquent directement le mouvement circulaire horizontal.

Les danaïdes à aubes courbes jouissent de cette

dernière propriété, et peuvent donner aussi les 0,75 du travail de l'eau; mais elles ne marchent pas noyées, et ne sont applicables qu'à des chutes médiocres.

Ainsi, on doit employer la roue en dessous à aubes courbes pour les très-petites chutes, la roue de côté pour les moyennes, la roue à augets pour les grandes; mais la turbine-Fourneyron convient à toutes ces chutes, et même à celles qui sont trop fortes pour recevoir une roue verticale.

MACHINES OUVRIÈRES.

215. Les machines ouvrières peuvent être partagées en deux classes, qui comprennent, la première, les *machines à main* ou instruments mécaniques; la seconde, toutes les autres. Les instruments ne peuvent être mis en action que par l'homme, attendu que la main doit en être à la fois le moteur et le support; mais les machines proprement dites ont des supports inertes, et tous les moteurs peuvent les mettre en mouvement au moyen de récepteurs convenables. Il n'y a donc pas de raison pour placer ces dernières à la suite d'un moteur plutôt qu'à la suite d'un autre. Cependant, à cause de la destination spéciale de notre travail, nous étudierons comme *machines mues par l'eau*, celles que l'artillerie fait mettre ordinairement en jeu par ce liquide, de même que nous avons considéré comme des *machines mues par l'homme*, celles auxquelles la même arme applique habituellement ce moteur animé.

MARTEAUX HYDRAULIQUES.

216. Les marteaux à supports inertes oscillent autour d'un axe horizontal qui partage le manche en deux

parties plus ou moins inégales. L'ascension est produite par un arbre à cames, et la descente par l'excès du poids de la partie où se trouve la tête, sur le reste du manche. Quelquefois aussi cette tête comprime, en s'élevant, un ressort qui contribue à la descente par sa réaction.

Les cames pressent le manche de haut en bas, en arrière de l'axe, ou bien elles soulèvent soit en avant de la tête, soit entre cette tête et l'axe. La première disposition produit le *marteau à bascule;* la seconde, le *marteau frontal,* et la troisième, le *marteau à soulèvement.* Le premier étant de beaucoup le moins pesant, est ordinairement appelé *martinet* dans les usines; les deux autres y portent en commun le nom de *gros marteaux.* L'axe de ces derniers, quoique placé très-près de l'extrémité opposée à la tête, se trouve fortement chargé, car le manche est en fonte; ou s'il est en bois, il a de fortes dimensions, et la tête est très-lourde. Aussi est-ce pour ne pas rendre la charge excessive, et n'être pas obligé, par suite, d'employer de très-gros tourillons, qu'on applique l'effort moteur du côté de la résistance.

MARTINET.

217. Le manche en bois d'un martinet s'engage dans une espèce de manchon en fer, nommé *hurasse,* auquel sont adaptés les tourillons. L'extrémité opposée à la tête A (P. III, F. 19) est enveloppée d'une *bague* métallique B qui reçoit le choc des cames, puis leur pression, jusqu'à ce qu'il en résulte une ascension suffisante. Le choc s'opère verticalement, parce qu'il a lieu dans le plan à peu près horizontal où se trouvent l'axe C de l'arbre et celui de la hurasse D. Enfin, sur le même

arbre est montée une roue hydraulique, en dessous, par exemple, vers laquelle l'eau afflue dans le sens de la tête à la bague du marteau.

218. La quantité d'action que doit dépenser le moteur par seconde se compose, 1.° de celle qu'exigent les ascensions de la résistance principale et les frottements; 2.° de celle qui se consomme dans les chocs d'un certain nombre de cames. Pour calculer la première, nous emploierons les valeurs moyennes des pressions qui s'exercent durant les ascensions, puis dans les intervalles pendant lesquels l'arbre des cames tourne à vide, et nous supposerons uniforme le mouvement de cet arbre. D'ailleurs, l'égalité de la quantité d'action dont il s'agit et de la partie correspondante de celle que dépense le moteur, revient à l'égalité des moments des efforts, puisque tous les mouvements sont circulaires.

Soient donc Q l'effort tangentiel exercé par l'eau à la circonférence de la roue hydraulique que touche le filet-médium liquide, α l'angle compris entre la direction de cet effort et l'horizontale (P. III, F. 17), R_2 la distance de la même direction à l'axe de rotation C, P' le poids total dont sont chargés les tourillons de l'arbre. La puissance Q a QR_2 pour moment, $Q\cos\alpha$ pour composante horizontale, et $Q\sin\alpha$ pour composante verticale.

Rien n'empêche de supposer, pour un moment, que la bague exerce contre la came une réaction continue et verticale dont la valeur moyenne soit q. Cette réaction engendre un frottement de glissement qui vaut (57) $f_1 q \frac{R'+R''}{R''} \cdot \frac{\theta}{2}$, si f_1 est le coefficient relatif aux substances frottantes, R' la distance du contact B à l'axe C de l'arbre, R'' celle du même contact à l'axe D de la hurasse, et θ l'arc de rayon 1 décrit par les horizontales

BC, BD pendant l'ascension ; car l'arc décrit par B autour de C égale $R'\theta$. Conséquemment, il y a, au contact B, un effort vertical, dirigé de bas en haut,

$$q' = q\left(1 + f_1 \frac{R' + R''}{R''} \cdot \frac{\theta}{2}\right),$$

et le groupe des forces qui pressent verticalement les tourillons de l'arbre a pour résultante $Q\sin\alpha + P' - q'$. La pression totale subie par ces tourillons vaut donc

$$\sqrt{[(Q\sin\alpha + P' - q')^2 + (Q\cos\alpha)^2]} = 0,96(Q\sin\alpha + P' - q') + 0,4Q\cos\alpha.$$

Soient f_1' le coefficient de leur frottement circulaire, et ρ' leur rayon. Le moment de ce frottement sera

$$f_1'\rho'[0,96(Q\sin\alpha + P' - q') + 0,4\,Q\cos\alpha].$$

Ainsi, l'équation des moments, prise par rapport à l'axe de l'arbre des cames, est

$$QR_2 = q'R' + f_1'\rho'[0,96(Q\sin\alpha + P' - q') + 0,4\cos\alpha].$$

On en tire

$$Q = \frac{q'R' + 0,96f_1'\rho'(P' - q')}{R_2 - f_1'\rho'(0,96\sin\alpha + 0,4\cos\alpha)},$$

relation qui fera connaître la partie Q de l'effort moteur, quand sera connu l'effort continu q de la came contre la bague.

Considérons le marteau à une époque de l'ascension où une partie θ' de θ ait été parcourue par la droite DG qui joint le centre de gravité G au centre d'oscillation D, et nommons q_1 la pression moyenne exercée par la came perpendiculairement au manche. L'effort q_1 produira, dans l'instant suivant, une quantité d'action $q_1R''d\theta'$. Pendant le même instant, G s'élèvera de dh,

h étant la hauteur totale de l'ascension, et le poids P'' du marteau absorbera une quantité d'action $P''dh$.

Mais la direction de q_1 fait avec la verticale un angle θ', et cet effort a pour composantes $q_1\cos\theta'$, $q_1\sin\theta'$. La pression sur l'axe de la hurasse est donc

$$\sqrt{[(P''+q_1\cos\theta')^2+(q_1\sin\theta')^2]}=0{,}96\,(P''+q_1\cos\theta')+0{,}4\,q_1\sin\theta';$$

le frottement des tourillons du marteau vaut

$$f_2'[0{,}96\,(P''+q_1\cos\theta')+0{,}4\,q_1\sin\theta'],$$

et il consomme, en parcourant l'arc $\rho''d\theta'$ dans l'instant considéré, une quantité d'action

$$f_2'\rho''d\theta'[0{,}96\,(P''+q_1\cos\theta')+0{,}4\,q_1\sin\theta'].$$

Par conséquent,

$$q_1R''d\theta'=P''dh+f_2'\rho''[0{,}96\,(P''d\theta'+q_1\cos\theta'd\theta')+0{,}4q_1\sin\theta'd\theta'],$$

et

$$q_1R''\theta'=P''\textstyle\int dh+f_2'\rho''[0{,}96(P''\theta'+q_1\sin\theta')-0{,}4\,q_1\cos\theta']+C.$$

Prenant ces intégrales de $\theta'=0$ à $\theta'=\theta$, pour embrasser l'ascension entière h, on obtient

$$q_1R''\theta=P''h+f_2'\rho''[0{,}96\,(P''\theta+q_1\sin\theta)-0{,}4\,q_1\,(\cos\theta-1)],$$

puis $$q_1=\frac{P''(h+0{,}96f_2'\rho''\theta)}{R''\theta-f_2'\rho''[0{,}96\sin\theta-0{,}4\,(1-\cos\theta)]}.$$

Comme l'effort continu q produit la pression q_1, il y a égalité entre les quantités d'action qui résultent de ces forces pendant un tour complet de l'arbre. Or, celle que donne q est $2\pi R'q$, et si n désigne le nombre des

cames, on a $nq_1R''\theta$ pour la quantité d'action qu'engendre q_1. Par conséquent,

$$2\pi R'q = nq_1R''\theta,$$

$$q = \frac{nR''\theta}{2\pi R'}q_1 = \frac{nR''\theta}{2\pi R'} \cdot \frac{P''(h+0,96f_2'\rho''\theta)}{R''\theta - f_2'\rho''[0,96\sin\theta - 0,4(1-\cos\theta)]}.$$

L'effort moteur Q étant complétement déterminé, il devient très-facile d'obtenir la quantité d'action qu'exigent par seconde les ascensions de la résistance principale et les frottements. Soit n' le nombre de tours faits dans une minute par la roue hydraulique. Il y aura dans chaque seconde un nombre de tours $\frac{n'}{60}$; l'arc le long duquel s'exercera Q pendant le même temps, sera $\frac{n'}{60}2\pi R_2$, et l'on aura, pour le travail indiqué,

$$T = \frac{2\pi R_2 n'Q}{60}.$$

219. Cherchons maintenant la quantité d'action qui se consomme dans le choc d'une seule came contre la bague, et nommons N' l'intensité de ce choc, selon la verticale, Ω' la vitesse angulaire de l'arbre avant la percussion, ω' celle qui lui reste ensuite, ω'' la vitesse angulaire que la came imprime au martinet, l la distance du centre de gravité G à l'axe D de la hurasse (P. III, F. 19), dm' une masse élémentaire du système de l'arbre à cames et de la roue hydraulique, r' la distance de dm' à l'axe C de cet arbre, M' la masse du même système rapportée en B, enfin dm'', r'', M'', les choses qui correspondent aux trois dernières dans le martinet.

Il est de fait que, malgré la réaction de l'élasticité, la came et la bague restent en contact après le choc: jamais l'observation n'a pu faire apercevoir la moindre

19

séparation. Cet effet provient probablement de l'action du poids P'' appliqué en G, bien que l'extrêmement petite durée de la percussion permette de la considérer comme indépendante de la pesanteur. Quoi qu'il en soit, on doit regarder le point B de la came comme animé de la même vitesse que le point B de la bague, et poser $R'\omega'=R''\omega''$. Il s'ensuit $\omega''=\frac{R'}{R''}\omega'$.

La masse élémentaire dm'' reçoit du choc une vitesse $r''\omega''$ et une quantité de mouvement $r''\omega''dm''$. La quantité de mouvement reçue par la masse totale m'' du martinet est donc $\omega''\int r''dm''=\omega''lm''$, puisque cette masse peut être supposée concentrée en G. Or la force $\omega''lm''$, dirigée de bas en haut, est une résistance dirigée de haut en bas, par rapport à la puissance N', percussion verticale de la came. L'axe de la hurasse est donc choqué comme il le serait directement par un poids $N'+\omega''lm''$, car les deux forces N', $\omega''lm''$ agissent dans le même plan vertical et sont parallèles à fort peu près.

La résultante $N'+\omega''lm''$ ayant ses deux termes essentiellement positifs, ne peut jamais devenir nulle, et par suite, l'axe d'un marteau à bascule ne saurait être affranchi de toute percussion. Ainsi, les tourillons de la hurasse éprouvent toujours, pendant le choc de la came, un frottement dont le moment relatif à leur axe est $f_2'\rho''(N'+\omega''lm'')$.

Mais le moment de la puissance N' par rapport au même axe est $N'R''$, et celui de la résistance $\omega''\int r''dm''$ est $\omega''\int r''^2dm''=\omega''M''R''^2$. L'équilibre autour de l'axe de la hurasse exige donc que

$$N'R''=\omega''M''R''^2+f_2'\rho''(N'+\omega''lm'').$$

Négligeant le moment du frottement, toujours fort petit,

on a simplement

$$N'R'' = \omega'' M'' R''^2 = \omega' R R'' M'', \text{ et } N' = \omega' R' M''.$$

La percussion N′ est due à la quantité de mouvement que perd la masse m' dans le choc de la came. Comme la perte de vitesse angulaire est $\Omega' - \omega'$, la masse élémentaire dm' se trouve privée de la quantité de mouvement $r'(\Omega' - \omega')dm'$, et la force qui engendre N′ vaut $(\Omega' - \omega')\int r' dm'$. Mais les infiniment petites composantes de cette force ne causent aucune percussion sur l'axe de l'arbre, car elles sont appliquées deux à deux en des points symétriquement placés par rapport à cet axe, et deux à deux aussi elles se trouvent dirigées en sens contraires, ce qui rend nulle leur résultante. L'axe de l'arbre n'est donc choqué que par N′; il en résulte un frottement $f_1'N'$, et l'équilibre autour de cet axe donne

$$(\Omega' - \omega')\int r'^2 dm' = N'R' + f_1' \rho' N'.$$

Négligeant le moment très-petit du frottement, et observant que $(\Omega' - \omega')\int r'^2 dm' = (\Omega' - \omega')M'R'^2$, on obtient

$$N'R' = (\Omega' - \omega')M'R'^2, \text{ ou } N' = (\Omega' - \omega')M'R';$$

puis l'élimination de N′ entre ses deux valeurs conduit à $\omega' M'' = (\Omega' - \omega')M'$, $\omega' = \frac{\Omega' M'}{M' + M''}$, $\Omega' = \frac{\omega'(M' + M'')}{M'}$.

Pour achever de déterminer les vitesses angulaires que possède l'arbre avant et après le choc, il suffit d'égaler approximativement leur moyenne à la vitesse angulaire Ω_1 déduite de l'observation du nombre des tours faits dans une minute par la roue hydraulique,

c'est-à-dire déduite de l'équation $\Omega_1=\frac{2\pi n'}{60}$. On a ainsi $\frac{\Omega'+\omega'}{2}=\Omega_1$, et l'on trouve

$$\Omega'=\frac{2\Omega_1(M'+M'')}{2M'+M''},\quad \omega'=\frac{2\Omega_1 M'}{2M'+M''}.$$

Il est facile alors d'obtenir la perte de quantité d'action que le choc d'une seule came fait éprouver à l'arbre. En effet, avant ce choc, la masse dm' possédait une quantité d'action $\frac{r'^2\Omega'^2 dm'}{2}$, et celle qui lui reste après est $\frac{r'^2\omega'^2 dm'}{2}$. La masse totale m' avait donc une quantité d'action $\frac{\Omega'^2}{2}\int r'^2 dm'=\frac{\Omega'^2}{2}M'R'^2$; elle en conserve seulement la partie $\frac{\omega'^2}{2}\int r'^2 dm'=\frac{\omega'^2}{2}M'R'^2$, et sa perte vaut

$$\frac{M'R'^2}{2}(\Omega'^2-\omega'^2)=\frac{M'R'^2}{2}\times\frac{4\Omega_1^2(M'^2+2M'M''+M''^2)-4\Omega_1^2M'^2}{(2M'+M'')^2}=$$

$$M'R'^2\frac{2\Omega_1^2(2M'M''+M''^2)}{(2M'+M'')^2}=M'R'^2\frac{2\Omega_1^2M''}{2M'+M''}=$$

$$\frac{2\Omega_1^2M''R'^2}{2+\frac{M''}{M'}}=\Omega_1^2M''R'^2,$$

parce que la grandeur de la masse M', relative au système hydraulique, par rapport à la masse M'' relative au martinet, permet de négliger la fraction $\frac{M''}{M'}$.

Nous aurons la perte qu'occasionnent les chocs pendant un tour complet, en multipliant $\Omega_1^2M''R'^2$ par le nombre n des cames, et la perte T' pour une seconde,

en multipliant le résultat par le nombre $\frac{n'}{60}$ des tours qui ont lieu durant ce temps. Ainsi,

$$T' = \frac{nn'}{60}\Omega_1^2 M'' R'^2.$$

Or, l'effort moteur Q' propre à réparer cette perte doit être tel que

$$\frac{n'}{60} 2\pi R_2 Q' = \frac{nn'}{60}\Omega_1^2 M'' R'^2.$$

Par conséquent,

$$Q' = \frac{n\Omega_1^2 M'' R'^2}{2\pi R_2},$$

et l'on peut calculer l'effort total $Q + Q'$ que l'eau doit exercer constamment sur la roue.

Quant à la quantité d'action totale qu'exige par seconde le martinet, elle est (218)

$$T + T' = \frac{n'}{60}(2\pi R_2 Q + n\,\Omega_1^2 M'' R'^2).$$

220. Le martinet établi à Metz, dans l'arsenal d'artillerie, nous servira de sujet d'application.

On y trouve

$$P'' = 447^{kg},\ h = 0^m,16,\ n = 6,\ R' = 0^m,57,\ R'' = 1^m,$$
$$f_1 = f_2' = 0,2,\ \rho'' = 0^m,03,$$

et $11°,5$ pour l'arc θ, ce qui donne

$$\theta = \frac{2\pi}{360°}11°,5 = 0,2007,\ \sin\theta = 0,1994,\ \cos\theta = 0,9799.$$

Par conséquent, l'effort vertical et continu de la came,

$$q = \left\{ \frac{6 \times 1^{m} \times 0,2}{2 \times 3,1416 \times 0^{m},57} \cdot \frac{447^{kg}(0^{m},16 + 0,96 \times 0,2 \times 0^{m},03 \times 0,2)}{1^{m} \times 0,2 - 0,2 \times 0^{m},03(0,96 \times 0,1994 - 0,4 \times 0,02)} \right\} = 121^{kg},29,$$

$$q' = 121^{kg},29\left(1 + 0,2\frac{0^{m},57 + 1^{m}}{1^{m}} \times \frac{0,2}{2}\right) = 125^{kg},1.$$

Dans la même machine, $f_1' = 0,1$, $\rho' = 0^{m},04$, $P' = 1900^{kg}$, $R_2 = 1^{m},8$, et α peut être regardé comme nul, parce que l'inclinaison du coursier est très-faible. Il s'ensuit

$$Q = \frac{125^{kg},1 \times 0^{m},57 + 0,96 \times 0,1 \times 0^{m},04(1900^{kg} - 125^{kg},1)}{1^{m},8 - 0,1 \times 0^{m},04 \times 0,4} = 43^{kg},44.$$

Nous avons maintenant à trouver la masse M'' du martinet rapportée au contact de la bague. Il faut, pour cela, calculer l'expression $\int \frac{r''^2 dm''}{R''^2}$ qui égale M''. Mais comme $R'' = 1^{m}$, il suffit de déterminer le moment d'inertie $\int r''^2 dm''$ pris par rapport à l'axe de la hurasse. La marche à suivre consiste à prendre relativement à cet axe le moment d'inertie de chacune des quatre parties du martinet, et à faire la somme des résultats.

1.° La tête. Cette masse de fonte pèse 168^{kg}, et l'axe des moments est à $1^{m},9$ du centre de gravité. Si donc nous regardons les particules comme concentrées en ce point, le moment d'inertie est approximativement

$$\frac{168^{kg}}{9^{m},81}(1^{m},9)^2 = 61,82.$$

2.° Le manche, prisme carré qui a 3^{m} de longueur, $0^{m},26$ d'équarrissage, et pèse 150^{kg}. Cherchons d'abord le moment d'inertie par rapport à un axe AB (P. III, F. 20) qui, passant par le centre de gravité, soit

parallèle à l'axe de la hurasse. La masse d'un élément est $\delta dxdydz$. Sa distance à l'axe des moments est $\sqrt{y^2+z^2}$, si nous plaçons l'origine à l'intersection O de cet axe et de l'axe longitudinal, Donc, le moment d'inertie élémentaire vaut $\delta dxdydz(y^2+z^2)$, et le moment total

$$\int \delta dxdydz(y^2+z^2)=\delta x \int dydz(y^2+z^2)+\mathrm{C}.$$

Prenant de $x=\frac{e}{2}$ à $x=-\frac{e}{2}$, e étant l'équarrissage, on a

$$\delta e \int dydz(y^2+z^2)=\delta e \int \left(\frac{y^3}{3}+z^2y\right)dz+\mathrm{C}.$$

Prenant de $y=\frac{e}{2}$ à $y=-\frac{e}{2}$, on trouve

$$2\delta e \int \left(\frac{e^3}{24}+\frac{z^2e}{2}\right)dz=\delta e^2 \int \left(\frac{e^2}{12}+z^2\right)dz=\delta e^2\left(\frac{e^2z}{12}+\frac{z^3}{3}\right)+\mathrm{C}.$$

Prenant de $z=\frac{k}{2}$ à $z=-\frac{k}{2}$, k étant la longueur du manche, on obtient enfin

$$2\delta e^2\left(\frac{e^2k}{24}+\frac{k^3}{24}\right)=\frac{\delta e^2k}{12}(e^2+k^2).$$

Or, si d désigne la distance de l'axe de ce moment à celui de la hurasse, on doit avoir, pour le moment rapporté à ce dernier,

$$\frac{\delta e^2k}{12}(e^2+k^2)+\delta e^2kd^2=\delta e^2k\left(\frac{e^2+k^2}{12}+d^2\right).$$

Donc, et parce que

$$d=\frac{k}{2}-\mathrm{R}''=1^{\mathrm{m}},5-1^{\mathrm{m}}=0^{\mathrm{m}},5,$$

le moment d'inertie du manche est

$$\frac{150^{kg}}{9^m,81}\left\{\frac{(0,26)^2+(3)^2}{12}+(0,5)^2\right\}=15,37.$$

3.° La hurasse, manchon cylindrique qui a $0^m,25$ de longueur, $0^m,15$ pour rayon moyen, et pèse 104^{kg}. On peut faire abstraction des tourillons qui, à raison de leur faible rayon ρ', ont un très-petit moment d'inertie.

Soient r le rayon moyen (F. 21) et e l'épaisseur. La masse d'un anneau élémentaire est $2\pi re\delta dz$, et celle du quart vaut $\frac{1}{2}\pi re\delta dz$. Supposons cette dernière masse concentrée au milieu a de l'arc moyen. Sa distance à l'axe sera

$$\sqrt{\overline{ab}^2+z^2}=\sqrt{\frac{r^2}{2}+z^2},$$

et l'on aura, pour le moment d'inertie du quart de la hurasse,

$$\int \frac{1}{2}\pi re\delta dz\left(\frac{r^2}{2}+z^2\right)=\frac{1}{2}\pi re\delta\left(\frac{r^2z}{2}+\frac{z^3}{3}\right)+C.$$

Etendant cette intégrale de $\frac{k'}{2}$ à $-\frac{k'}{2}$, k' étant la longueur, on obtient

$$\pi re\delta\left(\frac{r^2k'}{4}+\frac{k'^3}{24}\right)=\pi rek'\delta\left(\frac{6r^2+k'^2}{24}\right).$$

Le moment d'inertie des 4 quarts ou de la hurasse entière est donc

$$\pi rek'\delta\left(\frac{6r^2+k'^2}{6}\right)=2\pi rek'\delta\left(\frac{6r^2+k'^2}{12}\right)=$$

$$\frac{104^{kg}}{9^m,81}\left\{\frac{6(0,15)^2+(0,25)^2}{12}\right\}=0,174.$$

4.° La bague qui pèse 25^{kg}. Comme sa forme n'est pas définie, nous supposerons les particules concentrées à l'extrémité de $R''=1^m$, et nous aurons pour moment d'inertie approximatif $\frac{25^{kg}}{9^m,81}(1^m)^2=2,548$.

Le moment d'inertie de la masse entière du marteau vaut donc

$$61,82+15,37+0,174+2,548=79,912=\int r''^2 dm''=M''.$$

Comme la roue hydraulique fait 16 tours par minute,

$$n'=16,\ \Omega_1=\frac{2\times3,1416\times16}{60}=1,676,$$

$$Q'=\frac{6(1,676)^2(79,912)(0^m,57)^2}{2\times3,1416\times1^m,8}=38^{kg},7,$$

l'effort moyen et constant qu'exerce en totalité le moteur, $Q+Q'=43^{kg},44+38^{kg},7=82^{kg},14$, la dépense totale de quantité d'action par seconde

$$T+T'=\frac{16}{60}\left\{\begin{matrix}[2\times3,1416\times1^m,8\times43^{kg},44\\+6(1,676)^2(79,912)(0^m,57)^2]\end{matrix}\right\}=247^k,41,$$

et le martinet exige un nombre de chevaux

$$\frac{247,41}{75}=3^{ch},3.$$

Sans les frottements et les chocs, l'effort moteur serait seulement

$$Q=\frac{qR'}{R_2}=\frac{121^{kg},29\times0^m,57}{1^m,8}=38^{kg},41,$$

car q' et q se trouveraient égaux. Les frottements consomment donc $43^{kg},44-38^{kg},41=5^{kg},03$, ou à peu près les 0,06 de l'effort total $Q+Q'$.

Quant au travail consommé par les chocs,

$$T' = \frac{16}{60} 6(1,676)^2(79,912)(0^m,57)^2 = 116^k,73,$$

il forme les 0,47 du travail total, ou à peu près la moitié.

221. Une chose importante reste à déterminer: c'est le travail que peut faire le martinet en retombant sur la barre à forger. Remarquons, pour cela, que la came le conduit jusqu'au moment où la panne s'est élevée d'une hauteur h au-dessus de l'enclume; qu'ensuite il continue son mouvement d'ascension, d'abord avec la vitesse angulaire ω'' dont il est animé, puis avec une vitesse de plus en plus petite, et qu'il s'arrête seulement quand sa force-vive a été entièrement détruite par la gravité jointe au frottement des tourillons de la hurasse. Alors il retombe, et à part le même frottement, sa force-vive lui est rendue par la gravité, pendant qu'il descend du point d'arrêt à l'extrémité la plus élevée de h.

Or, la force-vive de la masse élémentaire du martinet est $r''^2\omega''^2 dm''$, et celle de la masse totale vaut

$$\omega''^2 \int r''^2 dm'' = \omega''^2 M'' R''^2 =$$

$$\frac{R'^2}{R''^2}\omega'^2 M'' R''^2 = \frac{4\Omega_1^2 R'^2 M'^2 M''}{(2M' + M'')^2} = \frac{4\Omega_1^2 R'^2 M''}{\left(2 + \frac{M''}{M'}\right)^2} = \Omega_1^2 R'^2 M'',$$

c'est-à-dire qu'elle est la moitié de la force-vive perdue dans chaque choc par la masse m' du système hydraulique (219). Conséquemment, le martinet retombé à l'extrémité supérieure de h se trouve déjà capable à peu près d'une quantité d'action $\frac{\Omega_1^2 R'^2 M''}{2}$. Mais le parcours de h lui communique une quantité d'action $P''h$,

et durant ce parcours égal à $\rho''\theta$, le frottement $f_2'P''$ des tourillons de la hurasse consomme une quantité d'action $\rho''\theta f_2'P''$. Le travail t'' qui peut être fait à chaque coup sur la barre par le martinet est donc approximativement tel que

$$t'' = \frac{\Omega_1^2 R'^2 M''}{2} + P''(h - f_2'\rho''\theta).$$

En d'autres termes, l'effet de la chute vaut autant de fois celui de 1^{kg} tombé de 1^m que l'exprime le nombre d'unités de t''.

Mais les coups seraient trop lents, si l'on s'en reposait sur la gravité et le frottement des tourillons de la burasse pour détruire la vitesse d'ascension. Aussi, un restituteur élastique s'oppose-t-il à la marche ascensionnelle du martinet un peu avant que la tête ait atteint l'extrémité supérieure de h, de sorte que l'outil se trouve tout à fait privé de mouvement à l'instant même où la came l'abandonne. Dès l'instant suivant, l'élasticité réagit et lui rend graduellement la quantité d'action $\frac{\Omega_1^2 R'^2 M''}{2}$, moins la partie que fait perdre son imperfection.

222. Il convient de comparer le travail du martinet à celui de son moteur. Le premier, ramené à la seconde, donne, d'après le n.° 220,

$$T'' = \frac{nn'}{60}\left[\frac{\Omega_1^2 R'^2 M''}{2} + P''(h - f_2'\rho''\theta)\right] =$$

$$\frac{6\times16}{60}\left[\frac{(1,676)^2\,(0^m,57^2)79,912}{2} + 447^{kg}(0^m,16 - 0;2\times0^m,03\times0,2)\right] =$$

$$171^k,936.$$

Le second $T + T' = 247^k,41$. Par conséquent, le mar-

tinet rend seulement les 0,69 de la quantité d'action que dépense toute la machine.

GROS MARTEAUX.

223. Les gros marteaux étant très-lourds ont besoin de cames à queues très-fortes qui ne peuvent être implantées qu'au nombre de quatre, tout au plus, sur une même circonférence de leur arbre. Si donc cet arbre portait aussi la roue hydraulique, comme dans le martinet, il arriverait que le marteau frapperait un trop petit nombre de coups par minute, quand la vitesse de la roue conviendrait au maximum de travail, ou que cette roue tournerait trop vite, quand le jeu de l'outil serait suffisamment rapide. Ainsi, les cames et la roue motrice doivent être montées sur des arbres séparés, pour que la vitesse la plus avantageuse de la seconde puisse produire celle qui convient aux premières.

Les arbres AB, CD sont ordinairement parallèles (P. III, F. 22). Le premier porte alors la roue hydraulique E et un hérisson F. Sur le second se trouvent un pignon G, ou une lanterne, et les cames H. Si le marteau est à soulèvement (216), le manche IK se trouve dans un plan vertical parallèle à celui de CD; s'il s'agit d'un frontal, le manche peut être placé soit comme IK, soit dans un plan vertical perpendiculaire à celui de CD. Dans tous les cas, il se produit deux chocs à chaque ascension du marteau: l'un de la came contre la bague K du manche, l'autre du hérisson contre le pignon.

224. Nous nous bornerons à déterminer la quantité d'action consommée par les chocs, car pour celle qu'absorbe l'ascension du marteau, elle est facile à trouver, d'après tout ce qui précède: on chercherait d'abord la puissance qu'il faudrait appliquer à la circonférence pri-

mitive du pignon, comme on a cherché l'effort Q dans le martinet, mais en faisant $\alpha=90°$, parce que cette puissance peut être supposée verticale. Regardant ensuite la même puissance comme une résistance à l'égard de la roue hydraulique, on imiterait, pour obtenir l'effort moteur, ce qui a été fait dans la théorie de la chèvre des architectes (58).

Afin d'employer des notations qui concordent avec celles de la théorie du martinet, nous nommerons respectivement :

Ω, ω, Ω_1, ρ, f', R, M, la vitesse angulaire de l'arbre hydraulique avant le choc, la vitesse angulaire que lui laisse ce choc, la vitesse angulaire moyenne observée, le rayon des tourillons, le coefficient de leur frottement, la distance du point choqué L à l'axe de rotation AB, ou le rayon de la circonférence primitive du hérisson, enfin la masse de l'arbre, de la roue et du hérisson rapportée au point L ;

Ω', ω', ρ', f_1', R', M', la vitesse angulaire de l'arbre à cames avant le choc, celle qu'il conserve après, le rayon des tourillons, le coefficient de leur frottement, la distance du point choqué H à l'axe CD, la masse de l'arbre, du pignon et de la came rapportée à ce point;

ω'', ρ'', f_2', R'', M'', la vitesse angulaire du marteau après le choc, le rayon de ses tourillons, le coefficient de leur frottement, la distance du point choqué H à l'axe de rotation I, la masse de la tête et du manche rapportée à ce point;

N, N', les intensités des chocs du hérisson contre le pignon, et de la came contre le manche du marteau;

M_1, R_1, la masse liquide contenue dans la roue hydraulique, et la distance de l'axe de rotation AB au

centre de gravité d'une section faite dans cette masse par un plan méridien.

Les deux forces qui agissent sur l'axe du marteau pendant le choc d'une came (219) sont encore ici N' et $\omega'' lm''$; mais comme elles s'exercent eu sens contraires et du même côté par rapport à cet axe, il éprouve une percussion égale à $N' - \omega'' lm''$. Il s'ensuit que, dans le cas où l'on aura $N' = \omega'' lm''$, l'axe du marteau ne subira aucun choc. Or, l'équation $N'R'' = \omega'' M'' R''^2$ devient alors $R'' \omega'' lm'' = \omega'' M'' R''^2$, et donne

$$R'' = \frac{M'' R''^2}{lm''} = \frac{\int r''^2 dm''}{lm''}.$$

Il faut donc, pour rendre l'axe du marteau exempt de choc, placer la bague de manière que la distance R'' de son milieu à cet axe égale le quotient du moment d'inertie divisé par le moment de la masse rapportée à son centre de gravité.

Mais supposons le cas le plus général, c'est-à-dire celui où l'axe de rotation du marteau éprouve un choc en même temps que chaque came. L'équilibre autour de cet axe donne, comme dans le martinet, au signe près de $\omega'' lm''$,

$$N'R'' = \omega'' M'' R''^2 + f_2' \rho'' (N' - \omega'' lm'').$$

Le grand poids du marteau rendant la percussion N' trop forte pour que le frottement des tourillons puisse être négligé, il s'ensuit

$$N' = \frac{\omega''(M'' R''^2 - f_2' \rho'' lm'')}{R'' - f_2' \rho''}.$$

Au moment où s'opère de haut en bas, sur la came, la percussion N', le pignon, éprouvant un temps d'arrêt.

est choqué par le hérisson de haut en bas aussi, et la percussion de l'arbre des cames vaut $N+N'$, car ces deux forces, parallèles et de même sens, peuvent être regardées comme simultanées. De là résulte pour les tourillons du même arbre un frottement dont le moment relatif à l'axe CD est $f_1'\rho'(N+N')$. D'ailleurs, le choc N' de la came contre le manche du marteau provient évidemment de la quantité de mouvement $(\Omega'-\omega')\int r'dm'$ que perd l'arbre CD, et du choc N produit par le hérisson. Si donc R'_1 désigne le rayon du pignon, l'équilibre autour de l'axe CD donne

$$NR_1' + (\Omega'-\omega')M'R'^2 = N'R' + f_1'\rho'(N+N'),$$

puis

$$N = \frac{N'(R'+f_1'\rho') - (\Omega'-\omega')M'R'^2}{R_1'-f_1'\rho'}.$$

La quantité de mouvement perdue par la masse élémentaire dm du système hydraulique est $r(\Omega-\omega)dm$; la perte de la masse entière m vaut $(\Omega-\omega)\int rdm$, et celle de la masse liquide M_1, supposée concentrée à son centre de gravité, égale $R_1(\Omega-\omega)M_1$. La somme de ces deux pertes cause l'intensité N de la percussion du hérisson; mais la seconde seule occasionne, avec la réaction N du pignon, un choc sur l'axe AB. Ces deux dernières forces pouvant être considérées comme parallèles et de sens contraires, produisent sur les tourillons de l'arbre hydraulique un frottement $f'[R_1(\Omega-\omega)M_1-N]$. D'un autre côté, un frottement des dents résulte de N. Si a désigne le nombre de celles du hérisson, et b le nombre de celles du pignon, ce frottement (57) vaut $\pi f N\frac{a+b}{ab}$. On a donc, pour l'équilibre autour de l'axe AB,

$$(\Omega-\omega)(\int r^2dm+M_1R_1^2) = NR+\pi fRN\frac{a+b}{ab}+f'\rho[R_1(\Omega-\omega)M_1-N],$$

ou bien

$$(\Omega-\omega)(MR^2+M_1R_1^2-f'\rho M_1R_1)=NR\left(1+\pi f\frac{a+b}{ab}-\frac{f'\rho}{R}\right). \quad \text{(I)}$$

Mais, comme dans le martinet, $\omega''=\frac{R'}{R''}\omega'$, et parce que les deux points en contact dans l'engrenage ont la même vitesse absolue, $R\Omega=R'_1\Omega'$, $R\omega=R'_1\omega'$, ce qui donne

$$\Omega'=\frac{R}{R_1'}\Omega, \quad \omega'=\frac{R}{R_1'}\omega, \quad \Omega'-\omega'=\frac{R}{R_1'}(\Omega-\omega),$$

$$\omega''=\frac{RR'}{R_1'R''}\omega.$$

Ces relations changent la valeur de N' et celle de N en

$$N'=\frac{RR'\omega(M''R''^2-f_2'\rho''lm'')}{R_1'R''(R''-f_2'\rho'')}, \quad \text{(II)}$$

$$N=\frac{R_1'N'(R'+f_1'\rho')-R(\Omega-\omega)M'R'^2}{R_1'(R_1'-f_1'\rho')}. \quad \text{(III)}$$

La première de ces valeurs substituée dans la seconde en rendrait tous les termes fonction de Ω ou de ω. La dernière substituée ensuite dans l'équation d'équilibre autour de AB, en rendrait aussi tous les termes fonction des mêmes vitesses angulaires. Cette équation d'équilibre (I) se réduit donc au fond à $\Omega=A\omega$, A désignant un nombre plus grand que l'unité. Or, on peut poser $\frac{\Omega+\omega}{2}=\Omega_1$, et il en résulte $\Omega=\frac{2A\Omega_1}{A+1}$, $\omega=\frac{2\Omega_1}{A+1}$.

Alors il est possible de déterminer la perte de quantité d'action due aux chocs. On voit d'abord que la masse élémentaire dm possédait, avant la percussion

du hérisson, la quantité d'action $\frac{r^2\Omega^2 dm}{2}$, et qu'après il lui reste seulement $\frac{r^2\omega^2 dm}{2}$. La masse entière m avait donc une quantité d'action $\frac{\Omega^2}{2}\int r^2 dm = \frac{\Omega^2 MR^2}{2}$; il ne lui reste plus que

$$\frac{\omega^2}{2}\int r^2 dm = \frac{\omega^2 MR^2}{2}, \text{ et sa perte est } \frac{MR^2}{2}(\Omega^2 - \omega^2).$$

La masse liquide M_1 possédait, avant le choc, une quantité d'action $\frac{R_1{}^2\Omega^2 M_1}{2}$; il lui reste $\frac{R_1{}^2\omega^2 M_1}{2}$, et sa perte est $\frac{M_1 R_1{}^2}{2}(\Omega^2 - \omega^2)$.

Par conséquent, le système hydraulique éprouve une perte

$$\frac{MR^2 + M_1R_1^2}{2}(\Omega^2 - \omega^2) = \frac{MR^2 + M_1R_1^2}{2} \times \frac{4A^2\Omega_1^2 - 4\Omega_1^2}{(A+1)^2} = \frac{MR^2 + M_1R_1^2}{2} \times \frac{4\Omega_1^2(A^2-1)}{(A+1)^2}.$$

Nous avons trouvé (219), pour la perte de quantité d'action que cause le choc à l'arbre des cames,

$$\frac{M'R'^2}{2}(\Omega'^2 - \omega'^2),$$

et la substitution des valeurs de Ω', ω' change cette expression en cette autre

$$\frac{M'R'^2}{2}\left(\frac{R^2}{R_1'^2}\Omega^2 - \frac{R^2}{R_1'^2}\omega^2\right) = \frac{M'R'^2R^2}{2R_1'^2} \times \frac{4A^2\Omega_1^2 - 4\Omega_1^2}{(A+1)^2} = \frac{M'R'^2R^2}{2R_1'^2} \times \frac{4\Omega_1^2(A^2-1)}{(A+1)^2}.$$

Les chocs consomment donc à chaque ascension du marteau une quantité d'action

$$\left(\frac{MR^2 + M_1R_1^2}{2} + \frac{M'R'^2R^2}{2R_1'^2}\right)4\Omega_1^2\frac{A^2 - 1}{(A+1)^2}$$

Or, la roue hydraulique faisant par seconde un nombre de tours $\frac{n'}{60}$, en occasionne un nombre $\frac{n'R}{60R'_1}$ au pignon, et le nombre des cames qui heurtent, ou le nombre des coups que frappe le marteau dans le même temps, est $\frac{nn'R}{60R'_1}$. Par conséquent, la quantité d'action que la machine consomme en totalité pour les chocs,

$$T' = \frac{nn'R}{60R_1'}\left(\frac{MR^2 + M_1R_1^2}{2} + \frac{M'R'^2R^2}{2R_1'^2}\right)4\Omega_1^2\frac{A^2 - 1}{(A+1)^2}.$$

225. Notre sujet d'application sera un marteau à soulèvement dont nous puiserons les données dans un projet fait par M. le capitaine Virlet.

La vitesse de la roue est 2^m, et son rayon

$$R_2 = 2^m,75, \quad \rho = \rho' = 0^m,05, \quad f = f' = f_1' = 0,14,$$
$$R = 1^m,8, \quad R' = 0^m,75, \quad R'' = 1^m,87, \quad R_1 = 2^m,58,$$
$$R'_1 = 0^m,5, \quad a = 134, \quad b = 37,$$

le marteau frappe 100 coups par minute,

$$l = 1^m,78, \quad P'' = 639^{kg},7, \quad M'' = 61,68, \quad M_1 = 50,$$
$$M''R''^2 = 215,689, \quad MR^2 = 3507, \quad M'R'^2 = 676,56,$$

compris le volant monté sur l'arbre des cames. Ces moments d'inertie ont été calculés au moyen des formules propres aux prismes, aux roues et aux cylindres.

Examinons d'abord si l'axe du marteau éprouve ou

non un choc, c'est-à-dire si la condition $R'' = \frac{M''R'^2}{Im''}$ est satisfaite. Il faut que $\frac{61,68 \times 1,87}{1,78 \times 639,7 : 9,81} = 1$. Or, le premier membre donne plus de 0,99. On peut donc regarder le choc comme nul, et supprimer, dans l'équation (II), les termes relatifs au frottement des tourillons du marteau. Il en résulte

$$N' = \frac{RR'M''}{R_1'}\omega = \frac{1^m,8 \times 0^m,75 \times 61,68}{0^m,5}\omega = 166,536\omega.$$

L'équation (III) fournit ensuite

$$N = \frac{0^m,5 \times 166,536\omega(0^m,75 - 0,14 \times 0^m,05) - 1^m,8(\Omega - \omega)676,56}{0^m,5\,(0^m,5 - 0,14 \times 0^m,05)} =$$

$$\frac{61,868\omega - 1217,808\Omega + 1217,808\omega}{0,2465} = \frac{1279,676\omega - 1217,808\Omega}{0,2465} =$$

$$5191,38\omega - 4940,398\Omega.$$

Substituant dans l'équation (I), on a

$$(\Omega - \omega)\,[3507 + 50\,(2^m,58)^2 - 0,14 \times 0^m,5 \times 50 \times 2^m,58] =$$

$$(5191,38\omega - 4940,398\Omega)\,1^m,8\left(1 + 3,1416 \times 0,14\,\frac{134+37}{134 \times 37} - \frac{0,14 \times 0^m,05}{1^m,8}\right),$$

puis

$$3838,917\,\Omega - 3838,917\omega = 9448,312\omega - 8991,524\,\Omega,$$

$$12\,830,441\,\Omega = 13\,287,229\omega, \qquad \Omega = 1,036\omega, \qquad A = 1,036.$$

D'ailleurs, il est évident que la vitesse angulaire moyenne de la roue hydraulique

$$\Omega_1 = \frac{v}{R_2} = \frac{2^m}{2^m,75} = 0,73.$$

On a donc enfin

$$T' = \frac{100}{60}\left[\frac{3507+50(2^{m},58)^2}{2}+\frac{676,56\,(1^{m},8)^2}{2\,(0^{m},5)^2}\right]4(0,73)^2\frac{(1,036)^2-1}{(1,036+1)^2} =$$

$$\frac{100}{60}\,(1949,91+4384,109)\,0,0377 = \frac{630401,9\times 0,0377}{60} = 396^{k},103,$$

et il s'ensuit que les chocs exigent seuls un nombre de chevaux égal à 5,28.

VOLANTS.

226. Si la masse d'un marteau était fort grande, comme il arrive souvent à celle d'un frontal, le choc des cames pourrait consommer une telle partie de la force-vive du moteur, basée sur l'effort moyen, qu'il n'en restât plus assez pour produire l'ascension, ou bien cette ascension et le choc réduiraient tellement la vitesse, qu'on n'aurait plus qu'un petit nombre de coups par minute. Pour rendre la machine exempte de ces graves défauts, on doit alors y ajouter une pièce nommée *volant*, qui, absorbant l'excès de la force-vive dans les intervalles des chocs, et le restituant au moment où chacun de ces chocs tend à diminuer la vitesse, rende le mouvement sinon uniforme, du moins peu varié. Mais la pièce ajoutée doit évidemment, pour produire un pareil effet, posséder un moment d'inertie qui soit dans un certain rapport avec ceux des diverses autres parties de la machine.

Le volant a ordinairement la forme d'une roue de voiture; sa couronne est toujours en fonte; ses rais ou *bras*, peu nombreux, sont en fonte ou en bois, et le diamètre est grand, pour que le moment d'inertie puisse avoir la valeur nécessaire, sans exiger une très-forte masse; car plus un volant est pesant, plus il coûte cher,

et plus le frottement de ses tourillons consomme de quantité d'action en pure perte.

227. Le martinet mu par une petite roue hydraulique a parfois besoin d'un volant. La relation des moments d'inertie de cette pièce et des autres dérive de l'équation $(\Omega'-\omega')M'=\omega'M'$, trouvée au n.° 219, qui donne $(\Omega'-\omega')M'R'^2=\omega'M''R'^2$.

Comme le volant a pour but d'empêcher que la diminution de vitesse causée par le choc ne surpasse une certaine fraction $\frac{1}{k}$ de la vitesse moyenne Ω_1, on doit avoir $\Omega'-\omega'=\frac{\Omega_1}{k}$, et parce que $\Omega_1=\frac{\Omega'+\omega'}{2}$,

$$\omega'=\Omega_1-\frac{\Omega_1}{2k}=\Omega_1\left(1-\frac{1}{2k}\right).$$

Il s'ensuit

$$\frac{\Omega_1}{k}M'R'^2=\Omega_1\left(1-\frac{1}{2k}\right)M''R'^2,\quad \text{puis}\quad M'R'^2=(k-0{,}5)M''R'^2.$$

Si cette équation est satisfaite par la valeur du moment d'inertie $M'R'^2$ du système hydraulique, la machine n'a pas besoin de volant : les masses rotatives suffisent pour empêcher les variations de vitesse de dépasser $\frac{\Omega_1}{k}$. Lorsqu'on a $M'R'^2>(k-0{,}5)M''R'^2$, k prend une valeur supérieure à celle qui a été fixée, et la variation de vitesse devient moindre que celle qui pouvait avoir lieu sans inconvénient. Mais, quand on a $M'R'^2<(k-0{,}5)M''R'^2$, il faut monter sur l'arbre un volant dont le moment d'inertie Y soit tel que $Y+M'R'^2=(k-0{,}5)M''R'^2$. Par conséquent, $Y=(k-0{,}5)M''R'^2-M'R'^2$.

228. Mais c'est rarement sur l'arbre hydraulique d'un martinet que se place le volant : y recevant peu de vi-

tesse, il aurait souvent besoin, pour acquérir une force-vive suffisante, d'un poids qui augmenterait par trop la charge des tourillons, leur rayon et leur frottement. On lui donne un arbre particulier F (P. III, F. 25), qu'un engrenage H relie à celui C de la roue hydraulique, et alors son moment d'inertie diffère, comme on va le voir, de la valeur Y trouvée ci-dessus.

L'équation $(\Omega'-\omega')M'R'^2=\omega'M''R'^2$ est, pour le choc, la condition de l'équilibre autour de l'axe C, quand les frottements du martinet sont négligés (219). Mais au moment où la rotation du hérisson I se ralentit brusquement, cette pièce éprouve, de la part du pignon K, une percussion N'' qui en répare partiellement la perte de vitesse, et dont le moment est $N''R_1'''$, si R_1''' désigne le rayon de la circonférence primitive du hérisson. La condition d'équilibre devient donc, dans le cas du volant à engrenage, $(\Omega'-\omega')M'R'^2+N''R_1'''=\omega'M''R'^2$.

Soient Ω''', ω''', les vitesses angulaires de l'arbre F avant et après le choc; M''', la somme de sa masse, de celle du pignon et de celle du volant L, rapportée en H; R''', le rayon de la circonférence primitive de K. La masse élémentaire dm''', située à la distance r''' de l'axe F, perd, par suite du choc de l'engrenage, une quantité de mouvement $r'''(\Omega'''-\omega''')dm'''$; celle que perd la masse entière m''' est $(\Omega'''-\omega''')\int r'''dm'''$, et nécessairement $N''R'''=(\Omega'''-\omega''')\int r'''^2dm'''$.

Mais

$$R'''\Omega'''=R_1'''\Omega',\ R'''\omega'''=R_1'''\omega',\ \Omega'''-\omega'''=\frac{R_1'''}{R'''}(\Omega'-\omega').$$

Par conséquent,

$$N''=\frac{R_1'''}{R'''}(\Omega'-\omega')M'''R''',$$

$$(\Omega'-\omega')M'R'^2+(\Omega'-\omega')M'''R_1'''^2=\omega'M''R'^2,$$

$$\frac{1}{k}M'R'^2+\frac{1}{k}M'''R_1'''^2=\left(1-\frac{1}{2k}\right)M''R'^2,$$

$$M'''=\frac{(k-0,5)M''R'^2-M'R'^2}{R_1'''^2}.$$

et $$M'''R'''^2=\frac{R'''^2}{R_1'''^2}[(k-0,5)M''R'^2-M'R'^2].$$

Ainsi, le moment d'inertie $M'''R'''^2$ du système que forment le volant à engrenage et ses dépendances égale le moment d'inertie Y du volant nécessaire à l'arbre hydraulique, multiplié par le quarré du rapport qui existe entre le rayon du pignon et celui du hérisson.

Ayant $M'''R'''^2$, il suffira d'en retrancher la somme des moments d'inertie de l'arbre F et du pignon K, pour obtenir le moment Y' du volant L.

229. M. Poncelet a donné, pour calculer le moment d'inertie d'un volant, la formule approximative

$$Y=\frac{7200}{9,81}(\pi Del+0,525V)\frac{D^2}{4},$$

dans laquelle 7200 est le poids en kilogrammes du mètre cube de fonte, D le diamètre moyen de la couronne, *e* son épaisseur, *l* sa largeur prise parallèlement à l'axe de rotation, V le volume des bras en mètres cubes. La longueur de ces bras doit être supposée égale à $\frac{D}{2}$, attendu que le moyeu est négligé, comme ayant peu d'influence sur la force-vive du volant.

Connaissant Y et fixant D d'après la localité, on peut, à l'aide de la formule et de quelques tâtonnements, déterminer convenablement *e*, *l* et les deux autres dimensions des bras.

230. Nous négligerons aussi les frottements des gros marteaux, pour chercher le moment d'inertie du volant nécessaire à ces machines. L'équation (II) du n.° 224 devient alors $N'=\frac{RR'\omega}{R'_1R''^2}M''R''^2$ ou $N'=\omega'M''R'$, à cause de $\omega=\frac{R'_1}{R}\omega'$, ou encore $N'R'=\omega'M''R'^2$.

La première valeur de N du même numéro donne

$$NR'_1+(\Omega'-\omega')M'R'^2=N'R',$$

et par suite

$$NR'_1+(\Omega'-\omega')M'R'^2=\omega'M''R'^2.$$

Enfin, l'équation (I) se change en cette autre

$$(\Omega-\omega)(MR^2+M_1R_1^2)=NR,$$

et à cause de $\Omega-\omega=\frac{R'_1}{R}(\Omega'-\omega')$, on en déduit

$$\frac{R'_1}{R}(\Omega'-\omega')(MR^2+M_1R_1^2)=NR,$$

puis

$$NR'_1=\frac{R'^2_1}{R^2}(\Omega'-\omega')(MR^2+M_1R_1^2).$$

Donc,

$$(\Omega'-\omega')\left[M'R'^2+(MR^2+M_1R_1^2)\frac{R'^2_1}{R^2}\right]=\omega'M''R'^2.$$

Remplaçant $\Omega-\omega'$ et ω' par leurs valeurs en fonction de k et de Ω_1, on obtient

$$\frac{1}{k}\left[M'R'^2+(MR^2+M_1R_1^2)\frac{R'^2_1}{R^2}\right]=\left(1-\frac{1}{2k}\right)M''R'^2,$$

puis

$$M'R'^2+(MR^2+M_1R_1^2)\frac{R'^2_1}{R^2}=(k-0,5)M''R'^2. \qquad \text{(IV)}$$

Lorsque les valeurs des masses rotatives et des rayons du premier membre le rendent inférieur au second, il faut monter sur l'arbre des cames un volant dont le moment d'inertie Y_1 soit tel que

$$Y_1 + M'R'^2 + (MR^2 + M_1R_1^2)\frac{R_1'^2}{R^2} = (k - 0,5)M''R'^2.$$

Par conséquent,

$$Y_1 = (k - 0,5)M''R'^2 - M'R'^2 - (MR^2 + M_1R_1^2)\frac{R_1'^2}{R^2}.$$

231. Quant au volant à engrenage, il est visible, d'après le n.° 228, que le moment d'inertie de son système, $M'''R'''^2 = \frac{R'''^2}{R_1'''^2}Y_1$.

S'il pouvait y avoir le moindre doute, on reprendrait l'équation de l'équilibre autour de l'axe des cames, trouvée dans le n.° précédent,

$$(\Omega' - \omega')[M'R'^2 + \frac{R_1'^2}{R^2}(MR^2 + M_1R_1^2)] = \omega'M''R'^2.$$

Le choc N'' du pignon contre le hérisson donnerait

$$(\Omega' - \omega')[M'R'^2 + \frac{R_1'^2}{R^2}(MR^2 + M_1R_1^2)] + N''R_1''' = \omega'M''R'^2.$$

On trouverait encore $N'' = \frac{R_1'''}{R'''}(\Omega' - \omega')M'''R'''$, et la substitution de cette valeur, ainsi que celle des valeurs de $\Omega' - \omega'$ et de ω', conduiraient nécessairement à

$$M''' = \frac{(k - 0,5)M''R'^2 - M'R'^2 - \frac{R_1'^2}{R^2}(MR^2 + M'R_1^2)}{R_1'''^2}.$$

232. Si nous voulons appliquer la formule de Y_1 à

la détermination du volant nécessaire au gros marteau du n.° 225, il faut, avant tout, ôter de la valeur 676,56 attribuée à $M'R'^2$ le moment d'inertie de ce volant, ou prendre seulement pour $M'R'^2$ la somme des moments d'inertie des cames, de leur arbre et du pignon qu'il porte. Cette somme est 68,37, d'après le mémoire de M. Virlet.

On a donc

$$Y_1 = 19,5 \times 61,68(0,75)^2 - 68,37 - [3507 + 50(2,58)^2]\frac{(0,5)^2}{(1,8)^2} = 311,903,$$

tandis que le moment d'inertie du volant adopté dans le mémoire vaut $676,56 - 68,37 = 608,19$, presque le double. Ce désaccord vient de ce que le dernier nombre est la valeur de Y (227) et non celle de Y_1 : on a négligé la masse de l'arbre hydraulique, de la roue, du hérisson, et celle du liquide contenu dans les augets.

Aussi, la variation de la vitesse n'est-elle pas en réalité de $^1/_{20}$, comme elle a été supposée et comme la donnerait notre volant, car nous avons trouvé (225), en tenant compte des résistances accessoires, $A = 1,036$; il résulte du n.° 224 :

$$\Omega = \frac{2 \times 1,036}{2,036}\Omega_1 = 1,01768\Omega_1, \quad \omega = \frac{2}{2,036}\Omega_1 = 0,9823\Omega_1,$$

et par conséquent,

$$\Omega - \omega = 0,03538\Omega_1 = \tfrac{1}{28,25}\Omega_1.$$

La valeur 28,25 que les frottements donnent à k nous permet d'apprécier leur influence sur la variation de la vitesse. En effet, les données du n.° 225 substituées dans l'équation (IV), indépendante des résistances accessoires, fournissent

$$676,56 + (3507 + 332,82)\frac{0,25}{3,24} = (k - 0,5)61,68 \times 0,5625,$$

puis $k - 0,5 = 28,04$ et $k = 28,54.$

La vitesse varierait donc un peu moins si les frottements étaient nuls, et l'on conçoit que cela doit être, puisqu'ils augmentent l'intensité des chocs. Mais la différence des deux fractions $\frac{1}{28,25}$, $\frac{1}{28,54}$, étant seulement 0,000 37, il est bien permis de négliger les résistances accessoires dans le calcul du moment d'inertie à donner au volant.

MOULINS A POUDRE.

233. Le moulin à poudre a une seule batterie ou deux batteries. Dans le premier cas, l'arbre de la roue hydraulique porte des cames qui soulèvent successivement des pilons placés sur un seul rang. Deux cames diamétralement opposées répondent au même pilon, et les axes des divers couples de cames divisent la circonférence de l'arbre en autant de parties égales que l'indique le double du nombre des pilons. Par suite de ces dispositions, chaque pilon est soulevé deux fois par tour, et l'arbre est toujours également chargé. Du reste, les cames sont simplement des prismes rectangles arrondis à leur extrémité libre; elles pressent, par dessous et en glissant, d'autres prismes rectangles, appelés *mentonnets,* qui sont implantés dans les tiges des pilons. Enfin, ces opérateurs ne peuvent recevoir qu'un mouvement rectiligne et vertical du mouvement circulaire des cames, attendu que leurs tiges se trouvent emprisonnées dans deux moises fixes, composées chacune de deux pièces de bois parallèles à l'axe de l'arbre.

Dans les moulins à deux batteries, l'arbre A de la roue hydraulique (P. III, F. 24) porte un hérisson qui engrène avec deux lanternes montées sur des arbres à cames C, C', et chacun de ces arbres soulève une rangée de pilons.

234. C'est du dernier cas que nous nous occuperons, en suivant la marche adoptée pour les marteaux hydrauliques, c'est-à-dire en faisant d'abord abstraction des chocs, pour déterminer à part la quantité d'action qu'ils consomment.

Soient Q l'effort moyen du moteur sur la roue, le mouvement étant supposé uniforme, α l'angle formé sur l'horizontale par la direction de cet effort, P le poids de tout l'équipage hydraulique, le hérisson compris, ρ le rayon des tourillons, et f' le coefficient du frottement circulaire.

L'effort Q a deux composantes, l'une horizontale $Q\cos\alpha$, l'autre verticale $Q\sin\alpha$. Ces deux forces, combinées avec le poids P, donnent une force unique

$$\sqrt{(Q\sin\alpha + P)^2 + Q^2\cos^2\alpha},$$

qui presse les tourillons et produit un frottement dont le moment est

$$\rho f'\sqrt{(Q\sin\alpha+P)^2+Q^2\cos^2\alpha} = \rho f'\{0,96(Q\sin\alpha+P)+0,4Q\cos\alpha\}.$$

La puissance doit faire équilibre, autour de l'axe A, à ce frottement et aux deux résistances q qu'opposent aux dents du hérisson les fuseaux des deux lanternes. Si donc R est le rayon primitif du hérisson, et R_2 la distance de A au milieu de l'aube,

$$QR_2 = 2qR + f'\rho[0,96(Q\sin\alpha + P) + 0,4Q\cos\alpha],$$

et

$$Q = \frac{2qR + 0{,}96f'\rho P}{R_2 - f'\rho\,(0{,}96\sin\alpha + 0{,}4\cos\alpha)}.$$

La résistance q a deux parties : la pression q' qu'exerce le fuseau contre la dent du hérisson, et le frottement d'engrenage qui résulte de cette pression. Désignons par a le nombre des dents, par b celui des fuseaux, et par f le coefficient du frottement de glissement ; la seconde partie (120) vaut $\pi f q' \frac{a+b}{ab}$, et

$$q = q'\left(1 + \pi f \frac{a+b}{ab}\right).$$

Pour chaque arbre à cames, la pression q' de la dent sur le fuseau forme une puissance dont le bras de levier est R'_1, rayon primitif des lanternes. Les résistances sont le frottement des tourillons de l'arbre et la réaction q_1 que le mentonnet exerce sur la came, perpendiculairement à la droite BC, dont la longueur moyenne sera représentée par R'. Si l'on suppose q_1 parallèle à q', pour simplifier tout en augmentant un peu les résistances accessoires, et si P' désigne le poids d'un arbre à cames, le moment du frottement des tourillons C est

$$f_1'\rho'(P' + q_1 + q'),$$

tandis que celui du frottement des tourillons C′ vaut seulement

$$f_1'\rho'(P' + q_1 - q').$$

Leur moyenne donne donc $f_1'\rho'(P' + q_1)$, et l'équilibre autour de l'un des axes C, C′, conduit à

$$q'R_1' = q_1R' + f_1'\rho'(P' + q_1),$$

d'où résulte

$$q' = \frac{q_1(R' + f_1'\rho') + f_1'\rho'P'}{R_1'}.$$

La pression tangentielle q_1 de la came sur le mentonnet produit la pression verticale q'_1 qui agit au contact B de bas en haut, et celle-ci donne lieu à un frottement de glissement $f_1 q'_1$. Soit θ l'arc de rayon 1 que parcourt la droite BC pendant l'ascension du pilon. Le chemin circulaire de q_1 pour le même temps est $R'\theta$; le chemin vertical de q'_1 est $R' \sin\theta$, parce que BC a une position horizontale au moment où la came saisit le pilon, et le chemin horizontal de $f_1 q'_1$ vaut $R'(1-\cos\theta)$, attendu que ce frottement, ayant lieu sur la face inférieure du mentonnet, s'exerce le long du sinus-verse de l'arc $R'\theta$ durant l'ascension. L'égalité des quantités d'action donne donc

$$q_1 R'\theta = q_1' R' \sin\theta + f_1 q_1' R' (1 - \cos\theta),$$

puis

$$q_1 = q_1' \frac{\sin\theta + f_1(1-\cos\theta)}{\theta}.$$

L'effort q'_1 de la came soulève le poids P″ du pilon, et tend à le faire tourner de droite à gauche autour du point d'appui que présente la moise inférieure, de gauche à droite autour du point d'appui qu'offre la moise supérieure. C'est la réaction horizontale p de la seconde moise qui empêche le premier mouvement, et c'est celle p' de la première moise qui s'oppose au second. Soient l la distance des milieux des deux moises, et d la moyenne des distances du contact B à la tige du pilon. On doit avoir $q'_1 d = pl$, $q'_1 d = p'l$, et par conséquent, $p = p' = \frac{q'_1 d}{l}$. Comme chacune de ces pressions horizontales produit un frottement vertical $f_2 \frac{q_1' d}{l}$,

$$q_1' = P'' + 2 f_2 \frac{q_1' d}{l}, \quad \text{ou bien} \quad q_1' = \frac{P'' l}{l - 2 f_2 d}.$$

Mais, pour que Q soit relatif à tous les pilons élevés à la fois dans les deux batteries, il faut que les efforts q, q', q_1, se rapportent chacun au nombre n_1 des pilons élevés à la fois dans une seule batterie. C'est donc $n_1\frac{P''l}{l-2f_2d}$ qu'on doit substituer à la place de q'_1 dans la valeur de q_1. Par suite,

$$q_1=\frac{n_1P''l\,[\sin\theta+f_1\,(1-\cos\theta)]}{(l-2f_2d)\theta}.$$

Si le mentonnet était abandonné par la came à l'instant même où l'ascension se termine, le nombre n_1 serait le rapport de l'arc $R'\theta$ et de l'arc qui sépare les extrémités des cames. Mais, parce qu'on est obligé de donner au mentonnet assez de longueur pour que le ventre de la came s'y applique au commencement de l'ascension, le bout arrondi B glisse encore pendant quelques instants sur la face inférieure, ou bien la came reste encore chargée du pilon, après que l'arc $R'\theta$ a été parcouru. Par conséquent, le nombre n_1 est en réalité plus grand que le rapport des arcs, et il faut, pour le trouver, observer le jeu de la machine.

Une fois que l'effort moyen Q du moteur est déterminé indépendamment des chocs, on obtient la quantité d'action qu'exigerait le mouvement uniforme pendant 1″, au moyen de l'équation

$$T=\frac{n'}{60}\,2\pi R_2Q\,,$$

dans laquelle n' est le nombre de tours fait en 1′ par la roue hydraulique.

235. Quant à la quantité d'action consommée par les chocs, nous la déterminerons en procédant absolument

comme pour les marteaux à engrenage, après avoir toutefois modifié convenablement les équations nécessaires (224).

Les termes relatifs au frottement des tourillons de l'opérateur doivent être supprimés dans l'équation (II), puisque les pilons n'ont point de rotation. Il vient alors, pour l'intensité du choc d'une seule came contre un mentonnet,

$$N' = \frac{RR'\omega M''}{R_1'},$$

formule dans laquelle ω est la vitesse angulaire de l'arbre hydraulique après le choc, et M'', masse de l'opérateur rapportée au point choqué B, représente le quotient du poids que doit élever la came, divisé par la gravité, c'est-à-dire $\frac{P''l}{g(l-2f_2d)}$.

L'équation (III), qui donne l'intensité du choc d'une dent contre un fuseau, devient alors

$$N = \frac{RR'\omega M''(R' + f_1'\rho') - R(\Omega - \omega)M'R'^2}{R_1'(R_1' - f_1'\rho')},$$

Ω étant la vitesse angulaire de l'arbre hydraulique avant le choc, et $M'R'^2$ le moment d'inertie de l'arbre des cames joint à tout ce qu'il porte.

Dans l'équation (I), $M_1 = 0$, parce que ordinairement la roue motrice reçoit l'eau en dessous, et le choc N d'une dent de l'engrenage doit être remplacé par 2N, attendu qu'il a lieu dans les deux batteries. Mais les deux forces N, égales et parallèles, agissant en sens contraires, ne causent point de percussion à l'arbre hydraulique. Par suite, les tourillons n'éprouvent aucun frottement provenant du choc, $f' = 0$, et l'on a

$$(\Omega-\omega)MR^2=2NR\left(1+\pi f\frac{a+b}{ab}\right),$$

MR^2 représentant la somme des moments d'inertie de la roue hydraulique, du hérisson et de leur arbre commun.

La combinaison de cette équation avec la valeur de N donnera la relation $\Omega=A\omega$. Connaissant A, on calculera la quantité d'action consommée par le choc d'une seule came dans chaque batterie, au moyen de son expression (224)

$$\left(\frac{MR^2}{2}+\frac{M'R'^2R^2}{2R_1'^2}\right)4\Omega_1^2\frac{A^2-1}{(A+1)^2},$$

dans laquelle Ω_1 est la vitesse angulaire moyenne de la roue motrice. Enfin, si n désigne le nombre des cames d'une seule batterie, la quantité d'action consommée en totalité par les divers chocs dans chaque seconde,

$$T'=\frac{nn'R}{60R_1'}\left(\frac{MR^2}{2}+\frac{M'R'^2R^2}{2R_1'^2}\right)4\Omega_1^2\frac{A^2-1}{(A+1)^2}.$$

236. Le travail des pilons est facile à obtenir. Soit h la hauteur d'ascension; on a $P''h$ pour un seul, et il reste à multiplier ce nombre de kilogrammes-mètres par celui des pilons élevés en 1″. Or, les nombres de tours que font l'arbre hydraulique et un arbre à cames dans cette unité de temps, sont inversement proportionnels aux circonférences primitives du hérisson et d'une lanterne, ou aux nombres des dents et des fuseaux. Conséquemment, l'arbre à cames fait autant de tours par seconde que l'indique $\frac{n'a}{60b}$; les cames de chaque batterie qui passent pendant ce temps dans le plan ho-

rizontal des axes C, A, C', sont au nombre de $\frac{nn'a}{60b}$;

il y a $\frac{2nn'a}{60b}$ pilons élevés, et leur chute produit un travail total

$$T'' = \frac{2nn'a}{60b} P''h.$$

237. Dans le moulin à poudre qui existait autrefois à La Fére, et dont l'architecture hydraulique de Bélidor contient la description, la roue motrice est à aubes planes; elle fait 10 tours et demi par minute et reçoit l'eau en dessous; le coursier est si peu incliné que $\alpha = 0$ sensiblement;

$$R_2 = 2^m,56\,; \quad R = 1^m,3\,; \quad a = 48\,; \quad \rho = 0^m,02\,;$$
$$P = 1760^{kg}\,; \quad f' = 0,09\,; \quad f = 0,08\,;$$
$$R_1' = 0^m,54\,; \quad b = 20\,; \quad \rho' = 0^m,02\,; \quad R' = 0^m,54\,;$$

$n = 24$, ce qui répond à 12 pilons par batterie;

$$P' = 1470^{kg}\,; \quad f_1' = 0,09\,; \quad d = 0^m,2436\,;$$
$$l = 1^m,95\,; \quad P'' = 52^{kg},8\,; \quad f_1 = f_2 = 0,15\,;$$

l'arc θ est de 53° 19' ou de 53°,32 ; enfin $n_1 = 4$.

Il s'ensuit

$$\sin\theta = 0,802, \qquad \cos\theta = 0,597, \qquad \theta = \frac{2\pi}{360}\,53,32 = 0,9306,$$

$$q_1 = \frac{4 \times 52^{kg},8 \times 1^m,95[0,802 + 0,15(1 - 0,597)]}{(1^m,95 - 2 \times 0,15 \times 0^m,2436)0,9306} = 126^{kg},34,$$

$$q' = \frac{\overset{kg}{126,34}(0^m,54 + 0,09 \times 0^m,02) + 0,09 \times 0^m,02 \times \overset{kg}{1470}}{0^m,54} = \overset{kg}{131,66},$$

$$q = 131^{kg},66\left(1 + 3,1416 \times 0,08\,\frac{48 + 20}{48 \times 20}\right) = 134^{kg},$$

$$Q=\frac{2\times 134^{kg}\times 1^m,3+0,96\times 0,09\times 0^m,02\times 1760^{kg}}{2^m,56-0,09\times 0^m,02\times 0,4}=137^{kg},321,$$

et

$$T=\frac{10,5}{60}2\times 3,1416\times 2^m,56\times 137^{kg},321=386^k,541.$$

Il faut maintenant calculer le travail qu'exigent les chocs, et commencer par la détermination de N.

La masse

$$M''=\frac{P''l}{g(l-2f_2d)}=\frac{32^{kg},8\times 1^m,95}{9^m,81(1^m,95-2\times 0,15\times 0^m,2436)}=3,474.$$

Chaque arbre à cames est long de $7^m,544$; son rayon a $0^m,22$; le volume considéré comme cylindrique vaut $3,1416\times(0^m,22)^2\times 7^m,544=1^{mc},1163$. Le poids $=$ $981^{kg}\times 1,1163=1095^{kg},09$, parce que le mètre cube de chêne humide pèse 981^{kg}. La masse $=$

$$\frac{1095^{kg},09}{9,81}=111,63.$$

Le moment d'inèrtie pris par rapport à l'axe (97) est

$$0,5\,mr^2=0,5\times 111,63\,(0,22)^2=2,7.$$

Les cames peuvent être assimilées à des prismes rectangles : longueur, $0^m,35$; équarrissage, $0^m,11$ sur $0^m,18$; distance du centre de gravité à l'axe de l'arbre, $0^m,395$. Ainsi, le volume des 24 est

$$0^m,11\times 0^m,18\times 0^m,35\times 24=0^{mc},1663\,;$$

la masse $=16,63$, et le moment d'inertie relatif à l'axe de l'arbre (220),

$$m\left(\frac{a^2+a'^2}{12}+d^2\right)=16,63\left[\frac{(0,35)^2+(0,11)^2}{12}+(0,395)^2\right]=2,78.$$

parce que l'axe est parallèle au plus grand côté de l'équarrissage.

Les plateaux d'une lanterne ont ensemble $0^m,3$ d'épaisseur, et le rayon de chacun est $0^m,6$. Ainsi, le volume des deux $= 3,1416(0^m,6)^2 0,3 = 0^{mc},3393$; la masse $= 33,93$, et le moment d'inertie relatif à l'axe

$$0,5\, mr^2 = 0,5 \times 33,93(0,6)^2 = 6,11.$$

Le fuseau a $0^m,035$ de rayon et $0^m,36$ de longueur. Son volume $3,1416(0^m,035)^2 0^m,36 = 0^{mc},0014$. Comme le mètre cube de fonte pèse 7202^{kg}, la masse vaut

$$\frac{7202^{kg} \times 0,0014}{9^m,81} = 1,028;$$

et comme l'axe se trouve à $0^m,54$ de celui de l'arbre, le moment d'inertie relatif au second (97),

$$m(0,5r^2 + d^2) = 1,028[0,5(0,035)^2 + (0,54)^2] = 0,3004,$$

et celui des 20 fuseaux vaut $0,3004 \times 20 = 6$.

Par conséquent,

$$M'R'^2 = 2,7 + 2,78 + 6,11 + 6 = 17,59,$$

et

$$N = \frac{\overset{m}{1,3} \times \overset{m}{0,54} \times 3,474(\overset{m}{0,54} + 0,09 \times \overset{m}{0,02})\omega - \overset{m}{1,3} \times 17,59(\Omega - \omega)}{0^m,54\,(0^m,54 - 0,09 \times 0^m,02)} =$$

$$\frac{1,322\omega - 22,867\Omega + 22,867\omega}{0,2906} = \frac{24,189\omega - 22,867\Omega}{0,2906} = 83,238\omega - 78,688\Omega.$$

L'arbre bydraulique a 4^m de longueur et $0^m,3$ de rayon; son volume $3,1416\,(0^m,3)^2 4^m = 1^{mc},131$; sa masse est $113,1$, et son moment d'inertie

$$0,5 \times 113,1\,(0,3)^2 = 5,09.$$

Le rayon extérieur du hérisson est $1^m,18$, le rayon intérieur 1^m, la largeur parallèle à l'axe $0^m,15$. Le volume de la couronne

$$2\times 3,1416\,\frac{1^m,18+1^m}{2}\times 0^m,18\times 0^m,15=0^{mc},1849.$$

La masse $=18,49$. Le moment d'inertie

$$m\left[\left(\frac{r+r'}{2}\right)^2+\left(\frac{r-r'}{2}\right)^2\right]=18,49\left[\left(\frac{1^m,18+1^m}{2}\right)^2+\left(\frac{1^m,18-1^m}{2}\right)^2\right]=22,12.$$

Chaque bras du hérisson a $0^m,7$ de longueur et $0^m,15$ d'équarrissage. Le volume $=(0^m,15)^2 0^m,7=0^{mc},01575$. La masse $=1,575$. La distance du centre de gravité à l'axe de l'arbre vaut le rayon de cet arbre, plus la demi-longueur $0^m,7$; elle est donc $0^m,3+0^m,35=0^m,65$. Le moment d'inertie des 4 bras $=$

$$1,575\left[\frac{(0^m,7)^2+(0^m,15)^2}{12}+(0^m,65)^2\right]4=2,93.$$

Chacune des 24 aubes planes de la roue motrice a $0^m,4$ de largeur dans le sens du rayon, et le centre de gravité est à une distance $R_2=2^m,56$ de l'axe. Le volume, joint à celui des deux contreforts, vaut $0^{mc},011$. La masse $=1,1$. Négligeant le moment d'inertie relatif à la ligne-milieu parallèle à l'axe de la roue (97), on trouve, pour celui qui se rapporte à cet axe,

$$1,1(2^m,56)^2=7,201,$$

et pour celui des 24 aubes,

$$7,201\times 24=172,82.$$

Chaque couronne de la roue a extérieurement $2^m,36$ de rayon, intérieurement $2^m,2$. L'épaisseur parallèle à l'axe est $0^m,12$. Le volume

$$2\times 3,1416\,\frac{2^m,36+2^m,2}{2}\times 0^m,16\times 0^m,12=0^{mc},275.$$

La masse $= 27,5$. Le moment d'inertie égale

$$27,5\left[\left(\frac{2^m,36+2^m,2}{2}\right)^2+\left(\frac{2^m,36-2^m,2}{2}\right)^2\right]=143,1375,$$

et celui des deux couronnes vaut

$$143,1375 \times 2 = 286,275.$$

Chaque bras des couronnes a $1^m,9$ de longueur depuis l'arbre jusqu'à la jante, et $0^m,12$ d'équarrissage. Le volume $=(0^m,12)^2\,1^m,9=0^{mc},027$. La masse $=2,7$. La distance du centre de gravité à l'axe de l'arbre vaut la moitié de la longueur $1^m,9$, plus le rayon $0^m,3$ de cet arbre ; elle est donc $1^m,25$. Le moment d'inertie

$$=2,7\left[\frac{(1^m,9)^2+(0^m,12)^2}{12}+(1^m,25)^2\right]=5,034,$$

et celui des douze bras donne $5,034 \times 12 = 60,41$.

Ainsi, le moment d'inertie total du système hydraulique,

$$MR^2 = 5,09+22,12+2,93+172,82+286,275+60,41 = 549,645,$$

et

$$(\Omega-\omega)\,549,645=\left\{\begin{array}{l}2(83,238\omega-78,688\Omega)1^m,3\,(1+\\ \quad 3,1416\times 0,08\,\dfrac{48+20}{48\times 20}\Big).\end{array}\right.$$

Il s'ensuit

$$(\Omega-\omega)549,645 = 220,314\omega - 208,27\Omega,$$

$$757,915\Omega = 769,959\omega,\qquad \Omega=\frac{769,959}{757,915}\omega,\qquad A = 1,01589.$$

Or, la vitesse angulaire moyenne de l'arbre hydraulique

$$\Omega_1=\frac{n'}{60}2\pi=\frac{10,5}{60}2\times 3,1416 = 1,1$$

Par conséquent,

$$T' = \left\{ \frac{24 \times 10,5 \times 1^{m},3}{60 \times 0^{m},54} \left[\frac{549,645}{2} + \frac{17,59(1^{m},3)^2}{2(0^{m},54)^2} \right] \atop 4 \times (1,1)^2 \frac{(1,01589)^2 - 1}{(2,01589)^2} \right\} = 125^{k},674.$$

L'effort moyen que nécessite ce travail au centre des aubes,

$$Q' = \frac{T'}{\frac{n'}{60} 2\pi R_2} = \frac{125^{k},674 \times 60}{10,5 \times 2 \times 3,1416 \times 2^{m},56} = 44^{kg},65;$$

le travail total

$$T + T' = 386^{k},541 + 125^{k},674 = 512^{k},215;$$

le moulin exige 6,85 chevaux, et l'effort total de la roue, au milieu des aubes,

$$Q + Q' = 137^{kg},321 + 44^{kg},65 = 181^{kg},971.$$

Enfin, le travail des pilons

$$T'' = \frac{2 \times 24 \times 10,5 \times 48}{60 \times 20} 32^{kg},8 \times 0^{m},433 = 286^{k},32,$$

car $\quad h = R' \sin\theta = 0^{m},54 \sin 53° 19' = 0^{m},433.$

Ce travail utile forme donc au plus les 0,559 de celui qu'absorbe la machine; et comme les chocs, joints aux frottements qu'ils occasionnent, consomment les 0,245 du dernier, les autres frottements en dépensent à peu près les 0,196. Mais tous ces résultats supposent la machine en bon état, et toutes les parties frottantes enduites de graisse.

BOCARDS.

238. Le bocard est une machine à pilons qui sert soit à concasser le minerai, soit à broyer les scories dont on veut extraire la grenaille de fonte. Il a la plus grande analogie avec le moulin à poudre ; toutefois les cames sont portées par l'arbre de la roue hydraulique. La perte de quantité d'action occasionnée par chaque choc est donc $\Omega^2{}_1 M''R'^2$ comme pour le martinet (219), et la perte relative à 1″,

$$T' = \frac{nn'}{60}\,\Omega_1{}^2 M''R'^2.$$

SCIERIES.

Les scieries sont des machines dont l'opérateur présente une ou plusieurs scies, et qu'on emploie au débit des bois. Comme le débit peut se faire selon des plans ou selon des surfaces courbes, les scieries se partagent en deux classes. Chaque classe se diviso d'ailleurs en plusieurs espèces distinguées par la forme des scies employées.

SCIES.

239. Il existe en effet diverses sortes de scies : la *scie droite*, lame d'acier mince, rectangulaire, dentée, beaucoup plus longue que large ; la *scie sans fin*, lame dentée dont les deux bouts sont soudés ensemble, et qu'on tend de manière à produire un rectangle terminé par deux demi-cercles ; la *scie ronde*, disque circulaire denté à la circonférence et mobile autour d'un

axe fixe ; la *scie courbe*, lame dentée ployée en surface cylindrique circulaire. Cette dernière sert à former des surfaces annulaires ; mais son usage est trop peu répandu pour mériter plus qu'une simple mention.

Les scies droites reçoivent toutes un mouvement rectiligne alternatif ; les unes, comme celle des scieurs de long, ne coupent que selon l'une des deux directions ; les autres, comme celle du menuisier, coupent pendant chacune des deux oscillations contraires. Dans ce second cas, les dents forment des triangles isocèles ou équilatéraux dont les côtés saillants sont limés en biseaux (P. III, F. 25) ; mais pour les bois chanvreux, deux triangles consécutifs se trouvent séparés par deux petits arcs de cercles qui font un rentrant en se coupant (F. 26).

Dans le premier cas, chaque dent est un triangle rectangle qui présente en saillie son plus petit côté et son hypothénuse : c'est ce petit côté qui coupe ; sa longueur vaut à peu près le quart de l'hypothénuse (F. 27) ; mais son biseau tranchant ne doit prendre au plus que le tiers de cette longueur ; le reste forme un rentrant où se loge la sciure.

Lorsque le bois à débiter est chanvreux, les scieurs de long font usage de scies qui offrent des creux plus spacieux que les rentrants : ce sont des évidements arrondis (F. 28) pratiqués à la partie inférieure de chaque triangle, de manière à rendre la pointe plus aiguë, et alors la scie est *à crocs* ou *à crochets*. D'autres fois, on augmente les creux en séparant deux dents consécutives par un intervalle égal à la longueur de chacune, et alors la scie est *châtrée ;* mais l'intervalle ne présente pas une ligne droite : tantôt son arête est une courbe légèrement convexe (F. 29) ; tantôt elle est brisée, et forme une dent bien moins saillante que les autres (F. 30).

que ce bras prend une position verticale. De là suit que les changements de direction de la scie ne causent aucune perte de force-vive. Mais à cet avantage se joignent deux inconvénients : l'effort qu'exige l'opérateur varie avec la position de la manivelle, et dans les instants où la bielle est inclinée, sa puissance, qui se décompose, pousse horizontalement le châssis contre le fond des coulisses et y fait naître un frottement.

Quelques constructeurs atténuent le frottement du châssis en remplaçant les tenons par des roulettes ; d'autres substituent aux coulisses des rouleaux qui peuvent tourner sur des axes fixes et horizontaux. Ces rouleaux présentent des gorges à profil triangulaire (F. 2), dans lesquelles s'engagent les montants du châssis, taillés alors en prismes pentagonaux.

On diminue encore le frottement dû à la bielle en alongeant ce communicateur autant qu'il est possible. Il faut, à cet effet, mettre entre le châssis et l'arbre à manivelle toute la distance que permet la localité, et même attacher la bielle à l'entretoise supérieure A (F. 1).

243. Après avoir décrit sommairement le mécanisme d'une scierie à débit plan et à scies droites, nous devons en étudier d'une manière détaillée les parties principales.

La puissance du moteur permet souvent de monter plusieurs scies sur le même châssis. Deux lames consécutives sont alors écartées d'une quantité égale à l'épaisseur que doivent avoir les madriers ou les planches ; toutes les lames sont parallèles et également tendues. L'écartement nécessaire et le parallélisme s'obtiennent au moyen de prismes rectangles que traversent deux longues vis portées par les entretoises du châssis. La tension dépend de l'intervalle de ces entretoises, dont

l'une est mobile verticalement. On reconnait que les lames sont suffisamment tendues, au son qu'elles rendent.

Il importe qu'une scie remonte sans que les dents frottent sur le fond du trait. Pour remplir cette condition, on donne à la lame plus de largeur dans le haut que dans le bas; alors la droite des pointes des dents se rapproche en descendant de l'arête du dos, au lieu d'être parallèle à cette arête; il résulte même de là un autre avantage : les dents mordent successivement, et les inférieures ne font pas tout le travail.

244. On s'accorde généralement à croire un sciage rapide plus avantageux qu'un sciage lent, bien qu'il faille, dans la première circonstance, employer des scies à dents peu saillantes et rendre la pression assez faible. Mais la vitesse de l'opérateur a ici une limite qu'on ne saurait dépasser sans augmenter de beaucoup la quantité d'action consommée par les résistances accessoires, et partant, sans perdre d'un côté ce qu'on gagnerait de l'autre.

Bélidor a établi à l'arsenal de La Fère une scierie dont l'*équipage* pesait $268^{kg},5$, faisait 160 oscillations par minute, et parcourait $0^m,81$, soit en montant, soit en descendant. La vitesse verticale de la scie était donc

$$\frac{160}{60} \times 0^m,81 = 2^m,16.$$

A l'arsenal de Metz, l'équipage pèse environ 210^{kg}, fait 140 oscillations en $1'$, et parcourt dans chacune $0^m,73$; de sorte que sa vitesse est $\frac{140}{60} \times 0^m,73 = 1^m,7$.

Les scieries nouvelles, dont l'équipage a un grand poids, prennent une vitesse de $2^m,1$, qui répond à environ 156 oscillations de $0^m,81$ par minute.

En Allemagne, où l'équipage ne pèse guère que 50^{kg}, on peut, sans craindre de rendre les frottements trop grands, adopter une vitesse de 1^m,92 à 2^m,6. La scie fait alors par minute 240 oscillations de 0^m,48 à 0^m,65.

245. Les variations qui ont lieu dans la densité des couches ligneuses d'une pièce de bois font que la résistance principale ne peut rester la même pendant toute la durée d'un trait de scie. Il arrive donc souvent que le moteur est plus chargé en faisant monter le châssis qu'en le faisant descendre, ou que le contraire a lieu. Cette puissante cause d'irrégularité dans le mouvement oblige presque toujours à monter un volant sur l'un des arbres tournants d'une scierie.

M. Poncelet a donné une formule qui fait connaître le poids du volant nécessaire en fonction de la vitesse qu'on lui imprime, ou la vitesse en fonction du poids; mais établie indépendamment de l'inertie des masses en mouvement, elle suppose le mécanisme réduit à une simple manivelle, sur laquelle agit constamment une pression verticale.

Soient P le poids de l'anneau du volant, V la vitesse moyenne sur la circonférence-milieu de la couronne, k le rapport qu'on veut mettre entre V et la différence de cette vitesse à la plus grande ou à la plus petite, n le nombre de tours fait par la manivelle en 1', N le nombre de chevaux que remplace le moteur. La formule de M. Poncelet est

$$PV^2 = 4645^{kg}\frac{kN}{n}.$$

Le rayon moyen de l'anneau se détermine d'ailleurs par l'équation

$$\frac{2\pi Rn}{60} = V,$$

et l'on obtient les rayons extrêmes à l'aide des relations

$$\frac{R'+R''}{2}=R, \qquad (\pi R'^2-\pi R''^2)l\delta=P.$$

Dans cette dernière, l exprime la largeur de l'anneau mesurée parallèlement à l'axe, et δ le poids du mètre cube de la matière.

Plusieurs scieries de France sont dépourvues de volant : les unes, parce qu'elles n'ont pas été établies conformément aux principes de la Mécanique ; les autres, parce que leur roue hydraulique a une force-vive suffisante pour régulariser le mouvement. On doit en effet, avant de déterminer le poids et les dimensions d'un volant, examiner si celui de la roue hydraulique, multiplié par le quarré de la vitesse moyenne de ce récepteur, satisfait à l'équation

$$PV^2=4645\,\frac{kN}{n}.$$

Lorsqu'il s'en faut de peu que l'égalité n'ait lieu, il est inutile, il serait même désavantageux d'ajouter un volant à la machine, puisque cette pièce augmenterait les frottements, sans rendre le mouvement beaucoup plus uniforme.

Dans les scieries d'Allemagne, les volants sont des plateaux circulaires en bois de chêne, qui ont $1^m,624$ de diamètre et $0^m,217$ d'épaisseur. Ils renferment donc $0^{mc},4495$ chacun, et pèsent 454^{kg}, car le mètre cube de chêne sec a pour poids 1010^{kg}. Ainsi, le volant d'une scierie d'Allemagne pèse à peu près 9 fois autant que l'équipage, dont le poids ne surpasse guère 50^{kg}.

246. La pièce de bois à débiter est fixée par de forts *valets* sur un long châssis horizontal nommé *chariot*,

qui doit se mouvoir perpendiculairement au plan du châssis porte-scies. A cet effet, il est ordinairement établi sur des roulettes qui cheminent dans deux coulisses parallèles. Comme ces coulisses en bois sont sujettes à se déjeter, et qu'un parallélisme exact est à peu près impossible, on est obligé de donner un certain jeu aux roulettes. Le chariot est donc exposé à de petites déviations, et par suite le trait ne peut être un plan.

Dans certaines scieries, les coulisses et les roulettes sont remplacées par des *galets* ou rouleaux fixes à gorge. Les déviations sont moindres alors, mais non pas nulles, car les brancards du châssis, ne pouvant être ou rester rigoureusement parallèles, ont besoin d'avoir un peu de jeu dans les gorges des galets.

Le moyen de rendre le mouvement du chariot parfaitement rectiligne, c'est de placer sous un seul brancard des roulettes à gorge, de les faire cheminer sur un rail de fonte bombé, de garnir l'autre brancard de roulettes cylindriques, et de donner à celles-ci un rail plan. Cet appareil est employé dans les scieries bien construites. Il n'exige aucun jeu ; il force, par conséquent, tous les points du chariot à suivre des directions parallèles au rail bombé, et le seul soin que demande son établissement consiste à rendre vraiment rectiligne le rail conducteur des roulettes à gorge.

247. Voici maintenant comment on fait avancer le chariot vers les scies, dès que le châssis vertical commence à descendre. Sur la face interne de l'un des brancards est boulonnée une crémaillère GH (P. IV, F. 3), dont les dents verticales et tournées vers le bas engrènent avec les fuseaux d'une lanterne I. L'axe de cette lanterne est parallèle à celui de l'arbre hydraulique. Il porte aussi une roue dentée K, dite *roue à*

rochet, à cause de la forme particulière de ses dents : la plus courte des deux lignes de leur profil est dirigée selon un rayon, et la plus longue forme un arc. Une barre de fer L terminée en fourche, et nommée pour cela *pied-de-biche*, saisit et presse une des dents supérieures de la roue à rochet. Comme elle se trouve du côté opposé à la scie, relativement à la lanterne, sa pression fait avancer le chariot.

C'est la descente même du châssis qui produit l'effort du pied-de-biche, et voici comment : de l'entretoise inférieure part une bielle brisée M qui forme un levier rotatif au moyen du boulon fixe N ; la plus courte partie O de ce levier est percée de plusieurs trous qui servent à y unir le pied-de-biche, à une plus ou moins grande distance du centre N d'oscillation, selon que le chariot doit marcher plus ou moins vite. Or le châssis AB descendant fait basculer le levier M et avancer la partie O, ainsi que le pied-de-biche, vers le point supérieur de la roue à rochet. Au contraire, l'ascension du châssis fait rétrograder le bras O ; la fourche du pied-de-biche descend, en glissant sur les courbes des dents, et vient saisir la roue à rochet en un point moins élevé au-dessus de l'axe.

Il pourrait y avoir recul du chariot quand l'équipage remonte, car alors les dents supérieures des scies frottent un peu sur le fond des traits. Pour empêcher tout mouvement rétrograde, on ajoute un déclic P, pièce rotative en fer, toujours appuyée sur la roue à rochet par l'effet de son poids, et terminée en fourche comme le pied-de-biche. Au moment où ce dernier organe abandonne la dent qu'il vient de pousser, le déclic en saisit une autre et maintient la roue à rochet dans la position qu'elle a prise.

Pour donner un nouveau trait de scie, il faut faire

rétrograder le chariot. On y parvient en imprimant à la lanterne un mouvement contraire à celui qu'elle reçoit du pied-de-biche. Cette barre est soutenue en l'air, le déclic est renversé, et l'homme-moteur s'applique à des chevilles implantées sur l'une des faces planes de la roue à rochet. Mais on conçoit que le mouvement rétrograde pourrait être opéré par la rotation de l'arbre hydraulique, au moyen d'un appareil peu compliqué : il suffirait d'une poulie de renvoi, et d'une corde qui s'attacherait d'un bout à l'arrière du chariot et s'enroulerait de l'autre sur l'arbre.

248. Le rayon de la roue à rochet est arbitraire ; seulement, il faut le prendre tel que la force d'un homme soit suffisante pour faire rétrograder le chariot chargé d'un arbre ordinaire. Or il est facile de calculer le frottement qu'occasionne ce poids sur les essieux des roulettes. On a ainsi la résistance que la crémaillère oppose à la rotation de la lanterne ; le moment de cette résistance par rapport à l'axe, augmenté de celui du frottement des fuseaux et des dents, doit égaler le moment d'un effort d'homme, et de l'égalité résulte la détermination du rayon de la circonférence sur laquelle sont implantées les chevilles.

Le pourtour d'une roue à rochet est souvent divisé en 360 parties égales ; mais il vaut mieux faire 384 dents, parce que la division est alors plus facile, et qu'il est d'autant plus aisé de faire varier, selon la dureté des bois à débiter, l'enfoncement des scies à chaque descente, que les dents sont en plus grand nombre, ou qu'elles occupent de plus petits arcs sur le pourtour de la roue. Si donc r est le rayon de ce pourtour, la longueur d'une dent sera $\frac{2\pi r}{384}$, et l'arc occupé aura $\frac{360}{384}$ de degré.

249. Le pied-de-biche doit pouvoir rétrograder sur la roue à rochet d'un certain nombre de dents, plus une fraction ; car il serait fort difficile d'obtenir une rétrogradation exacte d'un nombre entier de dents, et il convient que les scies descendent un peu avant de mordre. On arrange les choses de façon qu'étant au trou le plus voisin de l'essieu N du levier coudé (P. IV, F. 3), le pied-de-biche parcourt, à chaque oscillation, 2 dents et un quart, d'un mouvement uniforme. Pour obtenir ces effets, il faut placer la fourche à 4 ou 5 dents au-dessous du contact de la tangente commune à la roue I et à l'essieu N, qui laisse les deux cercles du même côté et en dessous ; mettre au trou le plus voisin de N le boulon par lequel le pied-de-biche est lié au bras O ; unir le levier M au châssis AB, de manière qu'il se trouve horizontal quand s'achève l'ascension, et lui donner une longueur telle que chaque oscillation fasse tourner l'essieu N de l'angle qu'exige le parcours de $^5/_4$ de dent.

On conçoit en effet qu'au moyen de ces dispositions, l'effort variable du châssis sur le levier M, ou celui du bras O sur le pied-de-biche, est à son maximum au commencement de la descente, tandis qu'alors l'effort qui s'exerce sur les dents a son moindre moment. Au contraire, à la fin de la descente, l'effort du bras O est un minimum, tandis que le pied-de-biche, presque tangent à la roue, possède son plus grand moment. Donc, durant la descente des scies, il se fait entre les variations de l'action du levier rotatif et celles de l'action du pied-de-biche, une sorte de compensation qui rend à peu près uniforme le mouvement de la roue à rochet.

Voyons comment se détermine l'angle α dont doit tourner le levier rotatif M, pour faire avancer ou rétrograder la fourche du pied-de-biche de $^5/_4$ de dent.

Nous pouvons bien regarder comme égaux les arcs décrits par les deux extrémités de cette dernière barre, car l'arc de 2 dents et quart est assez petit, ayant pour indication

$$\frac{360^\circ}{384} \times 2{,}25 = 2^\circ\, 6'\, 34'',$$

et il n'y a aucun inconvénient à ce que le pied-de-biche avance et rétrograde d'un peu plus ou d'un peu moins de 2 dents et quart. Or, si r' désigne le rayon de l'essieu N, l'arc α a pour longueur $\frac{2\pi r'}{360^\circ}\alpha$; la longueur d'une dent vaut $\frac{2\pi r}{384}$, et celle de 2 dents et quart est $\frac{2\pi r}{384} \times 2{,}25$. Par conséquent,

$$\frac{2\pi r'}{360^\circ}\alpha = \frac{2\pi r}{384} \times 2{,}25, \qquad \text{et} \qquad \alpha = \frac{360^\circ}{384} \times 2{,}25 \times \frac{r}{r'}.$$

En remplaçant 2,25 par un nombre de dents quelconque k, on obtient de l'égalité précédente

$$\frac{2\pi r''}{360^\circ}\alpha = \frac{2\pi r k}{384}, \qquad \text{puis} \qquad r'' = \frac{360^\circ}{\alpha} \times \frac{k}{384} r,$$

relation qui donne les distances r'' à mettre entre l'axe N et les divers trous du bras O, pour que le pied-de-biche, fixé successivement à ces trous, fasse tourner la roue à rochet de 3 dents et quart, de 4 dents et quart, etc.

Cherchons maintenant la longueur NQ du levier M (P. IV, F. 4), et celle de la patte BQ, qui conviennent à l'angle α. Nous supposerons que la ligne NQB, brisée à angle droit, doive devenir une ligne droite quand s'achève la descente du châssis, et nous représenterons

par h l'étendue verticale BB' d'une oscillation. Le triangle rectangle NQB' donne d'abord $NQ = \frac{QB'}{\tan g\,\alpha}$, puis

$$BQ = Q'B' = NB' - NQ' = NB' - NQ = \frac{QB'}{\sin\alpha} - \frac{QB'}{\tan g\alpha} = QB'\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right).$$

Or $QB' = BB' - BQ$. Donc

$$BQ = (h - BQ)\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \text{ou} \quad BQ = \frac{h(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1}.$$

De là suit

$$NQ = \frac{BB' - BQ}{\tan g\,\alpha} = \frac{(h - BQ)\cos\alpha}{\sin\alpha} = \left(h - \frac{h(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1}\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$\frac{h\sin\alpha - h\cos\alpha + h - h + h\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1} \times \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{h\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1}.$$

250. L'expérience a fait connaître que les scies peuvent à chaque descente s'enfoncer de $0^m,0023$ dans le bois le plus dur. Le chariot doit donc cheminer d'autant. Or, lorsque le pied-de-biche recule de deux dents et quart à chaque ascension, il ne fait réellement tourner la lanterne que de deux dents par descente; il s'avance d'abord d'un quart de dent sans la pousser. Une rotation de deux dents pour la lanterne doit donc répondre à un chemin de $0^m,0023$ pour le chariot, ou, ce qui est la même chose, la roue à rochet doit, en tournant d'une dent, faire parcourir $0^m,00115$ à l'axe du fuseau supérieur de la lanterne.

Cela posé, soient d le diamètre des fuseaux, n leur nombre, d' l'épaisseur des dents de la crémaillère, et i le jeu. L'intervalle de deux fuseaux consécutifs sera $d'+i$ à fort peu près, la circonférence primitive de la lanterne vaudra $(d+d'+i)n$, et l'on aura pour déterminer le rayon de cette circonférence, $r = \frac{(d+d'+i)n}{2\pi}$.

Mais l'arc qui, sur la même circonférence, correspond à une dent de la roue à rochet, est $\frac{(d+d'+i)n}{384}$. Le nombre convenable des fuseaux se déduit donc de l'équation

$$\frac{(d+d'+i)n}{384}=0^{m},00115, \text{ qui donne } n=\frac{0^{m},00115\times384}{d+d'+i}.$$

251. Il nous reste à parler des modificateurs qui donnent au châssis porte-scies la vitesse convenable, par exemple celle de laquelle résultent 156 oscillations par minute. Comme chaque oscillation répond à un demi-tour de la manivelle, cet organe doit faire 78 tours dans le même temps. Si donc il était fixé à l'arbre de la roue hydraulique, cette roue ferait aussi 78 tours par minute, ou posséderait une vitesse égale à $\frac{78\times2\pi R}{60}$.

Ainsi, en désignant par v la vitesse de l'eau, et par $\frac{v}{k}$ celle du récepteur, pour le cas du travail maximum, on déterminerait le rayon R au moyen de l'équation

$$\frac{78\times2\pi R}{60}=\frac{v}{k}, \text{ qui donne } R=\frac{60v}{78\times2\pi k}=\frac{0,122v}{k}.$$

Il est visible que cette valeur rendrait généralement beaucoup trop petit le rayon de la roue hydraulique. Un engrenage est donc nécessaire pour obtenir 78 tours de manivelle par minute, tout en conservant à la roue hydraulique la vitesse qui convient au maximum de travail, et le rayon dont l'effort moteur a besoin.

L'engrenage usité se compose d'un hérisson monté sur l'arbre hydraulique, et d'une lanterne dont l'axe porte la manivelle. C'est aussi sur cet axe qu'on établit

le volant, lorsqu'il en faut un. On a d'ailleurs entre les rayons des deux pièces engrenées la relation $\frac{R'}{R''}=\frac{78}{n}$, si n représente le nombre de tours fait par la roue hydraulique en $1'$; car les deux pièces ont même vitesse effective sur leurs circonférences primitives, et par conséquent, leurs rayons sont en raison inverse des nombres de tours relatifs au même temps.

Quant au rayon R'' de la lanterne, il se détermine comme celui de la lanterne du chariot. Si, par exemple, D désigne le diamètre des fuseaux, N leur nombre, E l'épaisseur des dents du hérisson, et I le jeu,

$$R''=\frac{(D+E+I)N}{2\pi}.$$

252. La description détaillée qui précède nous met en état de déterminer l'effort Q que doit exercer la roue motrice à la distance R de son axe, pour faire équilibre à la résistance principale et aux résistances accessoires, pendant un mouvement uniforme (P. IV, F. 5).

Considérons d'abord le treuil hydraulique, et nommons Q' la résistance moyenne et verticale qu'offre le fuseau de la lanterne à la roue dentée. Le moment de cette résistance est $Q'R'$, si R' désigne le rayon de la circonférence primitive du hérisson. Soient P le poids de l'arbre hydraulique joint à tout ce qui le charge, et α l'angle formé sur l'horizontale par la direction de l'effort-moteur Q. La pression horizontale des tourillons sera $Q\cos\alpha$; leur pression verticale vaudra

$$P+Q\sin\alpha-Q',$$

si l'engrenage a lieu du côté de la vanne; ou

$$P+Q\sin\alpha+Q',$$

s'il se fait à l'opposite; car, dans le premier cas, la résistance Q' agit de bas en haut, et dans le second, de haut en bas. Le frottement est donc produit par la résultante

$$\sqrt{[(P+Q\sin\alpha\mp Q')^2+(Q\cos\alpha)^2]}=0,96(P+Q\sin\alpha\mp Q')+0,4Q\cos\alpha,$$

et son moment a pour expression

$$f'\rho[0,96(P+Q\sin\alpha\mp Q')+0,4Q\cos\alpha].$$

Il y a donc de l'avantage à placer la lanterne à manivelle entre la vanne et l'arbre hydraulique; mais comme la localité peut ne pas le permettre, nous conserverons le double signe de Q', et l'égalité générale des quantités d'action, ou celle des moments qui doit la remplacer ici, donnera

$$QR=Q'R'+f'\rho[0,96(P+Q\sin\alpha\mp Q')+0,4Q\cos\alpha],$$

ou

$$Q=\frac{Q'(R'\mp 0,96f'\rho)+0,96f'\rho P}{R-f'\rho(0,96\sin\alpha+0,4\cos\alpha)}.$$

La résistance Q' se compose de la pression moyenne et verticale Q'' du fuseau sur la dent, et du frottement qui résulte de cette pression. Or, si k, k' représentent le nombre des dents et celui des fuseaux, le frottement de l'engrenage d'une lanterne augmente de $\pi f Q''\frac{k+k'}{kk'}$ l'effort opposé à la pression (120). Par conséquent,

$$Q'=Q''\left(1+\pi f\frac{k+k'}{kk'}\right).$$

La pression Q'' a été dite *moyenne*, parce que l'effort du hérisson contre la lanterne, à part les frottements, n'est pas toujours le même: pendant l'ascension, il élève le poids du châssis; durant la descente, il com-

pense l'excès de la force qu'exige le sciage sur celle qui résulte de la chute du châssis, et sa valeur Q_1'' du premier cas surpasse ordinairement Q_2', celle du second. Il faut donc déterminer chacune de ces quantités, afin de pouvoir trouver Q'' au moyen de la relation

$$Q'' = \frac{Q_1'' + Q_2''}{2}.$$

253. L'effort Q''_1 doit évidemment faire équilibre à la résistance qu'offre, selon la bielle BD (P. IV, F. 5), l'ascension du châssis, au poids de cette bielle, au frottement du *bouton* D de la manivelle, à celui des tourillons C de la lanterne, et à la résistance qui résulte de la rétrogradation du pied-de-biche.

Soit E l'effort moyen à exercer en B dans le sens DB. Il se décompose en deux parties : l'une verticale $E\cos\beta$, qui fait un travail élémentaire $E\cos\beta dh$, si h représente la fraction de l'ascension totale FE, dont se trouve élevé le bouton D, quand l'angle $CBD = \beta$; l'autre horizontale $E\sin\beta$, qui produit sur les coulisses un frottement $fE\sin\beta$, pour lequel il faut dépenser une quantité d'action $fE\sin\beta dh$, dans l'instant qui suit l'ascension partielle h. Si donc P' désigne le poids du châssis et des scies, l'égalité des quantités d'action élémentaires donne

$$E\cos\beta dh = P'dh + fE\sin\beta dh,$$

et il en résulte pour l'ascension entière,

$$E\int\cos\beta dh = P'\int dh + fE\int\sin\beta dh.$$

Or, en représentant par b la longueur du bras CD de la manivelle, et par ε l'angle dont il s'est écarté de la verticale CF, on obtient

$$h = CF - CD\cos\varepsilon = b - b\cos\varepsilon,$$

$$dh = -b d\cos\varepsilon = b\sin\varepsilon d\varepsilon\,;$$

si l représente la longueur de la bielle BD,

$$b\sin\varepsilon = l\sin\beta, \qquad l^2\cos^2\beta = l^2 - b^2\sin^2\varepsilon,$$

et il s'ensuit

$$\sin\beta = \frac{b}{l}\sin\varepsilon, \qquad \cos\beta = \left(1 - \frac{b^2}{l^2}\sin^2\varepsilon\right)^{1/2}.$$

Par conséquent,

$$\int\cos\beta dh = \int\left(1 - \frac{b^2}{l^2}\sin^2\varepsilon\right)^{1/2} b\sin\varepsilon d\varepsilon = \int\left(1 - \frac{b^2}{2l^2}\sin^2\varepsilon\right) b\sin\varepsilon d\varepsilon =$$

$$\int(-b d\cos\varepsilon) + \int\frac{b^3}{2l^2}\sin^2\varepsilon\, d\cos\varepsilon = -b\cos\varepsilon + \int\frac{b^3}{2l^2}(1-\cos^2\varepsilon)d\cos\varepsilon =$$

$$-b\cos\varepsilon + \frac{b^3}{2l^2}\cos\varepsilon + \frac{b^3}{2l^2}\int(-\cos^2\varepsilon\, d\cos\varepsilon) =$$

$$-b\cos\varepsilon + \frac{b^3}{2l^2}\cos\varepsilon - \frac{b^3}{2l^2}\times\frac{\cos^3\varepsilon}{3} + C.$$

Pour que cette intégrale réponde à l'ascension entière EF, il faut évidemment la prendre depuis $\varepsilon = 0$ jusqu'à $\varepsilon = \pi$. La seconde limite donne $\cos\varepsilon = \cos\pi = -1$,

et $$\int{}'\cos\beta dh = b - \frac{b^3}{2l^2} + \frac{b^3}{6l^2} + C\,;$$

la première fournit $\cos\varepsilon = 1$,

et $$\int{}''\cos\beta dh = -b + \frac{b^3}{2l^2} - \frac{b^3}{6l^2} + C.$$

Enfin, il résulte de la soustraction

$$\int\cos\beta dh = 2b - \frac{b^3}{l^2} + \frac{b^3}{3l^2} = 2b - \frac{2b^3}{3l^2}.$$

On a aussi

$$\int\sin\beta dh = \int\frac{b}{l}\sin\varepsilon\times b\sin\varepsilon d\varepsilon = \int\frac{b^2}{l}\sin^2\varepsilon d\varepsilon = \int\frac{b^2}{l}(1-\cos^2\varepsilon)d\varepsilon =$$

$$\frac{b^2\varepsilon}{l}+\int\left(-\frac{b^2}{l}\cos^2\varepsilon d\varepsilon\right)=\frac{b^2\varepsilon}{l}+\int\left(-\frac{b^2}{l}\cos\varepsilon\, d\sin\varepsilon\right)=$$

$$\frac{b^2\varepsilon}{l}+\frac{b^2}{l}\int\left\{-d\sin\varepsilon(1-\sin^2\varepsilon)^{1/2}\right\}=\frac{b^2\varepsilon}{l}+\frac{b^2}{l}\int\left\{-d\sin\varepsilon\left(1-\frac{\sin^2\varepsilon}{2}\right)\right\}=$$

$$\frac{b^2\varepsilon}{l}-\frac{b^2}{l}\sin\varepsilon+\frac{b^2}{l}\times\frac{\sin^3\varepsilon}{6}+\text{C}.$$

La limite $\varepsilon=\pi$ donne $\sin\varepsilon=0$,

et $$\int'\sin\beta dh=\frac{b^2\pi}{l}+\text{C}.$$

La limite $\varepsilon=0$ fournit $\sin\varepsilon=0$,

et $$\int''\sin\beta dh=0+\text{C}.$$

Enfin, la soustraction conduit à

$$\int\sin\beta dh=\frac{b^2\pi}{l}.$$

Comme d'ailleurs $\int dh$ ou $\int -b\cos\varepsilon$ vaut évidemment $2b$ pour une ascension complète, l'équation des quantités d'action devient

$$\text{E}\left(2b-\frac{2b^3}{3l^2}\right)=2\text{P}'b+f\text{E}\frac{b^2\pi}{l}.$$

On déduit de là

$$\text{E}=\frac{2\text{P}'b}{2b-\frac{2b^3}{3l^2}-f\frac{b^2\pi}{l}}=\frac{6\text{P}'bl^2}{6bl^2-2b^3-3flb^2\pi}=\frac{6\text{P}'l^2}{6l^2-2b^2-3flb\pi}.$$

L'effort E à exercer en B, dans le sens DB, n'est pas exactement celui du bouton D de la manivelle dans le même sens, car ils doivent produire deux quantités d'action égales, et le premier a lieu le long d'un chemin évidemment plus court que le chemin parcouru par D dans le même temps. Mais le calcul montre qu'il

n'y a pas assez de différence entre les deux forces, pour qu'il ne soit pas permis de les supposer égales, dans la vue d'obtenir des formules plus simples. La valeur trouvée pour E sera donc aussi celle de l'effort qu'exerce le bouton sur la verge DB pour soulever le châssis, et l'on obtiendra l'effort total E′ de ce bouton en ajoutant au second membre de l'équation des quantités d'action, celle $2pb$ que consomme l'ascension du poids p de la bielle. Ainsi,

$$E'\left(2b - \frac{2b^3}{3l^2}\right) = 2P'b + fE'\frac{b^2\pi}{l} + 2pb,$$

et $$E' = \frac{6bl^2(P'+p)}{6bl^2 - 2b^3 - 3fb^2l\pi} = \frac{6l^2(P'+p)}{6l^2 - 2b^2 - 3fbl\pi}.$$

Il reste maintenant, pour déterminer la puissance Q'_1 du treuil C, à égaler la quantité d'action élémentaire $Q_1''R''d\epsilon$ qu'elle produit, et les quantités d'action élémentaires consommées par les diverses résistances auxquelles cet effort fait équilibre.

Or, le point D parcourt en un instant l'arc $bd\epsilon$, qui se confond sensiblement avec sa tangente à l'origine D; la projection de $bd\epsilon$ sur la bielle est le chemin élémentaire de la résistance E′, et cette projection vaut

$$bd\epsilon \cos \text{BDG} \quad \text{ou} \quad bd\epsilon \sin\gamma,$$

si γ indique l'angle BDC. Le travail élémentaire de E′ est donc $E'bd\epsilon\sin\gamma$.

La même résistance a une composante verticale $E'\cos\beta$ dans le sens BC, et une composante horizontale $E'\sin\beta$, qui pressent les tourillons C en même temps que la puissance Q_1'' et le poids total P″ de la lanterne, de son arbre et de la manivelle. Il en résulte un frot-

tement circulaire pour lequel il faut une quantité d'action élémentaire

$$f_1'\rho' d\varepsilon \sqrt{(P'' \pm Q_1'' + E'\cos\beta)^2 + E'^2\sin^2\beta} =$$
$$f_1'\rho' d\varepsilon [0{,}96(P'' \pm Q_1'' + E'\cos\beta) + 0{,}4E'\sin\beta].$$

Quant à celle qu'absorbe le frottement de l'articulation D, elle est évidemment $f_2'E'\rho'' d\varepsilon$, car le bouton tourne dans son collier d'un arc ε, comme la manivelle.

Enfin, si nous remarquons que la rétrogradation du pied-de-biche offre seulement pour résistances les frottements de boulons dont les rayons sont très-petits et les charges très-faibles, nous verrons qu'il y a lieu de négliger la quantité d'action à dépenser pour opérer cette rétrogradation, et nous conclurons que

$$Q_1''R''d\varepsilon = E'\sin\gamma b d\varepsilon + f_1'\rho' d\varepsilon [0{,}96(P'' \pm Q_1'' + E'\cos\beta) +$$
$$0{,}4E'\sin\beta] + f_2'E'\rho'' d\varepsilon.$$

Intégrant depuis $\varepsilon = 0$ jusqu'à $\varepsilon = \pi$, on obtient

$$Q_1''R''\pi = E'b\int_\pi^0 \sin\gamma d\varepsilon + 0{,}96 f_1'\rho'\pi(P'' \pm Q_1'') + 0{,}96 f_1'\rho'E'\int_\pi^0 \cos\beta d\varepsilon$$
$$+ 0{,}4 f_1'\rho'E'\int^\pi \sin\beta d\varepsilon + f_2'\rho''\pi E'.$$

Or,

$$l\sin\gamma = BK = BC\sin\varepsilon = (BL - CL)\sin\varepsilon = (l\cos\beta - b\cos\varepsilon)\sin\varepsilon =$$
$$l\cos\beta\sin\varepsilon - b\sin\varepsilon\cos\varepsilon = l\left(1 - \frac{b^2}{l^2}\sin^2\varepsilon\right)^{1/2}\sin\varepsilon - b\sin\varepsilon\cos\varepsilon =$$
$$l\sin\varepsilon - \frac{b^2}{2l}\sin^3\varepsilon - b\sin\varepsilon\cos\varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\int \sin\gamma d\varepsilon = \int \sin\varepsilon d\varepsilon - \frac{b^2}{2l^2}\int \sin^3\varepsilon d\varepsilon - \frac{b}{l}\int \sin\varepsilon\cos\varepsilon d\varepsilon =$$
$$-\cos\varepsilon - \frac{b^2}{2l^2}\int \sin^2\varepsilon(-d\cos\varepsilon) - \frac{b}{l}\int \sin\varepsilon d\sin\varepsilon =$$

$$-\cos\varepsilon - \frac{b^2}{2l^2}\int(-d\cos\varepsilon) - \frac{b^2}{2l^2}\int\cos^2\varepsilon d\cos\varepsilon - \frac{b}{2l}\sin^2\varepsilon =$$

$$-\cos\varepsilon + \frac{b^2}{2l^2}\cos\varepsilon - \frac{b^2}{6l^2}\cos^3\varepsilon - \frac{b}{2l}\sin^2\varepsilon + C.$$

Pour $\varepsilon=\pi$, on a

$$\int^{\prime}\sin\gamma d\varepsilon = 1 - \frac{b^2}{2l^2} + \frac{b^2}{6l^2} + C.$$

Pour $\varepsilon=0$, on a

$$\int^{\prime\prime}\sin\gamma d\varepsilon = -1 + \frac{b^2}{2l^2} - \frac{b^2}{6l^2} + C.$$

Donc $$\int_{\pi}^{0}\sin\gamma d\varepsilon = 2 - \frac{b^2}{l^2} + \frac{b^2}{3l^2} = 2 - \frac{2b^2}{3l^2},$$

et $$E'b\int_{\pi}^{0}\sin\gamma d\varepsilon = 2bE' - \frac{2b^3}{3l^2}E'.$$

On voit aussi que

$$\int\cos\beta d\varepsilon = \int\left(1-\frac{b^2}{l^2}\sin^2\varepsilon\right)^{1/2}d\varepsilon = \int d\varepsilon - \int\frac{b^2}{2l^2}\sin^2\varepsilon d\varepsilon = \varepsilon - \frac{b^2}{2l^2}\int(1-\cos^2\varepsilon)d\varepsilon =$$

$$\varepsilon - \frac{b^2\varepsilon}{2l^2} - \frac{b^2}{2l^2}\int(-\cos^2\varepsilon d\varepsilon) = \varepsilon - \frac{b^2\varepsilon}{2l^2} - \frac{b^2}{2l^2}\int\cos\varepsilon(-d\sin\varepsilon) =$$

$$\varepsilon - \frac{b^2\varepsilon}{2l^2} - \frac{b^2}{2l^2}\int(1-\sin^2\varepsilon)^{1/2}(-d\sin\varepsilon) = \varepsilon - \frac{b^2\varepsilon}{2l^2} + \frac{b^2}{2l^2}\sin\varepsilon - \frac{b^2}{4l^2}\int\sin^2\varepsilon d\sin\varepsilon =$$

$$\varepsilon - \frac{b^2\varepsilon}{2l^2} + \frac{b^2}{2l^2}\sin\varepsilon - \frac{b^2}{12l^2}\sin^3\varepsilon + C.$$

Pour $\varepsilon=\pi$, $$\int^{\prime}\cos\beta d\varepsilon = \pi - \frac{b^2\pi}{2l^2} + C.$$

Pour $\varepsilon=0$, $$\int^{\prime\prime}\cos\beta d\varepsilon = 0 + C.$$

Donc $$\int_{\pi}^{0}\cos\beta d\varepsilon = \pi - \frac{b^2\pi}{2l^2},$$

et $$0{,}96f_1'\rho'E'\int_{\pi}^{0}\cos\beta d\varepsilon = 0{,}96f_1'\rho'\pi E' - 0{,}96f_1'\rho'\pi\frac{b^2}{2l^2}E'.$$

Enfin, $$\int\sin\beta d\varepsilon = \int\frac{b}{l}\sin\varepsilon d\varepsilon = -\frac{b}{l}\cos\varepsilon + C.$$

Pour $\varepsilon = \pi$, $\qquad \int^{\prime} \sin\beta d\varepsilon = \frac{b}{l} + C.$

Pour $\varepsilon = 0$, $\qquad \int^{\prime\prime} \sin\beta d\varepsilon = -\frac{b}{l} + C.$

Donc $\qquad \int_{\pi}^{0} \sin\beta d\varepsilon = \frac{2b}{l},$

et $\qquad 0,4 f_1{}' \rho' E' \int_{\pi}^{0} \sin\beta d\varepsilon = 0,8 f_1{}' \rho' \frac{b}{l} E'.$

Conséquemment,

$$Q_1{}'' R'' \pi = \begin{cases} 2bE' - \frac{2b^3}{3l^2} E' + 0,96 f_1{}' \rho' \pi (P'' \pm Q_1{}'') + 0,96 f_1{}' \rho' \pi E' \\ -0,48 f_1{}' \rho' \pi \frac{b^2}{l^2} E' + 0,8 f_1{}' \rho' \frac{b}{l} E' + f_2{}' \rho'' \pi E', \end{cases}$$

et

$$Q_1{}'' = \frac{E'\left(2b - \frac{2b^3}{3l^2} + 0,96 f_1{}' \rho' \pi - 0,48 f_1{}' \rho' \pi \frac{b^2}{l^2} + 0,8 f_1{}' \rho' \frac{b}{l} + f_2{}' \rho'' \pi\right) + 0,96 f_1{}' \rho' \pi P''}{R'' \pi \mp 0,96 f_1{}' \rho' \pi}.$$

254. Nous trouverons d'une manière analogue l'effort Q''_2 qui doit être exercé sur le fuseau pendant la descente. Remarquons d'abord qu'en désignant par X l'effort vertical que fait l'équipage de la scie pour pousser le pied-de-biche, plus la résistance des fibres du bois, on a $X - (P' + p)$ pour celle que le châssis offre à la traction verticale, et qu'il suffit de substituer cette quantité à la résistance $P' + p$ dans la valeur de E', pour obtenir celle de la traction E'' qu'exerce la bielle de B vers D' pendant la descente (P. IV, F. 6). Il vient ainsi

$$E'' = \frac{6l^2[X - (P' + p)]}{6l^2 - 2b^2 - 3fbl\pi}.$$

Mais la traction E'' prise en sens inverse, ou agissant de D' vers B, est la résistance que doit équilibrer Q_2''. Cette résistance se décompose en deux autres, comme précédemment E', de sorte qu'une partie de la pression sur l'axe C est produite par $E''\cos\beta$, dirigée de C vers B, et par une force horizontale $E''\sin\beta$ qui pousse les tourillons de droite à gauche, comme dans le cas de l'ascension. Le frottement de ces tourillons consomme donc une quantité d'action élémentaire

$$f_1'\rho' d\varepsilon\sqrt{(P'' \pm Q_2'' - E''\cos\beta)^2 + E''^2\sin^2\beta} = f_1'\rho' d\varepsilon[0,96(P'' \pm Q_2'' - E''\cos\beta) + 0,4E''\sin\beta];$$

et l'on a

$$Q_2''R''d\varepsilon = \left\{ \begin{array}{l} E''\sin\gamma . b d\varepsilon + f_1'\rho' d\varepsilon[0,96(P'' \pm Q_2'' - E''\cos\beta) + \\ \qquad 0,4E''\sin\beta] + f_2'E''\rho'' d\varepsilon, \end{array} \right.$$

puis

$$Q_2''R''\pi = \left\{ \begin{array}{l} 2bE'' - \dfrac{2b^3}{3l^2}E'' + 0,96f_1'\rho'\pi(P'' \pm Q_2'') - 0,96f_1'\rho'\pi E'' + \\ \qquad 0,48f_1'\rho'\pi\dfrac{b^2}{l^2}E'' + 0,8f_1'\rho'\dfrac{b}{l}E'' + f_2'\rho''\pi E'', \end{array} \right.$$

puis

$$Q_2'' = \left\{ \frac{ E''\left(2b - \dfrac{2b^3}{3l^2} - 0,96f_1'\rho'\pi + 0,48f_1'\rho'\pi\dfrac{b^2}{l^2} + 0,8f_1'\rho'\dfrac{b}{l} + f_2'\rho''\pi\right) + 0,96f_1'\rho'\pi P'' }{ R''\pi \mp 0,96f_1'\rho'\pi } \right.,$$

et enfin

$$Q'' = \frac{Q_1'' + Q_2''}{2} = \left\{ \frac{ (E'+E'')\left(b - \dfrac{b^3}{3l^2} + 0,4f_1'\rho'\dfrac{b}{l} + f_2'\rho''\dfrac{\pi}{2}\right) + (E' - E'')\left(0,48f_1'\rho'\pi - 0,24f_1'\rho'\pi\dfrac{b^2}{l^2}\right) + 0,96f_1'\rho'\pi P'' }{ (R'' \mp 0,96f_1'\rho')\pi } \right..$$

255. Nous n'avons plus qu'à déterminer X. Or, si X' exprime la force qu'absorbe le sciage, ou la résistance

verticale des fibres du bois, et Q''' l'effort du châssis pour faire cheminer la roue à rochet, $X = X' + Q'''$. Il s'agit donc de trouver le second terme de cette valeur.

Nous négligerons encore ici les frottements des articulations, mais nous tiendrons compte de celui du treuil, dont les tourillons sont pressés par le poids p' du cylindre et des leviers, puis encore par les composantes de Q''' et de la résistance q du pied-de-biche (P. IV, F. 7).

L'effort vertical Q''' donne, selon la patte b', une force $Q'''\cos\beta'$, et perpendiculairement au levier l', une force $Q'''\cos\beta'\cos\gamma'$, dont la quantité d'action élémentaire est $Q'''\cos\beta'\cos\gamma' . l' d\alpha'$.

La force $Q'''\cos\beta'\cos\gamma'$ a pour composante verticale $Q'''\cos\beta'\cos\gamma'\cos\alpha'$, et pour composante horizontale $Q'''\cos\beta'\cos\gamma'\sin\alpha'$ qui agit de droite à gauche.

La résistance q a pour composante verticale $q\sin\varepsilon'$ qui agit de haut en bas, comme la précédente, et pour composante horizontale $q\cos\varepsilon'$, qui agit aussi de droite à gauche.

La pression supportée par les tourillons du treuil est donc

$$\sqrt{[(p' + Q'''\cos\beta'\cos\gamma'\cos\alpha' + q\sin\varepsilon')^2 + (Q'''\cos\beta'\cos\gamma'\sin\alpha' + q\cos\varepsilon')^2]} = 0{,}96(p' + Q'''\cos\beta'\cos\gamma'\cos\alpha' + q\sin\varepsilon') + 0{,}4(Q'''\cos\beta'\cos\gamma'\sin\alpha' + q\cos\varepsilon'),$$

et il en résulte, pour le frottement, une quantité d'action élémentaire

$$f_3'\rho'''d\alpha'\{0{,}96(p' + Q'''\cos\beta'\cos\gamma'\cos\alpha' + q\sin\varepsilon') + 0{,}4(Q'''\cos\beta'\cos\gamma'\sin\alpha' + q\cos\varepsilon')\}.$$

Enfin, la quantité d'action élémentaire de la résistance q est $qr d\alpha'$, si r désigne la distance de l'axe du treuil au pied-de-biche.

Par conséquent,

$$Q'''\cos\beta'\cos\gamma'.\,l'd\alpha' = \left\{ \begin{array}{l} qrd\alpha' + f_3'\rho'''d\alpha' \{0{,}96(p' + Q'''\cos\beta'\cos\gamma'\cos\alpha' \\ + q\sin\varepsilon') + 0{,}4(Q'''\cos\beta'\cos\gamma'\sin\alpha' + q\cos\varepsilon')\}. \end{array} \right.$$

L'intégration de cette équation entre les deux valeurs extrêmes de α' serait fort longue. Il est plus simple et suffisamment exact d'y introduire pour les quatre angles leurs valeurs moyennes. Alors les sinus et les cosinus deviennent des constantes, tous les termes peuvent être divisés par $d\alpha'$, et l'on obtient approximativement, pour valeur moyenne de Q''',

$$Q''' = \frac{q(r + 0{,}96f_3'\rho'''\sin\varepsilon' + 0{,}4f_3'\rho'''\cos\varepsilon') + 0{,}96f_3'\rho'''p'}{\cos\beta'\cos\gamma'(l' - 0{,}96f_3'\rho'''\cos\alpha' - 0{,}4f_3'\rho'''\sin\alpha')}.$$

256. Imitant maintenant ce qui a été fait pour la bielle, nous supposerons que l'effort q du levier rotatif sur le pied-de-biche soit égal à l'effort de ce dernier organe sur la roue à rochet. La force q devient alors, par rapport au chariot, une puissance qui doit vaincre la résistance totale qu'offrent les dents de la crémaillère et le frottement des tourillons de la lanterne.

Soit r_1 le rayon de la roue à rochet, ou plutôt la distance de l'axe I de la lanterne au pied-de-biche L (P. IV, F. 3). Le moment de l'effort q sera qr_1.

Soit q' l'effort total du fuseau contre la dent. La résistance de cette dent aura pour moment $q'r'$, si r' désigne le rayon de la circonférence primitive de la lanterne.

Soit enfin p'' le poids dont se trouve chargé l'axe de la lanterne. Le frottement des tourillons égalera

$$f_4'\sqrt{(p'' - q\sin\varepsilon')^2 + (q' - q\cos\varepsilon')^2},$$

et il aura pour moment

$$f_4'\rho^{iv}[0{,}96(p'' - q\sin\varepsilon') + 0{,}4(q' - q\cos\varepsilon')].$$

Conséquemment,

$$qr_1 = q'r' + f_4'\rho^{\prime v}[0,96(p'' - q\sin\varepsilon') + 0,4(q' - q\cos\varepsilon')],$$

et
$$q = \frac{q'(r' + 0,4f_4'\rho^{\prime v}) + 0,96f_4'\rho^{\prime v}p''}{r_1 + f_4'\rho^{\prime v}(0,96\sin\varepsilon' + 0,4\cos\varepsilon')}.$$

L'effort q' se compose de la pression horizontale q'' du fuseau contre la dent, et du frottement qu'occasionne cette pression. Comme le frottement d'engrenage d'une crémaillère (120 et 61) est $\frac{\pi f_1 q''}{k''}$, si k'' désigne le nombre des fuseaux,

$$q' = q''\left(1 + \frac{\pi f_1}{k''}\right).$$

La pression q'' est une puissance qui fait simplement équilibre au frottement des roulettes du chariot sur leurs essieux. Il n'y a pas à considérer la force-vive communiquée à ce chariot, attendu que le mouvement est très-lent.

Soient P''' le poids du chariot et de la pièce de bois qu'il porte, r'' le rayon des roulettes, et ρ^{v} celui de l'œil. Le moment de q'' sera $q''r''$, et le moment du frottement de l'œil vaudra en somme pour toutes les roulettes

$$f_5'\rho^{v}\sqrt{P'''^2 + q''^2} = f_5'\rho^{v}(0,96P''' + 0,4q'').$$

Donc
$$q''r'' = f_5'\rho^{v}(0,96P''' + 0,4q''),$$

et
$$q'' = \frac{0,96f_5'\rho^{v}P'''}{r'' - 0,4f_5'\rho^{v}}.$$

257. Ainsi, pour trouver la relation de l'effort moteur Q et de la résistance principale X', il faut d'abord calculer q'', puis q', puis q, puis Q'''; substituant alors $X' + Q'''$ à la place de X dans E'', et la valeur de E'', ainsi que celle de E', dans Q'', on obtient ce dernier effort en fonction de X'; la valeur de Q'' fait connaître

celle de Q', et finalement la substitution de la valeur de Q' dans l'expression de Q donne, pour la relation cherchée, une équation de la forme $Q = AX' + B$, A et B étant deux nombres produits par la combinaison des quantités données.

Lors donc que X' sera connue, il n'y aura aucune difficulté dans le calcul de l'effort à faire exercer par l'eau sur la roue hydraulique. Mais pour obtenir X', on est obligé de recourir à une scierie établie, afin d'avoir Q au moyen du frein de Prony ou du jaugeage de l'eau dépensée, et de pouvoir ensuite résoudre l'équation $X' = \frac{Q - B}{A}$; ou bien il faut se servir d'observations faites sur le travail des scieurs de long. Il est clair qu'en divisant la quantité d'action journalière que peuvent dépenser deux de ces scieurs, par l'une des faces qu'a produites leur scie dans le même temps, on a en kilogrammes-mètres la quantité d'action T nécessaire pour le sciage de chaque mètre carré.

Or, ce, produit du chemin c fait par le chariot pendant chaque descente, et de l'épaisseur e de la pièce de bois, donne le nombre des mètres carrés obtenus dans une descente. Donc Tce est la quantité d'action dépensée pour le sciage dans le même temps.

D'un autre côté, X' représente l'effort constant et vertical qu'exige la section des fibres du bois; $2b_1$ est le chemin, un peu moindre que $2b$, le long duquel s'exerce cet effort pendant chaque descente; et $2b_1X'$ donne aussi la quantité d'action dépensée pour le sciage dans le même temps. On a donc

$$2b_1X' = Tce, \quad \text{et} \quad X' = \frac{Tce}{2b_1}.$$

258. La quantité d'action T qu'exige le sciage d'un

seul mètre carré pris sur l'une des faces de la voie, n'est qu'une donnée approximative pour les scieries, quand on la déduit du travail des scieurs de long. En effet, cette quantité d'action se compose de deux autres : l'une qui est employée à briser les fibres du bois, l'autre que consomme la pression continue de la scie contre le fond du trait, et les deux efforts simultanés qu'il faut exercer dans des sens presque perpendiculaires entre eux, varient évidemment avec les circonstances du sciage ; de sorte qu'on aurait besoin d'une table où fussent indiqués, avec les valeurs de ces efforts, la nature du bois, son épaisseur, la largeur du trait, la vitesse de la scie, la qualité de l'acier et le tracé des dents, toutes choses dont doivent dépendre la traction et la pression nécessaires.

A défaut d'une telle table, qui sans doute ne sera pas dressée de long-temps encore, nous croyons utile d'exposer quelques résultats fournis par l'expérience et propres à servir de repères.

La qualité de la scie paraît exercer une grande influence, lorsque la lame est très-mince, et qu'elle n'a pas à vaincre une résistance de forte intensité. Dans ce cas, un homme peut, avec une bonne scie, exécuter un sciage quatre fois plus grand en surface que celui qu'il ferait avec un mauvais outil, le temps et la fatigue restant les mêmes. Dans le cas contraire, le rapport des effets se trouve diminué de beaucoup.

Le bois sec est plus difficile à scier que le bois vert de même essence. Il en est de même du bois neuf relativement au bois vieux : des expériences de Bélidor portent à $^4/_3$ le rapport des quantités d'action consommées pour le sciage du chêne neuf et du chêne vieux ; d'autres observations faites sur le travail des scieurs de long élèvent même le rapport à 2.

On peut estimer au double de la quantité d'action nécessaire pour scier parallèlement aux fibres, celle qu'il faut dépenser pour les couper d'équerre.

La quantité d'action varie aussi avec l'épaisseur du bois; mais elle croît plus rapidement, à cause du frottement auquel donne lieu la conduite de la sciure au dehors.

Navier évalue à 187 200^{k} la quantité d'action que dépense en 12 heures un scieur de long exercé, travaillant à la tâche. Divisant ce nombre par celui des mètres carrés d'une des faces produite par la scie dans chaque espèce de bois, on obtient la quantité d'action qu'absorbe le sciage d'un mètre carré. Voici un tableau formé d'après ce calcul et des observations faites sur les nombres de mètres carrés produits en 12 heures par de bons scieurs; les pièces de bois avaient une épaisseur médiocre, et la largeur du trait était de 3 à 5 millimètres.

ESSENCES.	ÉTATS DU BOIS.	SURFACES DE SCIAGE.	QUANTITÉS D'ACTION PAR MÈTRE CARRÉ.
		mm	k
Bois blanc....	vert.........	7,72	24 248
	sec.	5	37 650
Chêne.........	vert.........	6,6	28 364
	sec..........	4,4	42 545
Orme	vert.........	6	31 200
	sec...	4	46 800
Noyer.........	vert.........	7	25 314
	sec..........	5	37 650

Un débit en feuilles de placage, dont le trait avait fort peu de largeur, et dans lequel l'ouvrier poussait la pièce en même temps qu'il faisait jouer la scie, a donné

ESSENCES.	ÉTATS DU BOIS.	SURFACES DE SCIAGE.	QUANTITÉS D'ACTION PAR MÈTRE CARRÉ.
Cerisier ...... Prunier	»	2m	93 650k

Dans une scierie mue par un manége assez compliqué, le cheval dépensait journellement une quantité d'action de 1 166 400k (Tableau III), et produisait

ESSENCES.	ÉTATS DU BOIS.	SURFACES DE SCIAGE.	QUANTITÉS D'ACTION PAR MÈTRE CARRÉ.
Cerisier.......	»	8m	145 800k
Prunier	»	9	129 600
Racine d'orme.	»	5	233 280

On a trouvé dans des scieries hydrauliques

ESSENCES.	ÉTATS DU BOIS.	SURFACES DE SCIAGE.	Quantités d'action par mètre carré.	ÉPAISSEUR DES PIÈCES.
Chêne....	vert et un peu noueux....	»	31 243k	0m,34
	sec et noueux	»	61 500	0,32
	sec et sans nœuds.....	»	114 000	0,54
Merisier..	sec	»	58 230	0,38

Quatre sciages à la main exécutés, le premier avec une scie tournante, les deux suivants avec une scie de scierie hydraulique, et le quatrième avec la scie à crochets des scieurs de long (239), ont fourni

ESSENCE.	ÉTATS DU BOIS.	SURFACES DE SCIAGE.	Quantités d'action par mètre carré.	LARGEUR DU TRAIT.
Chêne.. ..	très-dur	»	30 968k	0m,001 5
	gras, et sec à demi......	»	71 296	0,004 5
	id......	»	93 235	0,004 5
	id.....	»	32 071	0,003 75

Le peu de concordance de tous ces résultats est bien propre à faire voir qu'il est impossible, pour ainsi dire, d'assigner à T une valeur tant soit peu précise relativement à chaque essence.

259. Il convient, avant de terminer, de donner les raisons qui nous ont portés à négliger le frottement du boulon par lequel la bielle est unie au châssis. D'abord, le rayon de ce boulon et l'amplitude des oscillations de la bielle sont trop faibles pour que la quantité d'action qui peut être consommée soit de quelque importance; ensuite, l'effort devient favorable à la puissance, après lui avoir été défavorable.

Effectivement, dans l'ascension, et pendant que la bielle D s'écarte de la verticale (P. IV, F. 8), l'œil A tourne de droite à gauche, et le frottement tangentiel formant une résistance F dirigée de bas en haut à peu près, se décompose en deux parties, l'une qui tend à soulever le châssis, l'autre qui tend à éloigner la scie du fond du trait. Pendant le reste de l'ascension, la bielle D se rapproche de la verticale (F. 9), l'œil A tourne de gauche à droite, le frottement F agit à peu près de haut en bas, l'une de ses parties s'ajoute au poids du châssis, l'autre pousse la scie contre le fond du trait.

Dans la descente, la bielle D s'éloigne d'abord de la verticale (F. 10), et l'œil A tourne encore de gauche à droite; mais comme le contact est à l'opposite de sa position précédente, le frottement F agit à peu près de bas en haut, l'une de ses parties repousse le châssis, l'autre presse la scie contre le fond du trait. Au contraire, durant le reste de la descente, la bielle D se rapproche de la verticale (F. 11), l'œil A tourne de droite à gauche, le frottement F agit presque de haut en bas, l'une de ses parties s'ajoute au poids du châssis, et l'autre éloigne la scie du fond du trait.

260. Appliquons les formules précédemment établies (252) à l'ancienne scierie qu'avait l'arsenal de Metz. D'après un lever de cette machine,

$$\rho^{v}=0^{m},008,\quad P'''=972^{kg},\quad r''=0^{m},055,\quad f_5'=0,25,$$
$$f_1=0,15,\quad k''=8,\quad r'=0^{m},105,\quad f_4'=0,19,\quad \rho^{iv}=0^{m},027,$$
$$p''=200^{kg},\quad r_1=0^{m},81,\quad \varepsilon'=30^{\circ},\quad f_3'=0,19,\quad \rho'''=0^{m},015,$$
$$p'=40^{kg},\quad \beta'=20^{\circ},\quad \gamma'=10^{\circ},\quad l'=2^{m},27,\quad \alpha'=9^{\circ},$$
$$P'+p=224^{kg},\quad l=3^{m},\quad b=0^{m},365,\quad f=0,15,\quad f_1'=0,19,$$
$$\rho'=0^{m},03,\quad f_2'=0,19,\quad \rho''=0^{m},03,\quad P''=372^{kg},\quad R''=0^{m},3,$$
$$k=48,\quad k'=15,\quad R'=0^{m},96,\quad f'=0,19,\quad \rho=0^{m},04,$$
$$P=1836^{kg},\quad R=1^{m},82,\quad \alpha=0 \text{ à peu près.}$$

Nous ferons pour la distance du pied-de-biche à son axe de rotation, comme nous avons fait pour les frottements, c'est-à-dire que nous augmenterons sa valeur habituelle, à l'effet de mettre la machine dans des circonstances défavorables, et nous poserons $r=0^{m},13$.

Il résulte de nos données

$$\sin\varepsilon'=0,5,\quad \cos\varepsilon'=0,866,\quad \cos\beta'=0,9397,\quad \cos\gamma'=0,985,$$
$$\sin\alpha'=0,156,\quad \cos\alpha'=0,988,$$

puis

$$q''=\frac{0,96\times0,25\times0^{m},008\times972^{kg}}{0^{m},055-0,4\times0,25\times0^{m},008}=34^{kg},556,$$

$$q'=34^{kg},556\left(1+\frac{3,1416\times0,15}{8}\right)=36^{kg},59,$$

$$q=\left\{\frac{36^{kg},59\,(0^{m},105+0,4\times0,19\times0^{m},027)+0,96\times 0,19\times0^{m},027\times200^{kg}}{0^{m},81+0,19\times0^{m},027(0,96\times0,5+0,4\times0,866)}\right\}=5^{kg},989,$$

$$Q'''=\left\{\frac{5^{kg},989(0^{m},13+0,96\times0,19\times0^{m},015\times0,5+0,4\times 0,19\times0^{m},015\times0,866)+0,96\times0,19\times0^{m},015\times40^{kg}}{0,9397\times0,985(2^{m},27-0,96\times0,19\times0^{m},015\times 0,988-0,4\times0,19\times0^{m},015\times0,156)}\right\}=0^{kg},4285,$$

et

$$X=X'+0^{kg},4285.$$

Il est évident que la valeur de Q''', fraction de kilo-

gramme, peut être négligée devant l'effort X′ qu'exige le sciage; mais il convient, avant de la supprimer, d'examiner si elle ne produit pas une quantité d'action importante. Or, la descente du châssis

$$2b = 2 \times 0^{m},365 = 0^{m},73\,;$$

il y a au plus 90 oscillations par minute ou $^{90}/_{60}$ en 1″, et le chemin vertical du boulon B de la patte BQ (P. IV, F. 4) est, au maximum, $0^{m},73\,\frac{90}{60} = 1^{m},095$. Comme le pied-de-biche ne pousse la roue à rochet que pendant environ les $^{3}/_{4}$ de chaque descente, l'effort Q‴ du châssis sur cette barre n'a pas lieu pendant le parcours entier de $1^{m},095$, et la quantité d'action due à cet effort n'atteint jamais tout à fait $0^{kg},4285 \times 1^{m},095 = 0^{k},47$, nombre qui n'aurait pourtant qu'une influence insignifiante sur le travail total de la machine.

Ainsi, notre dernière équation peut se réduire à $X = X'$. Il s'ensuit

$$E'' = \frac{6 \times 9^{mm}(X' - 224^{kg})}{6 \times 9^{mm} - 2(0^{m},365)^2 - 3 \times 0,15 \times 0^{m},365 \times 3^{m} \times 3,1416} = \frac{54^{mm}X' - 12096^{kg} \times 1^{mm}}{52^{mm},186} = 1,0348X' - 231^{kg},8.$$

D'ailleurs,

$$E' = \frac{6 \times 9^{mm} \times 224^{kg}}{52^{mm},186} = 231^{kg},8\,;$$

et comme la lanterne à manivelle est entre la vanne et l'arbre hydraulique, c'est le signe supérieur qu'il faut prendre pour le terme qui en a deux dans Q″. Par conséquent,

$$E' + E'' = 1,0348X', \quad E' - E'' = 463^{kg},6 - 1,0348X',$$

$$Q'' = \left\{\begin{array}{l} 1{,}0348X'\left[0^m{,}365 - \frac{(0^m{,}365)^3}{3\times 9^{mm}} + 0{,}4\times 0{,}19\times 0^m{,}03\,\frac{0^m{,}365}{3^m} + \right. \\ \left. 0{,}19\times 0^m{,}03\,\frac{3{,}1416}{2}\right] + (463^{kg}{,}6 - 1{,}0348X')\times\left[0{,}48\times 0{,}19\times\right. \\ \left. 0^m{,}03\times 3{,}1416 - 0{,}24\times 0{,}19\times 0^m{,}03\times 3{,}1416\,\frac{(0^m{,}365)^2}{9^{mm}}\right] + \\ \hline \frac{0{,}96\times 0{,}19\times 0^m{,}03\times 3{,}1416\times 372^{kg}}{(0^m{,}3 - 0{,}96\times 0{,}19\times 0^m{,}03)3{,}1416} \end{array}\right. =$$

$$0{,}383X' + 4^{kg}{,}17 - 0{,}009X' + 6^{kg}{,}324 = 0{,}374X' + 10^{kg}{,}49,$$

$$Q' = (0{,}374X' + \overset{kg}{10{,}49})\left(1 + 3{,}1416\times 0{,}15\,\frac{48+15}{48\times 15}\right) = 0{,}389X' + \overset{kg}{10{,}91},$$

$$Q = \frac{(0{,}389X' + 10^{kg}{,}91)(0^m{,}96 - 0{,}96\times 0{,}19\times 0^m{,}04) + 0{,}96\times 0{,}19\times 0^m{,}04\times 1836^{kg}}{1^m{,}82 - 0{,}19\times 0^m{,}04\times 0{,}4} =$$

$$\frac{0^m{,}371X' + \overset{k}{10{,}4} + \overset{k}{13{,}403}}{1^m{,}817} = 0{,}204X' + \overset{kg}{13{,}1}.$$

Soient maintenant la quantité d'action consommée par le sciage d'un mètre carré, $T = 90\,000^k$, et l'épaisseur du bois dans le plan de la scie, $e = 0^m{,}3$. Comme le chemin du chariot pendant une descente, $c = 0^m{,}0023$, et que la partie de la descente pendant laquelle mord la scie,

$$2b_1 = 0^m{,}73\times 0{,}75 = 0^m{,}5475,$$

$$X' = \frac{\overset{k}{90000}\times 0{,}0023\times 0{,}3}{0^m{,}5475} = 113^{kg}{,}425.$$

Finalement donc,

$$Q = 0{,}204\times \overset{kg}{113{,}425} + \overset{kg}{13{,}1} = \overset{kg}{36{,}33}.$$

261. Pour montrer comment on déduit de Q le travail $Q\upsilon'$ de la roue hydraulique, quand les descentes du châssis ont été observées pendant un certain temps, nous supposerons qu'on en ait trouvé 60 par minute ou une par seconde. La lanterne à manivelle fait donc

un tour dans le même temps; le hérisson exécute une fraction de tour $\frac{K'}{K}=\frac{15}{48}$; il en est de même pour la roue de côté; la vitesse de cette roue

$$v'=2\pi R\times\frac{15}{48}=2\times3{,}1416\times1^{m},82\times\frac{15}{48}=3^{m},574,$$

et
$$Qv'=\overset{kg}{36{,}33}\times3^{m},574=\overset{k}{129{,}84},$$

pour une seule scie. Mais, lorsque la pièce à débiter a seulement $0^{m},3$ d'épaisseur, le châssis porte ordinairement 3 lames. Si donc l'épaisseur e est la même dans chacun des plans verticaux où elles se meuvent, la valeur de Q relative à une seule scie doit être triplée, et l'on obtient pour Qv',

$$129^{k},84\times3=389^{k},52=5^{ch},19.$$

262. Il est bon de faire voir aussi comment se détermine la quantité d'action T nécessaire pour le sciage de 1^{mm}, au moyen de l'effort réellement exercé par la roue hydraulique.

L'ancienne scierie de Metz (185) donnait $Q=60^{kg},25$, et il en résultait pour la résistance due au sciage,

$$X'=\frac{\overset{kg}{60{,}25}-\overset{kg}{13{,}1}}{0{,}204}=231^{kg},13.$$

Comme cette résistance s'exerçait le long de $0^{m},5475$ pendant une descente du châssis, elle consommait sur ce chemin un travail de

$$231^{kg},13\times0^{m},5475=126^{k},544.$$

Or, dans une expérience faite sur la même scierie, la

pièce de bois avait $0^{m},5$ d'épaisseur, et chaque descente produisait une surface sciée de

$$0^{m},5 \times 0^{m},0023 = 0^{mm},00115.$$

Par conséquent, le sciage de 1^{mm} exigeait un travail

$$T = \frac{126^{k},544}{0,00115} = 110038^{k},26.$$

Ce nombre n'est point exagéré, et les formules qui ont fourni la valeur de X' peuvent être employées avec confiance, car les tableaux du n.° 258 montrent que le sciage d'une pièce de chêne épaisse de $0^{m},54$ peut consommer par mètre carré 114000^{k}, lorsque la scie exécute de 90 à 93 oscillations en 1'; résultat que feu M. Woisard a déduit d'une expérience faite, au moyen du frein, sur une scierie qui remplissait toutes les conditions d'une bonne machine.

263. Enfin, il est facile de calculer la quantité d'action absorbée par les résistances accessoires, quand on connaît celle que transmet la roue hydraulique en 1'', et celle qu'exige le sciage pendant une descente du châssis. Nous avons trouvé (185) pour la deuxième, $Qv' = 208^{k},23$, v' étant $3^{m},456$, et nous venons d'obtenir pour la troisième $126^{k},544$. Le nombre des descentes en 1'' vaut le nombre des tours de la lanterne à manivelle; ce dernier vaut celui du hérisson ou de la roue hydraulique multiplié par le rapport $\frac{k}{k'}$, et cette roue fait en 1'' autant de rotations complètes qu'il y a d'unités dans $\frac{v'}{2\pi R}$. Par conséquent, la scie exécute en 1'' un nombre de descentes

$$\frac{v'}{2\pi R} \times \frac{k}{k'} = \frac{3^m,456 \times 48}{2 \times 3,1416 \times 1^m,82 \times 15} = 0,967\,;$$

le sciage consomme dans le même temps

$$126^k,544 \times 0,967 = 122^k,37\,,$$

et les résistances accessoires absorbent

$$208^k,23 - 122^k,37 = 85^k,86\,,$$

ce qui forme les 0,412 du travail total.

264. Cherchons maintenant les dimensions du volant de fonte qu'il faudrait monter sur l'arbre de la lanterne à manivelle pour rendre le mouvement presque uniforme. Nous supposerons le cas ci-dessus où le travail de la roue hydraulique vaut celui de $5^{ch},19$, et nous emploierons les formules du n.° 245. Il s'ensuivra

$$\delta = 7200^{kg}, \quad N = 5,19\,, \quad n = 60.$$

Si, de plus, les conditions sont que la vitesse moyenne $V = 5^m$, et que sa plus grande variation n'en surpasse jamais $^1/_{20}$,

$$k = 20\,;\ P = 4645^{kg}\frac{20 \times 5,19}{60 \times 25} = 321^{kg},434\,;$$

le rayon moyen

$$R = \frac{60 \times 5^m}{2 \times 3,1416 \times 60} = \frac{5^m}{2 \times 3,1416} = 0^m,79\,;$$

$$R' + R'' = 0^m,79 \times 2 = 1^m,58\,; \quad R'^2 - R''^2 = \frac{321^{kg},434}{3,1416 \times 7200^{kg} \times l}.$$

Il faut se donner la largeur de la couronne ou son épaisseur. Soit $l = 0^m,15$. On trouve alors

$$R'^2 - R''^2 = 0^{mm},0474, \quad R' - R'' = \frac{R'^2 - R''^2}{R' + R''} = \frac{0^{mm},0474}{1^m,58} = 0^m,03\,,$$

$$R'=\frac{1^m,58+0^m,03}{2}=0^m,805,\quad R''=\frac{1^m,58-0^m,03}{2}=0^m,775.$$

265. La localité dans laquelle doit être établie une scierie force parfois à mettre une telle distance entre l'arbre hydraulique et l'arbre à manivelle, qu'il devient impossible d'employer un engrenage pour communiquer au second la vitesse tangentielle du premier. C'est alors d'une courroie sans fin, en cuir corroyé, qu'on fait usage. Le hérisson est remplacé par un tambour A (P. IV, F. 12), la lanterne par une poulie C, et la courroie FGHIF, convenablement tendue, embrasse les deux roues. Le même appareil sert aussi, dans les arsenaux, pour lier les divers tours à un seul arbre-moteur; mais ce que nous allons dire des courroies de transmission considérées dans une scierie, montrera suffisamment la marche à suivre pour tenir compte des résistances accessoires qu'elles font naître dans les autres machines.

Les deux roues embrassées par la courroie sans fin ne peuvent la recevoir dans une gorge, car elle les abandonnerait bientôt en glissant dans le sens des axes, à cause de la force centrifuge et des points d'appui qu'offriraient les rebords. Des surfaces cylindriques ne seraient guère plus efficaces pour empêcher la chute de la courroie. Il faut que le profil du tambour et celui de la poulie présentent chacun un arc de cercle dont la flèche soit environ 0,1 de la corde, afin que le cuir des bords, ayant besoin d'une plus grande tension pour surmonter la convexité, puisse résister aux efforts qui tendent à faire sortir la courroie de l'intervalle compris entre les faces verticales de chaque roue.

C'est en vertu d'une espèce d'engrenage formé par les aspérités, qu'une courroie reçoit du tambour son mouve-

ment de va-et-vient et fait tourner la poulie. Si donc les tensions t, t' des deux parties ou brins FI, GH ne rendent pas cet engrenage suffisant, la première roue glisse sur le cuir, la courroie reste au repos, et il en est de même de la poulie; ou bien les brins ne prennent pas toute la vitesse de la circonférence du tambour, ils ne communiquent point à l'autre roue toute celle qu'ils ont reçue, et la vitesse tangentielle de l'arbre hydraulique n'est pas transmise intégralement à l'arbre de la manivelle. Il est facile de reconnaître s'il en est ainsi ou non, en observant les nombres de tours accomplis par les deux roues dans le même temps: lorsque ces nombres n'ont pas le rapport inverse des rayons, il en est de même des vitesses angulaires; les vitesses tangentielles ne sont point égales, et la courroie ne se trouve pas assez tendue.

Mais en augmentant les tensions, il faut éviter de dépasser le point où elles suffisent à empêcher tout glissement dans le sens du mouvement, car on ferait croître inutilement la raideur de la courroie et les frottements des tourillons de chaque arbre.

266. Si nous avons supposé tacitement l'inégalité de t et de t', c'est qu'en effet elle doit toujours exister pendant la rotation; autrement, la résultante des deux efforts passerait par le centre C de la poulie, et ne pourrait donner aucun mouvement à cette roue. Or, la même résultante agit nécessairement, par rapport à C, du côté du brin FI qui chemine de la poulie vers le tambour A, et qu'on nomme *brin conducteur*. La tension t de ce brin surpasse donc la tension t' du *brin conduit* GH qui chemine du tambour vers la poulie. Avant le mouvement, les brins étaient également tendus, puisque la résultante de leurs efforts tangentiels passant par C se trouvait dirigée selon la bissectrice de l'angle com-

pris entre FI, GH, et les particules du cuir avaient le même écartement dans ces brins. Comme on peut bien admettre que la courroie ne change pas de longueur en commençant à se mouvoir, l'écartement des particules de GH diminue autant que celui des particules de FI augmente: en d'autres termes, la tension du premier brin décroît précisément de la même quantité que celle du second s'accroît. Si donc T′ indique la tension commune au repos,

$$T' - t' = t - T', \qquad T' = \frac{t + t'}{2},$$

et il ne s'agit plus, pour déterminer la tension T′ qu'il faut donner à la courroie, que de chercher le rapport qui existe entre t, t', quand le glissement des roues sur le cuir est sur le point de naître, puis la relation de t et de l'effort Q qu'exerce tangentiellement la roue hydraulique.

267. Considérons une partie quelconque GK de l'arc embrassé sur le tambour; nommons s cette partie, p la résultante des pressions que lui fait supporter la tension de la courroie, t'' la tension en K, et φ le nombre des degrés de l'angle formé par le rayon AK sur celui qui coupe au milieu l'arc infiniment petit $KL = ds$. La tension en L est $t'' + dt''$, et l'accroissement dt'' provient du frottement sur KL. Comme ce frottement est produit par la pression dp, $dt'' = fdp$, lorsque le glissement va commencer. Mais, avant le mouvement, le frottement n'a pas lieu; il n'y a en L qu'une tension t'', de sorte que dp est la résultante de deux forces égales tangentielles, concourantes, et que $dp = 2t'' \sin\varphi$. Or, si r_2 désigne le rayon du tambour,

$$r_2 \sin\varphi = \frac{ds}{2}, \quad dp = t''\frac{ds}{r_2}, \quad dt'' = ft''\frac{ds}{r_2}, \quad \frac{dt''}{t''} = f\frac{ds}{r_2},$$

et

$$\text{Log}'t'' = f\frac{s}{r_2} + \text{C}.$$

Prenant l'intégrale de G en F, c'est-à-dire de $s=0$ à $s=\frac{2\pi r_2}{360}n$, n étant le nombre des degrés de l'arc GF qu'embrasse la courroie sur le tambour, on obtient

$$\text{Log}'t - \text{Log}'t' = f\frac{\pi n}{180}, \qquad \text{Log}'\frac{t}{t'} = f\frac{\pi n}{180},$$

et

$$\frac{t}{t'} = e^{f\frac{\pi n}{180}}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{t}{t'} = \text{K},$$

si, pour plus de brièveté, nous représentons par K le nombre $(2,7183)^{f\frac{\pi n}{180}}$.

268. Ainsi, le glissement sera seulement sur le point de naître quand le rapport de la tension du brin conducteur à celle du brin conduit vaudra K, et la vitesse tangentielle du tambour se trouvera transmise intégralement à la circonférence de la poulie. Si le rapport n'atteignait pas K, c'est que les tensions t_1, t'_1 qu'auraient alors les brins surpasseraient t, t', car celles-ci ne peuvent varier l'une sans l'autre ni inversement, par suite des variations de f et de n. La tension correspondante T'_1 qui devrait avoir lieu au repos, surpasserait donc aussi T', et les axes éprouveraient un excès de pression; mais la vitesse serait encore transmise sans perte, puisque le frottement aurait plus d'intensité qu'il ne faut. Il s'ensuit que le glissement a lieu lorsque le rapport des tensions surpasse K, ou lorsqu'on a $t > t'\text{K}$.

Conséquemment, la valeur à la fois convenable et maxima de t est donnée par la formule $t = t'\text{K}$. Comme

elle se trouve indépendante de la largeur du cuir, ce n'est pas en augmentant cette largeur qu'on peut empêcher le glissement; quant à donner, dans la même vue, un plus grand rayon au tambour, ce serait parfois dépasser le but, car il en résulterait l'augmentation de n, et si l'on avait $\frac{t}{t'} < K$, les frottements des tourillons s'accroîtraient en même temps que l'obstacle qui s'oppose au glissement. Il faudrait, pour que la modification du tambour fût réellement avantageuse, qu'on prît le nouveau nombre K pour valeur du rapport $\frac{t}{t'}$: l'obstacle du glissement ne serait pas plus grand, mais les frottements des tourillons se trouveraient diminués, puisque l'accroissement de $\frac{t}{t'}$ ferait décroître chaque tension.

269. Du reste, le rapport K varie avec la nature et l'état des substances en contact. Les expériences de M. Morin fournissent le tableau suivant :

NATURE des roues.	NATURE du communicateur.	ÉTAT du communicateur.	VALEUR de f.
Bois......	Cuir............	onctueux.......	0,47
Id.......	*Id.*..........	neuf............	0,50
Id.......	Corde de chanvre.	....	0,50
Fonte.....	Cuir..	onctueux.......	0,28
Id.......	*Id.*..........	humide.........	0,38

Nous croyons toutefois que ces valeurs de f doivent être diminuées de $^1/_{10}$ pour les applications; car, si le rapport $\frac{t}{t'}$ étant d'abord aussi grand qu'il peut être relativement à la transmission de la vitesse, il arrivait

que la résistance totale de la poulie augmentât, t en ferait autant, t' au contraire diminuerait, leur rapport surpasserait K, et le glissement aurait lieu.

270. Puisqu'il convient que les tensions soient plutôt un peu trop fortes que trop faibles, nous ferons abstraction des résistances accessoires, pour déterminer la relation qui lie l'effort du brin conducteur à celui dont la roue hydraulique est capable; de sorte que Q aidé de t' aura seulement à vaincre la résistance t. L'égalité des quantités d'action relatives à un tour complet, ou celle des moments, donnera donc $QR + t'r_2 = tr_2$. De là résultent successivement les équations

$$tr_2 - \frac{t}{K}r_2 = QR, \qquad t = Q\frac{R}{r_2} \times \frac{K}{K-1},$$

$$t' = Q\frac{R}{r_2} \times \frac{1}{K-1}, \qquad T' = Q\frac{R}{r_2} \times \frac{K+1}{2(K-1)}.$$

Cette valeur de la tension que doit recevoir la courroie avant le mouvement étant plus grande qu'il ne faut, comme celle de t qui l'a fournie, elle forme une limite qu'on ne peut dépasser.

L'expérience indique $0^{kg},25$ par millimètre carré de section droite pour la force du cuir. Si donc la valeur de t est divisée par 0,25, le quotient donnera la grandeur de la section en millimètres carrés, et l'épaisseur ordinaire des conrroies déterminera la largeur de celle qu'il faut employer.

271. L'élasticité imparfaite de la courroie fait que les tensions des deux brins ne reprennent pas exactement les valeurs qu'elles avaient avant l'augmentation survenue dans la résistance de la poulie. Il peut donc arriver que bientôt leur rapport surpasse K, et qu'il y ait glissement. Pour prévenir la variation de

vitesse qui en résulterait, on emploie un rouleau de tension M (P. IV, F. 13), mobile autour de son axe et autour d'un axe fixe N; ce rouleau appuyant sur le brin conducteur FI, par l'effet de son poids ou par celui d'un ressort placé contre le levier MN, plie ce brin selon un angle F'MI', et rétablit ainsi la valeur de la tension t, ou du moins il met cette tension et le nouvel arc embrassé F'FG dans un rapport tel que la vitesse tangentielle du tambour continue d'être transmise intégralement à la poulie.

Mais, pour que le rouleau soit efficace, il lui faut évidemment un poids p basé sur la tension T' de la courroie au repos. Cette tension appartient à la fois aux parties F'M, MI' du brin conducteur; ces parties font par conséquent le même angle avec FI; la bissectrice de leur angle F'MI' est d'équerre sur la même droite, et forme avec la direction de p un angle égal à δ. Si donc nous désignons par 2λ l'angle obtus et arbitraire selon lequel doit être plié le brin conducteur, l'équilibre de $p\cos\delta$ et des deux tensions T' donne

$$p\cos\delta : T' :: \sin 2\lambda : \sin\lambda, \qquad \text{puis} \qquad p\cos\delta = T'\frac{2\sin\lambda\cos\lambda}{\sin\lambda}.$$

Ainsi, le poids du rouleau, ou la pression que devra exercer le ressort perpendiculairement à AC, sera déterminé par la formule

$$p = \frac{2T'\cos\lambda}{\cos\delta}.$$

272. Il nous reste à voir quelle modification la substitution d'une courroie sans fin à l'engrenage opère dans la valeur de l'effort Q de la roue hydraulique d'une scierie.

La tension du brin conducteur FI (P. IV, F. 12) varie

de l'ascension à la descente, comme la résistance qui s'oppose au mouvement de la scie. C'est donc à une tension moyenne que l'effort moyen et constant Q doit faire équilibre. Conservons la notation du n.° 252, et nommons t_1 la tension de FI dans l'ascension, t_2 celle que prend le même brin dans la descente, t leur moyenne. Les tensions correspondantes du brin conduit GH (267) seront $\frac{t_1}{K}, \frac{t_2}{K}, \frac{t}{K}$, forces qui agissent en sens contraires des premières, soit sur la poulie C, soit sur le tambour A, et la raideur de la courroie, considérée relativement au tambour (8), aura pour expression $\frac{d^{\mu}(a''+b''t)}{2r_2}$, d désignant l'épaisseur du cuir, a'', b'', μ étant des nombres que l'expérience devra fournir.

Les efforts qui font tourner l'arbre hydraulique sont Q et $\frac{t}{K}$. Les résistances qui s'opposent à la rotation sont t, $\frac{d^{\mu}(a''+b''t)}{2r_2}$, et le frottement des tourillons. Ce frottement est produit par les forces verticales P, $Q\sin\alpha$, $-t\sin\delta$, $\frac{t}{K}\sin\delta$, et par les forces horizontales $Q\cos\alpha$, $\mp t\cos\delta$, $\mp\frac{t}{K}\cos\delta$, selon que la poulie se trouve du côté de la vanne ou du côté opposé; il vaut donc

$$f'\left\{0,96\left[P+Q\sin\alpha-t\left(1-\frac{1}{K}\right)\sin\delta\right]+0,4\left[Q\cos\alpha\mp t\left(1+\frac{1}{K}\right)\cos\delta\right]\right\},$$

si la somme des forces verticales surpasse celle des

forces horizontales (tabl. IX); dans le cas contraire, on changerait de place les coefficients 0,96 et 0,4.

Ainsi, l'égalité des moments donne

$$QR+\frac{t}{K}r_2=\left\{tr_2+\frac{d^{\mu}(a''+b''t)}{2}+f'\rho\left\{0,96\left[P+Q\sin\alpha-t\left(1-\frac{1}{K}\right)\sin\delta\right]+0,4\left[Q\cos\alpha\mp t\left(1+\frac{1}{K}\right)\cos\delta\right]\right\}\right\},$$

puis

$$Q=\frac{t\left[r_2\left(1-\frac{1}{K}\right)+\frac{d^{\mu}b''}{2}-0,96f'\rho\left(1-\frac{1}{K}\right)\sin\delta\mp 0,4f'\rho\left(1+\frac{1}{K}\right)\cos\delta\right]+0,96f'\rho P+\frac{d^{\mu}a''}{2}}{R-f'\rho(0,96\sin\alpha+0,4\cos\alpha)}.$$

273. Il faut maintenant déterminer t_1, t_2, afin d'en déduire leur moyenne t. Or, t_1 est la puissance qui opère l'ascension; les résistances sont alors

$$E',\quad \frac{t_1}{K},\quad \frac{d^{\mu}\left(a''+b''\frac{t_1}{K}\right)}{2r_3},$$

r_3 désignant le rayon de la poulie, et le frottement des tourillons de l'arbre C. Ce frottement provient des forces verticales P'', $E'\cos\beta$, $t_1\sin\delta$, $-\frac{t_1}{K}\sin\delta$, et des forces horizontales $E'\sin\beta$, $\pm t_1\cos\delta$, $\pm\frac{t_1}{K}\cos\delta$. Représentant donc (253) par N' le coefficient total de E' dans la valeur de $Q_1''R''\pi$, nous aurons évidemment

$$t_1r_3\pi=\left\{E'N'+\frac{t_1}{K}r_3\pi+\frac{d^{\mu}\left(a''+b''\frac{t_1}{K}\right)\pi}{2}+f_1'\rho'\pi\left\{0,96\left[P''+t_1\left(1-\frac{1}{K}\right)\sin\delta\right]\pm 0,4t_1\left(1+\frac{1}{K}\right)\cos\delta\right\}\right\},$$

et

$$t_1 = \frac{E'N' + \frac{d^\mu a''\pi}{2} + 0{,}96 f_1' \rho' \pi P''}{r_3\pi\left(1-\frac{1}{K}\right) - \frac{d^\mu b''\pi}{2K} - f'\rho'\pi\left[0{,}96\left(1-\frac{1}{K}\right)\sin\delta \pm 0{,}4\left(1+\frac{1}{K}\right)\cos\delta\right]}.$$

Dans la descente, la puissance est t_2, les résistances sont

$$E'', \quad \frac{t_2}{K}, \quad \frac{d^\mu\left(a''+b''\frac{t_2}{K}\right)}{2r_3},$$

et le frottement des tourillons de l'arbre C. Ce frottement résulte des forces verticales P'', $-E''\cos\beta$, $t_2\sin\delta$, $-\frac{t_2}{K}\sin\delta$, et des forces horizontales $E''\sin\beta$, $\pm t_2\cos\delta$, $\pm\frac{t_2}{K}\cos\delta$. Si donc N'' représente le coefficient total de E'' dans l'expression de $Q_2''R''\pi$, on a (254)

$$t_2 r_3 \pi = \left\{ E''N'' + \frac{t_2}{K} r_3\pi + \frac{d^\mu\left(a''+b''\frac{t_2}{K}\right)\pi}{2} + f_1'\rho'\pi \left\{ 0{,}96\left[P'' + t_2\left(1-\frac{1}{K}\right)\sin\delta\right] \pm 0{,}4 t_2\left(1+\frac{1}{K}\right)\cos\delta \right\} \right.,$$

et

$$t_2 = \frac{E''N'' + \frac{d^\mu a''\pi}{2} + 0{,}96 f_1' \rho' \pi P''}{r_3\pi\left(1-\frac{1}{K}\right) - \frac{d^\mu b''\pi}{2K} - f_1'\rho'\pi\left[0{,}96\left(1-\frac{1}{K}\right)\sin\delta \pm 0{,}4\left(1+\frac{1}{K}\right)\cos\delta\right]}.$$

Il s'ensuit que, Z représentant le coefficient de $E'+E''$ dans la valeur de Q'', et D le coefficient de $E'-E''$,

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{(E' + E'')Z + (E' - E'')D + \frac{d^{\mu} a'' \pi}{2} + 0{,}96 f_1' \rho' \pi P''}{r_3 \pi \left(1 - \frac{1}{K}\right) - \frac{d^{\mu} b'' \pi}{2K} - f_1' \rho' \pi \left[0{,}96\left(1 - \frac{1}{K}\right)\sin\delta \pm 0{,}4\left(1 + \frac{1}{K}\right)\cos\delta\right]}.$$

274. Mais la tension moyenne t de la courroie ne peut servir qu'à déterminer l'effort moyen Q de la roue hydraulique ; on ne saurait déduire de celle-là, ni de t_1, t_2, la tension T' qui doit avoir lieu au repos, puisque toutes trois sont susceptibles de varier. Le nombre de kilogrammes à mettre pour Q dans l'expression de T' (270) est celui auquel peut atteindre la plus grande résistance possible appliquée tangentiellement à la circonférence de la roue motrice, afin qu'une augmentation survenant dans la résistance principale, il n'en résulte pas le moindre glissement. Or, dans l'ancienne scierie de Metz (185), pendant l'expérience faite sur le sciage (262), on avait, pour le plus grand effort de la roue hydraulique, $Q = 60^{kg},25$, cette roue ayant un rayon $R = 1^{m},82$. Si donc on substituait une courroie sans fin à l'engrenage, et qu'on fît $r_2 = 1^{m},15$, nous aurions

$$T' = 60^{kg},25\, \frac{1^{m},82(K+1)}{2 \times 1^{m},15(K-1)}.$$

Supposons en outre, pour déterminer K, $r_3 = 0^{m},7$, la distance des axes $AC = 3^{m},95$ (P. IV, F. 12), comme dans une scierie à scie ronde établie aussi à Metz, et indiquons par S le concours de AC, FI, GH. La proportion SA : SA — SC :: AG : AG — CH donne

$$SA = 3^{m},95\, \frac{1^{m},15}{1^{m},15 - 0^{m},7} = 10^{m},094.$$

D'ailleurs, $\sin ASG = \frac{AG}{SA}$,

$$\text{Log}\sin ASG = \text{Log}AG - \text{Log}SA = \text{Log}1,15 - \text{Log}10,094 = \bar{1},0566345,$$

$$ASG = 6^\circ 32',$$

$$CAG = 90^\circ - 6^\circ 32' = 83^\circ 28' = GM, \quad FMG = 2GM = 166^\circ 56',$$

l'arc embrassé $FLG = 360^\circ - 166^\circ 56' = 193^\circ 5'$, et $n = 193$ à fort peu près. Si donc la courroie est en cuir neuf, le coefficient du frottement, diminué de 0,1,

$$f = 0,4, \quad \text{et} \quad K = (2,7183)^{0,4 \times 3,1416 \frac{193}{180}}.$$

Il s'ensuit

$$\text{Log}K = 0,4 \times 3,1416 \frac{193}{180} \text{Log}2,7183 = 0,5851777, \quad K = 3,8475,$$

$$\text{et} \quad T' = 60^{kg},25 \frac{1^m,82 \times 4,8475}{2 \times 1^m,15 \times 2,8475} = 81^{kg},148.$$

Pour calculer le poids du rouleau de tension à employer (271), nous supposerons le pli $2\lambda = 174^\circ$ ou $\lambda = 87^\circ$. Comme d'ailleurs $\delta = ASG = 6^\circ 32'$, on a

$$\begin{aligned} \text{Log}\cos\lambda &= \bar{2},7188002 \\ \text{Log}T' &= 1,9092778 \\ \text{Log}2 &= 0,3010300 \\ \text{Compl Log}\cos\delta &= 10,0028296 \\ \text{Log}p &= 0,9319376 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad p = 8^{kg},35.$$

SCIERIE A DÉBIT PLAN ET A SCIE SANS FIN.

275. Les scies droites à mouvement alternatif n'agissant sur le bois que pendant la descente du châssis, causent une grande perte de temps. Aussi a-t-on essayé

à diverses reprises d'y substituer des scies qui coupassent constamment. La scie sans fin fut d'abord proposée. Elle consiste en une lame d'acier dentée L dont les bouts sont réunis par une bonne soudure (P. IV, F. 14), et qui enveloppe deux tambours T, T', à la manière des courroies de transmission. Les axes des tambours sont situés dans un même plan vertical, et les faces cylindriques portent des pointes qui entrent successivement dans des trous dont la lame se trouve percée.

La pièce de bois est placée sur un chariot mis en mouvement par un contre-poids ou tout autre moteur; il chemine parallèlement aux axes des tambours. Enfin, pour que la scie ait toujours le degré de tension nécessaire, l'arbre du tambour T', qui ne porte pas la manivelle M, repose sur deux leviers qu'on peut, au moyen de coins, faire monter ou descendre d'une quantité aussi petite qu'il convient.

Cet appareil a été employé en France, avec avantage, dit-on, pour refendre des liteaux; mais il est présumable que la raideur de la lame consomme une quantité d'action à peu près égale à celle qu'économise la diminution du temps.

SCIERIE A DÉBIT PLAN ET A SCIE RONDE.

276. On préfère aujourd'hui aux scies sans fin, sujettes à fouetter, à dévier, les scies rondes à lame circulaire dont se servent depuis long-temps les Hollandais, pour le débit du bois de placage, qu'on a introduites, il y a quelques années, en Angleterre, puis en France, et qui ont été employées notamment au recepage sous l'eau des pilots du pont de Bordeaux. Elles sont mises en mouvement au moyen de tambours et de courroies sans fin.

L'arbre A sur lequel se monte une scie ronde (P. IV, F. 15) est ordinairement horizontal. Il faut alors que l'anneau plat L qui doit s'introduire dans la pièce de bois forme un plan vertical, pour que les dents décrivent toutes le même cercle, que les unes ne mordent pas à droite et les autres à gauche de la voie, que la résistance principale ne se trouve pas inutilement augmentée, et que la perte de matière soit aussi faible qu'elle peut l'être.

Mais il est difficile de rendre une surface parfaitement plane, et surtout de la maintenir exactement perpendiculaire à un axe, quand elle est mince et en prise à de grandes forces; la difficulté augmente même bien plus rapidement que l'étendue de cette surface. Aussi se borne-t-on en France aux scies rondes d'un diamètre de $0^{m},66$. La lame L est serrée entre deux plateaux P de $0^{m},1$ de rayon, et il reste $0^{m},23$ pour la largeur de l'anneau qui doit pénétrer dans la pièce à débiter; de sorte que cette pièce ne peut avoir plus de $0^{m},23$ d'épaisseur, car une scie ronde coupe par sa partie supérieure et non par le côté.

On a essayé en Angleterre de dépasser ces dimensions. Le premier volume de l'Architecture hydraulique de Bélidor, commentée par Navier, contient la description d'une machine à scier dans laquelle se trouvent des scies rondes d'un grand diamètre; mais rien ne prouve que le succès ait répondu à l'attente de l'inventeur.

Il est certain toutefois qu'une scie ronde d'un diamètre de 6^{m} débite très-bien les bois de placage : la feuille mince qu'elle produit alors est facilement tenue écartée du madrier, et par conséquent, la lame peut être renforcée, sur une face, immédiatement après les dents, ce qui l'empêche de se fausser.

277. Navier estime à environ 3^{m} la vitesse que peut

prendre, sans inconvénient, la circonférence d'une scie ronde; tandis que des ouvrages périodiques ont publié qu'en certains établissements, on emploie des scies rondes d'un diamètre de $0^m,33$, qui font 700 tours par minute, ou dont la vitesse à la circonférence est d'à peu près 12^m. Il paraît que, pour les travaux ordinaires, on se contente habituellement d'une vitesse bien plus voisine de l'estimation de Navier que du nombre donné par les journaux scientifiques. Au reste, la vitesse d'une scie ronde dépend, comme celle d'une scie droite, de la dureté, de l'épaisseur du bois, et de la marche du chariot.

278. Mais ce n'est pas toujours un chariot qui pousse contre la lame la pièce à débiter. Quand cette pièce a peu d'épaisseur, on dispose un banc ou établi B au-dessus de l'axe de la scie, de manière que les plateaux de renfort P restent au-dessous de la face supérieure pendant toute leur rotation. Une grande mortaise CD donne passage à l'anneau qui doit pénétrer dans le bois; deux autres mortaises perpendiculaires à la précédente reçoivent les boulons qui fixent sur le banc, dans le sens de la longueur, une tringle T contre laquelle un ouvrier puisse appuyer la pièce de bois M, et la diriger ainsi avec facilité, parallèlement ou obliquement au plan de la scie, tout en la poussant contre les dents. De cette façon, la profondeur du trait se règle aisément sur la dureté des différentes parties du madrier, avantage que n'offrent point les chariots.

SCIERIE A DÉBIT COURBE ET A SCIES DROITES.

279. Nous avons jusqu'ici supposé planes les surfaces à produire dans une scierie; mais il est visible qu'au moyen d'une lame droite ou convenablement ployée,

on peut aussi obtenir des surfaces courbes. Nous ne parlerons que du sciage exécuté selon la surface cylindrique, la plus usitée des surfaces développables que peuvent donner les scies droites, et de tous les mécanismes, plus ou moins ingénieux, plus ou moins simples, proposés pour cette sorte de sciage, nous décrirons seulement celui qu'a inventé le garde du génie Ségard, et qui est employé depuis long-temps, avec un constant succès, dans l'usine des Pucelles, à Metz. Il nous paraît avoir plusieurs avantages sur tous les autres : les frais de son établissement et de son entretien dans une scierie ordinaire sont très-faibles; il s'applique aisément à toutes les localités; sa solidité est des plus grandes, et ses sujétions ne sont pas autres que celles de toutes les scieries.

Pour bien juger du mérite d'une invention, il est nécessaire de poser les principes généraux sur lesquels elle a dû être basée. Or, un mécanisme propre à débiter les bois circulairement doit permettre à la scie de parcourir une grande portion de circonférence, et même des arcs de rayons différents. Comme il serait difficile de faire mouvoir le châssis autrement que dans un plan vertical, c'est la pièce qui se mouvra en cercle, de manière que tous les points d'un arc tracé sur la face supérieure se présentent successivement aux dents de la scie. Il faut donc placer le bois sur un chariot à pivot fixe, et disposer les choses de façon que le plan vertical de la lame soit constamment tangent au cylindre droit élevé sur l'arc. Cela nécessite que le pivot soit le centre de l'arc tracé pour la voie de la scie, et qu'il se trouve dans le plan antérieur du châssis. Il faut encore pouvoir approcher ou écarter la lame du pivot, selon qu'on diminue ou qu'on augmente le rayon de la voie. Enfin, pour régulariser la marche de l'opérateur et pour éco-

nomiser le temps, il convient d'employer à la fois au moins deux lames parallèles montées sur le même châssis et convenablement écartées : elles se guideront mutuellement, et l'on n'aura pas à replacer la pièce autant de fois qu'il y a de voies tracées.

280. Voyons maintenant comment ces principes ont été appliqués dans l'usine du génie. Le chariot est un secteur cylindrique mis en mouvement par le chariot rectangulaire de la scierie qui débite selon des plans. Il s'ensuit que rien de ce qui appartient au secteur ne doit gêner la marche du chariot ordinaire. Le pivot *a* (P. IV, F. 16) est une cheville de fer placée très-près de l'un des montants *b* du châssis et dans le plan vertical qui, perpendiculaire à la lame, passe par la pointe de la dent du milieu. Cette cheville traverse le talon *c* du secteur, lequel est couvert de plaques de fer en dessus et en dessous, afin que le trou ne s'agrandisse point, et que le centre du mouvement circulaire soit invariable. Le support du pivot est une double équerre en fer *d*, boulonnée d'une part sur l'une des semelles *e* du châssis, et de l'autre sur le plancher *f*, de manière que le brancard *g* du chariot puisse cheminer par dessous sans aucun frottement.

Le secteur est formé de 4 pièces de bois : deux bras *h* réunis, vers le talon, par un coin *i* assemblé à tenons, et aux deux autres bouts, par une courbe circulaire *k*. Sur la face cylindrique extérieure de cette courbe sont des dents horizontales *l* qui engrènent avec celles d'une crémaillère de bois *m* fixée par des boulons sur le brancard *n* du chariot rectangulaire. Il en résulte que le mouvement alternatif du châssis fait tourner le secteur autonr du pivot *a*, au moyen du jeu du pied-de-biche. Enfin, pour supporter la pression de la charge, trois roulettes *p* sont placées sous la courbe, et assujéties à

suivre une plaque circulaire en fer *q* fixée au plancher. Le pivot est aussi le centre de cette plaque, et par conséquent, les roulettes doivent être établies sur une circonférence du secteur.

On a laissé entre les bras autant de vide que le permettait la solidité. Leurs faces internes *r* sont des plans diamétraux; elles présentent plusieurs crans *s* larges de $0^m,02$ et espacés d'une quantité égale à la largeur des pièces débitées. Ces crans occupent environ les $^2/_8$ de la largeur des bras; les opposés appartiennent deux à deux à une même circonférence du secteur, parce qu'ils sont destinés à recevoir les lames au commencement et à la fin du mouvement.

Les faces externes *t* des bras sont d'abord, à partir de la courbe, parallèles aux faces internes, pour ménager l'espace nécessaire aux crans; mais à la hauteur du coin *i*, elles forment des arcs cylindriques rentrants, afin que la rotation du secteur ne soit point gênée par la coulisse du châssis située près du pivot.

La pièce de bois à débiter *v* est fixée sur le secteur au moyen de forts valets *x*, de façon que les voies circulaires qui s'y trouvent tracées répondent exactement à deux crans de la même circonférence; car la scie doit pouvoir se loger avant de mordre, et sortir du madrier sans endommager le secteur: elle y pénétrerait plus une fois qu'une autre et finirait par couper le bras. Il est visible du reste qu'en multipliant les crans sur un même secteur, ou en employant plusieurs secteurs sur lesquels les crans soient différemment placés, on peut débiter selon des arcs circulaires de courbures très-variées.

281. Il ne s'agit plus que d'établir les scies de manière à rendre leurs distances au pivot précisément égales aux rayons des circonférences qu'elles doivent parcourir.

A cet effet, on place sur l'entretoise inférieure y du châssis la petite branche d'une équerre en bois z, dont la grande branche est maintenue par deux étriers de fer α qui saisissent la même entretoise. Deux autres étriers β embrassent cette grande branche; chacun d'eux reçoit, dans une petite fourche qu'il forme, l'extrémité inférieure d'une scie γ; un boulon traverse la lame et les deux fourchons. L'autre extrémité de chaque scie est liée de la même manière à un étrier porté par l'entretoise mobile δ, comme dans les scieries ordinaires. C'est au moyen de boulons à bout taraudé ε, qui traversent cette entretoise mobile et l'entretoise supérieure, qu'on bande les scies autant qu'il est nécessaire.

Les lames peuvent être écartées du pivot jusqu'à la courbe k du secteur, et en être rapprochées jusqu'au coin i qui unit les bras; car on est libre de faire glisser l'équerre en bois z et de la retourner, pour placer la grande branche du côté du pivot. D'ailleurs, la mobilité des étriers β et de ceux d'en haut permet d'écarter les scies l'une de l'autre autant que l'exige la largeur des pièces courbes qu'il s'agit d'obtenir. Ces scies sont en acier fondu, longues de 1^m, larges de $0^m,05$, épaisses de $0^m,003$.

282. Le plus grand rayon des pièces courbes que peut donner l'appareil est, d'après ce qui précède, un peu moindre que la distance des brancards du chariot rectangulaire; mais cette longueur suffit pour les jantes de roue au débit desquelles la machine est spécialement destinée, car les moins courbes, celles du triqueballe, n'ont que $1^m,13$ de rayon. On pourrait toutefois, au moyen d'une légère modification, augmenter le rayon de la plus grande voie : il suffirait de supprimer, dans le secteur, la partie du talon qui dépasse le pivot, et de la remplacer par un œillet en fer

propre à recevoir la cheville, en la rapprochant du montant *b* du châssis. Diminuant ensuite la largeur de la courbe *k* autant que le permettrait la solidité, on parviendrait à faire varier de $0^m,4$ à $1^m,4$ le plus grand rayon des pièces circulaires.

283. Le secteur employé dans l'usine du Génie est un quart de cylindre, et ses bras sont assez écartés pour qu'on puisse former des pièces courbes capables chacune d'une jante entière. Mais en donnant au secteur un plus grand nombre de degrés, et en laissant plus d'espace entre les bras, il serait évidemment possible d'obtenir des courbes d'un développement plus étendu : rien n'empêcherait d'arriver à un quart de circonférence, ce qui serait bien suffisant pour tous les besoins. Au reste, la rétrogradation des deux chariots et le replacement du madrier mettent toujours à même d'avoir des courbes capables de deux jantes au moins, sans que la longueur de la pièce de bois gêne en rien; de sorte que le mécanisme, tel qu'il est, peut donner doubles les jantes des roues qui en ont 5. Quant à celles qui sont au nombre de 6 et de 7 dans une roue, elles pourraient être obtenues doubles sans reprise; mais pour ne pas trop couper le fil du bois, il vaut mieux faire un arrêt, et tracer en S les deux jantes qu'on veut tirer d'une seule courbe.

284. Il nous reste à indiquer le travail que peut faire la scierie des Pucelles, lorsqu'on l'emploie au sciage circulaire. Trois minutes suffisent pour produire une jante d'orme vert épaisse de $0^m,11$ et longue de $0^m,8$, mesure prise sur l'arc moyen. Le temps augmente de 1′ pour la même jante, si le bois est sec. Mais comme le déplacement du madrier et la manœuvre de la vanne font perdre 2′ à 3′ dans chaque arrêt, 10 heures de travail produisent seulement 120 jantes d'orme vert ou 90 jantes d'orme sec. Ces résultats, comparés à ceux

des arsenaux où les cadres des jantes sont préparés à la main, montrent que la scierie fait à peu près l'ouvrage de 5 hommes. Mais, d'après un mémoire de M. Poncelet, la roue hydraulique doit recevoir une quantité d'action de 140^k par seconde, ce qui exige que le moteur en dépense encore davantage.

MACHINES SOUFFLANTES.

285. Il y a deux classes de machines soufflantes : l'une comprend toutes celles qui aspirent l'air pour le refouler ensuite vers un réservoir d'où il se rend au foyer; l'autre renferme les appareils dans lesquels un véhicule transporte incessamment une certaine masse d'air au réservoir. Les machines de la première classe sont souvent mises en mouvement par l'eau, et celles de la seconde ne sauraient se passer de ce liquide.

La valeur d'une machine soufflante doit évidemment s'estimer d'après le rapport de la quantité d'air versée sur le foyer, en $1''$ par exemple, au travail fait dans le même temps par le moteur, et cette quantité dépend de la vitesse qu'a le fluide à sa sortie du canal où il chemine. Il nous faut donc avant tout étudier le mouvement de l'air dans les tuyaux de conduite.

MOUVEMENT DE L'AIR.

286. La pression qu'exerce l'air en un point quelconque d'une machine soufflante diffère toujours assez peu de la pression atmosphérique : pour les feux de forge, $b = b_1 + 0^m,04$ tout au plus, si b est en mètres la hauteur barométrique qui mesure la première, et b_1 celle qui mesure la seconde; pour les hauts-fourneaux, $b = b_1 + 0^m,05$. Or, b_1 a une valeur moyenne

de $0^m,76$; $0^m,04$ en forme seulement $^1/_{19}$, et $0^m,05$ en est à peu près $^1/_{15}$, fractions assez petites pour donner le droit de regarder la pression comme très-peu variable à l'intérieur, malgré les rétrécissements ou les élargissements du canal. Par conséquent, la densité du fluide en mouvement n'éprouve non plus que de très-faibles variations, et ce fluide se comporte à fort peu près comme s'il était incompressible.

La vitesse de l'air, d'abord nulle, croît graduellement lorsque la machine soufflante commence à fonctionner. Mais bientôt, au bout de quelques secondes, la pression observée en différents points du canal devient constante pour chacun, signe certain qu'il n'y a plus nulle part d'accélération appréciable, ou que la vitesse est devenue partout sensiblement invariable.

On admet pour les fluides expansifs, comme pour les liquides, le *parallélisme des tranches*, c'est-à-dire que tous les points d'une section perpendiculaire à la direction générale sont supposés cheminer selon des lignes parallèles, avec des vitesses égales. Cette hypothèse devient presque une vérité dans les cas ordinaires, puisque les formules qu'elle met à même d'établir donnent des résultats à fort peu près conformes aux faits observés. Il en résulte nécessairement que tous les points de la section doivent être regardés comme soumis à des pressions égales. Or, la même chose a lieu pour la section précédente et pour la suivante. Par conséquent, la pression variant très-peu dans le canal, il y a *continuité* au sein de la masse fluide; en d'autres termes, les particules sont partout et toujours contiguës.

De là et de ce que le mouvement est uniforme, il suit évidemment qu'un même volume de fluide passe en 1″ dans toute section du canal, quel que soit le diamètre de cette section, et quelque valeur qu'y ait la vitesse.

Ainsi, la détermination de la vitesse de sortie, à laquelle nous allons procéder, repose sur les bases suivantes : 1.° la densité du fluide reste la même d'un bout à l'autre du canal ; 2.° la vitesse est constante dans chaque section ; 3.° il y a égalité entre les volumes qui passent en 1″ dans des sections égales ou inégales.

287. Considérons deux sections quelconques AB, A′B′ d'un tuyau où l'air est en mouvement (P. IV, F. 17) en vertu d'une pression de p kilogrammes exercée sur chaque mètre carré de AB, et malgré une pression moindre p' exercée en sens contraire sur A′B′. Si A, A′ représentent en mètres carrés les deux aires, la masse fluide ABB′A′ sera soumise à une puissance Ap et à une résistance $A'p'$. Nommant donc u, u' les vitesses dans les deux sections, nous aurons udt, $u'dt$ pour les chemins le long desquels les efforts seront faits pendant l'instant dt, et la quantité d'action $A'p'u'dt$ consommée par la résistance formera une partie de la quantité d'action $Apudt$ produite par la puissance.

Supposons $A'B' < AB$; il s'ensuit $u' > u$, puisque le volume $A'u'$ qui passe en 1″ par A′B′ vaut le volume Au qui passe dans le même temps par AB. Il y a donc de AB en A′B′ une augmentation de vitesse $u'-u$. Or, c'est seulement une tranche infiniment mince qui passe dans l'instant dt par A′B′, ou bien c'est la masse élémentaire dM qui reçoit l'accroissement de vitesse $u'-u$; cette masse possédait, dans la section AB, une quantité d'action $\frac{u^2 dM}{2}$; celle qu'elle a en A′B′ est $\frac{u'^2 dM}{2}$; l'augmentation éprouvée pendant le trajet vaut donc $\frac{u'^2-u^2}{2}dM$, seconde partie de $Apudt$.

Il y aurait bien encore, à la rigueur, une troisième partie consommée par le frottement de l'air contre les

parois du tuyau; mais on peut la négliger quand les sections ont de grandes dimensions, car le ralentissement qui a lieu sur leur contour n'altérant que la vitesse des filets voisins, laisse presque toute la masse se mouvoir comme s'il n'existait pas. L'égalité des quantités d'action donne donc alors

$$Apudt = A'u'p'dt + \frac{u'^2 - u^2}{2}\, dM.$$

Représentant le poids d'un mètre cube du fluide par δ, on tire de là

$$u'^2 - u^2 = \frac{2g}{\delta} \times \frac{p\frac{\delta}{g}Audt - p'\frac{\delta}{g}A'u'dt}{dM}.$$

Comme $\frac{\delta}{g}$ est la masse du mètre cube, $\frac{\delta}{g}Audt$, $\frac{\delta}{g}A'u'dt$ sont les masses qui passent dans un instant par les sections AB, A'B', et ces masses valent chacune dM. D'ailleurs, $u = \frac{A'}{A}u'$, puisque $Au = A'u'$. Conséquemment,

$$u'^2\left(1 - \frac{A'^2}{A^2}\right) = \frac{2g}{\delta}(p - p'), \quad \text{et} \quad u' = \sqrt{\frac{2g(p-p')}{\delta\left(1 - \frac{A'^2}{A^2}\right)}}.$$

La vitesse dans la section A'B' aurait encore la même valeur, si les tranches fluides descendaient verticalement, car le poids de la masse ABB'A' est toujours négligeable devant la pression p.

La vitesse u_1 avec laquelle l'air sort par l'orifice ab se déduit facilement de l'expression de u': il suffit d'y remplacer p' par la pression extérieure p_1, et A' par l'aire de ab. Mais le fluide s'échappe en veine contractée (128), et c'est toujours à la plus petite section de cette veine qu'on rapporte la vitesse de sortie, afin de pou-

voir déterminer plus exactement le volume écoulé en 1″. Si donc a est en mètres carrés la superficie de l'orifice, et m le coefficient de cette superficie pour la plus grande contraction,

$$u_1 = \sqrt{\frac{2g(p-p_1)}{\delta\left(1-\frac{m^2a^2}{A^2}\right)}}. \qquad (I)$$

Il est du reste évident que le volume d'air X qui sort en 1″, sous la pression p, se calcule au moyen de l'équation $X = mau_1$.

La fraction $\frac{m^2a^2}{A^2}$ est souvent assez petite pour être négligée. Alors, la formule de la vitesse de sortie devient très-simple :

$$u_1 = \sqrt{\frac{2g(p-p_1)}{\delta}}. \qquad (II)$$

288. La quantité d'action consommée par le frottement des parois ne peut plus être omise quand le canal est étroit sur une notable longueur l, car la vitesse se trouve altérée dans toute l'étendue de chaque section. Or, pour les fluides expansifs, comme pour les liquides (144), le frottement vaut en kilogrammes

$$\frac{\delta}{g}\omega l(ku+k'u^2),$$

ω étant le contour de la section moyenne A, u la vitesse dans cette section, k et k' des coefficients relatifs à la nature du fluide, mais indépendants de celle des tuyaux en usage. Le chemin le long duquel s'exerce le frottement pendant l'instant dt est udt, et la quantité d'action qui en résulte a pour expression

$$\frac{\delta}{g}\omega l(ku+k'u^2)udt = \frac{\omega}{A}l(ku+k'u^2)\frac{\delta}{g}Audt = \frac{\omega}{A}lk'u^2dM =$$
$$\frac{\omega}{A}lk'\frac{m^2a^2}{A^2}u_1{}^2dM = 0{,}00315\frac{\omega}{A}l\frac{m^2a^2}{A^2}u_1{}^2dM,$$

parce qu'on peut négliger ku, que $Au = mau_1$, et que $k' = 0,00315$ pour l'air. L'égalité des quantités d'action devient donc

$$Apudt = map_1 u_1 dt + \frac{u_1^2 - u^2}{2} dM + 0,00315 \frac{\omega}{A} l \frac{m^2 a^2}{A^2} u_1^2 dM.$$

Agissant comme dans le n.° précédent, on en tire

$$u_1^2 - \frac{m^2 a^2}{A^2} u_1^2 + 0,0063 \frac{\omega}{A} l \frac{m^2 a^2}{A^2} u_1^2 = \frac{2g}{\delta}(p - p_1),$$

puis

$$u_1 = \sqrt{\frac{2g(p - p_1)}{\delta\left[1 - \frac{m^2 a^2}{A^2}\left(1 - 0,0063 \frac{\omega l}{A}\right)\right]}}. \qquad \text{(III)}$$

Lorsque le tuyau et l'orifice de sortie sont circulaires, on a, en désignant leurs diamètres par **D**, d,

$$\frac{a^2}{A^2} = \frac{d^4}{D^4}, \quad \frac{\omega}{A} = \frac{\pi D}{{}^1/_4 \pi D^2} = \frac{4}{D},$$

et

$$u_1 = \sqrt{\frac{2g(p - p_1)}{\delta\left[1 - \frac{m^2 d^4}{D^4}\left(1 - 0,0252 \frac{l}{D}\right)\right]}}. \qquad \text{(IV)}$$

289. Soit que le tuyau qui verse l'air sur le foyer ait son origine dans la machine soufflante, soit qu'il l'ait dans un réservoir interposé, cette origine $a'b'$ (P. IV, F. 18) forme un rétrécissement brusque duquel résulte une contraction, puis un choc contre les parois du canal, par suite de l'épanouissement de la veine. Après ce choc, le fluide remplissant les sections de la conduite s'y meut uniformément, avec une vitesse u' moindre que sa vitesse u_2 dans la section la plus étroite de la veine contractée. Il se fait donc une perte de vitesse $u_2 - u'$, une perte de quantité d'action $\frac{(u_2 - u')^2}{2} dM$ dans

chaque instant dt, et l'égalité des quantités d'action posée dans le n.° précédent devient évidemment

$$Apudt-\frac{(u_2-u')^2}{2}dM=map_1u_1dt+\frac{u_1{}^2-u^2}{2}dM+0,00315\frac{\omega}{A'}l\frac{m^2a^2}{A'^2}u_1^2dM.$$

Si m' est le coefficient de contraction pour l'orifice d'entrée $a'b'$, et a' l'aire de cet orifice en mètres carrés, $m'a'u_2=mau_1$. D'ailleurs, on a aussi, pour une section quelconque du canal, $A'u'=mau_1$. Par conséquent,

$$u_2-u'=\frac{ma}{m'a'}u_1-\frac{ma}{A'}u_1=\frac{ma}{A'}u_1\left(\frac{A'}{m'a'}-1\right),$$

$$u_1{}^2\left\{1-\frac{m^2a^2}{A^2}+\frac{m^2a^2}{A'^2}\left[0,0063\frac{\omega l}{A'}+\left(\frac{A'}{m'a'}-1\right)^2\right]\right\}=\frac{2g}{\delta}(p-p_1),$$

et

$$u_1=\sqrt{\frac{2g(p-p_1)}{\delta\left\{1-\frac{m^2a^2}{A^2}+\frac{m^2a^2}{A'^2}\left[0,0063\frac{\omega l}{A'}+\left(\frac{A'}{m'a'}-1\right)^2\right]\right\}}}.\quad\text{(V)}$$

Lorsque l'orifice $a'=A'$, section du tuyau, et qu'il n'y a pas de soupape à l'entrée,

$$\left(\frac{A'}{m'a'}-1\right)^2=\left(\frac{1}{m'}-1\right)^2=\left(\frac{1-m'}{m'}\right)^2.$$

Comme cette fraction est toujours fort petite, on peut la négliger, ce qui revient à faire abstraction de la perte due au choc, et

$$u_1=\sqrt{\frac{2g(p-p_1)}{\delta\left[1-\frac{m^2a^2}{A^2}+0,0063\frac{\omega l m^2a^2}{A'^3}\right]}}.\quad\text{(VI)}$$

290. Le canal A'B', qui a son orifice d'entrée dans la machine soufflante AB (P. IV, F. 19), débouche souvent dans un réservoir A''B'' où la vitesse u'' est moindre que

la vitesse u_1, avec laquelle le fluide passe par la section la plus étroite de la veine contractée ab. Il y a choc alors au débouché; la masse dM éprouve une perte de vitesse $u_1 - u''$, et une perte de quantité d'action $\frac{(u_1 - u'')^2}{2}$dM qui rend u_1 moindre que dans le cas où l'air s'écoule librement dans l'atmosphère ou sur le foyer. La quantité d'action pour la section contractée ab n'est plus en effet map_1u_1dt, comme dans les cas précédents; le choc la réduit à $map_1u_1dt - \frac{(u_1 - u'')^2}{2}dM$, et l'égalité des quantités d'action du n.° 289 devient

$$Apudt - \frac{(u_1 - u')^2}{2}dM = map_1u_1dt - \frac{(u_1 - u'')^2}{2}dM + \frac{u_1^2 - u^2}{2}dM + 0{,}00315\frac{\omega}{A'}l\frac{m^2a^2}{A'^2}u_1^2dM.$$

Comme $A''u'' = mau_1$,

$$u_1 - u'' = u_1 - \frac{ma}{A''}u_1 = u_1\left(1 - \frac{ma}{A''}\right),$$

$$u_1^2\left\{1 - \frac{m^2a^2}{A^2} + \frac{m^2a^2}{A'^2}\left[0{,}0063\frac{\omega l}{A'} + \left(\frac{A'}{m'a'} - 1\right)^2\right] - \left(1 - \frac{ma}{A''}\right)^2\right\} = \frac{2g}{\delta}(p - p_1)$$

et

$$u_1 = \sqrt{\frac{2g(p - p_1)}{\delta\left\{1 - \frac{m^2a^2}{A^2} + \frac{m^2a^2}{A'^2}\left[0{,}0063\frac{\omega l}{A'} + \left(\frac{A'}{m'a'} - 1\right)^2\right] - \left(1 - \frac{ma}{A''}\right)^2\right\}}}. \quad \text{(VII)}$$

Enfin, si $a' = A' = a$, et qu'il n'y ait point de soupapes aux extrémités de la conduite, il ne se fait plus de contraction à la sortie, $m = 1$, et en négligeant la perte due au choc d'entrée, on a

$$u_1 = \sqrt{\frac{2g(p - p_1)}{\delta\left[1 - \frac{A'^2}{A^2} + 0{,}0063\frac{\omega l}{A'} - \left(1 - \frac{A'}{A''}\right)^2\right]}}. \quad \text{(VIII)}$$

291. Les nombres A, a, A', a', A'', ω, l, qui entrent dans les huit formules précédentes, sont fournis par les dimensions de l'appareil.

D'après des expériences de M. d'Aubuisson, les coefficients de contraction m, m' ont les valeurs suivantes :

0,65	ponr nn orifice en mince paroi, avec contraction complète ;	
0,74	pour nn ajntage cylindriqne d'un diamètre de 0^m,015 et d'une longnenr de........	20 diamètres ;
0,83		10
0,93		3
0,93	pour tout ajntage cylindrique très-court ;	
0,94	ponr tont ajutage légèrement coniqne.	

On peut trouver les pressions p, p_1 au moyen d'un baromètre. Soient b, b_1 en mètres les hauteurs des colonnes de mercure, quand la cuvette est plongée dans les deux milieux où s'exercent ces pressions. Comme un mètre cube du métal liquide pèse 13598^{kg}, les produits $13598^{kg} \times b$, $13598^{kg} \times b_1$ sont les poids de colonnes qui ont 1^{mm} de base et b, b_1 de hauteur ; par conséquent, $p = 13598^{kg} \times b$, $p_1 = 13598^{kg} \times b_1$.

Mais c'est à l'aide du *manomètre* qu'on observe les pressions dans les usines. Le nom de cet instrument signifie en effet qu'il mesure la *raréfaction*, la densité du fluide, ou, ce qui revient au même, la pression exercée sur les parois du vase. Il présente ordinairement un tube ABCDE deux fois coudé (P. IV, F. 20) en verre ou en fer. La branche horizontale AB débouche dans la capacité A où règne la pression p ; les deux autres branches sont verticales, et contiennent du mercure dans leur partie inférieure. Sur la colonne liquide de la branche ascendante repose un flotteur G soutenu par un contre-poids H, et le long de cette même branche est appliquée une échelle dont le zéro, dans le manomètre en verre, répond à la base inférieure du flotteur, quand les extrémités des deux colonnes de mercure

sont de niveau. Si le tube est en fer, une tige portée par le flotteur sort de la branche ascendante, et son extrémité supérieure répond au zéro de l'échelle, lorsque les deux colonnes sont égales.

Le manomètre donne immédiatement l'excès $p-p_1$ de la pression intérieure sur la pression extérieure. Soit en effet c le double du nombre de mètres dont l'indicateur s'est élevé le long de l'échelle. La différence des deux colonnes égale c; cette différence produit, sur 1^{mm} de base, un poids de $13\,598^{kg}\times c$, et par conséquent,

$$p=p_1+13\,598^{kg}\times c, \quad \text{ou} \quad p-p_1=13\,598^{kg}\times c.$$

Ainsi, après avoir observé l'ascension de l'indicateur en mètres, il suffit de multiplier $13\,598^{kg}$ par le double, pour obtenir la quantité $p-p_1$. Si le manomètre contenait de l'eau au lieu de mercure, on aurait

$$p-p_1=1000^{kg}\times c.$$

La différence des pressions ainsi calculée n'est pas rigoureusement celle des formules, attendu que l'indicateur du manomètre et l'orifice de sortie ne sont pas à la même hauteur. Supposons le premier plus élevé que le second. Le baromètre placé au niveau de l'indicateur marquera b' mètres, et près de l'orifice, b_1 mètres; la pression de la colonne d'air comprise entre les deux points sera, sur 1^{mm}, $13\,598^{kg}(b_1-b')$; la pression réelle à l'orifice vaudra $p_1+13\,598^{kg}(b_1-b')=\mathrm{P}$; on aura

$$p_1=\mathrm{P}-13\,598^{kg}(b_1-b'),$$

$$p=\mathrm{P}-13\,598^{kg}(b_1-b')+13\,598^{kg}\times c,$$

et enfin

$$p-\mathrm{P}=13\,598^{kg}[c-(b_1-b')].$$

Mais le nombre $b_1 - b'$ est toujours si petit qu'on peut bien n'en tenir aucun compte, et prendre $13\,598^{kg} \times c$ pour l'excès de la pression intérieure sur celle qu'exerce l'atmosphère à l'orifice de sortie.

292. Le poids spécifique δ de l'air renfermé, sous la pression p, dans une machine soufflante, est relatif à une température t et à un volume v. La même masse fluide aurait un poids spécifique δ' et un volume v' sous une pression p' et une température t'. Comme les poids spécifiques sont inverses des volumes, $\frac{\delta}{\delta'} = \frac{v'}{v}$ et $\delta = \delta' \frac{v'}{v}$. Mais, sous une pression constante, tout gaz sec augmente des 0,00375 de son volume à 0°, quand sa température s'accroît d'un degré. Si donc x désigne ce que serait v à 0° sous la pression p,

$$v = x + 0{,}00375xt, \quad \text{ou plutôt} \quad v = x + 0{,}004xt,$$

parce que l'air humide des usines est un peu plus dilatable que l'air sec, et

$$x = \frac{v}{1 + 0{,}004t}.$$

Nommons x' ce que devient le volume x sous la pression p et la température t', nous aurons aussi

$$x' = x(1 + 0{,}004t') = v\,\frac{1 + 0{,}004t'}{1 + 0{,}004t}.$$

Mais les volumes x', v' étant relatifs à la même température t', sont inverses des pressions p, p' qui les produisent, et $\frac{v'}{x'} = \frac{p}{p'}$. Par conséquent,

$$v' = x'\frac{p}{p'} = v\,\frac{p(1 + 0{,}004t')}{p'(1 + 0{,}004t)}, \quad \text{et} \quad \delta = \delta'\,\frac{p(1 + 0{,}004t')}{p'(1 + 0{,}004t)}.$$

Sous la pression barométrique moyenne $0^m{,}76$ et à

la température 0°, le mètre cube d'air pèse $1^{kg},3$. Si donc nous faisons

$$t'=0, \quad \text{et} \quad p'=13598^{kg}\times 0,76=10334^{kg},48,$$

il viendra

$$\delta = 1^{kg},3\,\frac{p}{10\,334^{kg},48\,(1+0,004t)} = p\,\frac{0,000\,126}{1+0,004t}.$$

Lorsque la pression p est mesurée au baromètre, on a $p=13\,598^{kg}\times b$, puis

$$\delta = 13\,598^{kg}\times b\,\frac{0,000\,126}{1+0,004t} = \frac{1^{kg},713b}{1+0,004t}.$$

Quand on emploie le manomètre, l'équation

$$b=0^{m},76+c \qquad \text{donne}$$

$$\delta = \frac{1^{kg},713(0,76+c)}{1+0,004t} = \frac{1^{kg},3+1^{kg},713c}{1+0,004t}.$$

293. Demandons-nous d'abord, pour offrir une application des formules, avec quelle vitesse l'air sort par la petite base d'un tuyau conique et très-court, quand cet orifice a un faible diamètre relativement à celui de la grande base. C'est l'équation (II) qu'il faut employer. Supposons qu'à l'entrée du tuyau, $c=0^{m},2$, et que la température intérieure $t=15°$. Nous aurons

$$p-p_1=13\,598^{kg}\times 0,2=2719^{kg},6,$$

$$\delta = \frac{1^{kg},3+1^{kg},713\times 0,2}{1+0,004\times 15} = 1^{kg},55,$$

et $$u_1=\sqrt{\frac{2\times 9^{m},81\times 2719^{kg},6}{1^{kg},55}} = 185^{m},54.$$

La hauteur manométrique $0^{m},2$ est à peu près la plus grande qu'offrent les machines soufflantes, et pour-

tant elle ne rend pas, comme on voit, la densité de l'air intérieur beaucoup plus grande que celle du fluide atmosphérique. Concluons-en qu'il y a toujours lieu d'appliquer les diverses valeurs de u_1 aux appareils qui activent la combustion (286).

Si le même tuyau est raccordé avec l'orifice d'un réservoir de manière qu'il n'y ait point contraction à l'entrée, c'est encore la formule II qui donne la vitesse de sortie. Cherchons le volume d'air qui s'écoulera en $1''$ et la quantité d'action que possédera la masse, le thermomètre marquant 15° dans le réservoir, le manomètre $0^m,2$, et l'orifice de sortie ayant $0^m,036$ de diamètre. Nous aurons $u_1 = 185^m,54$, comme précédemment, $m = 0,94$,

$$a = 3,1416(0,018)^2 = 0^{mm},001\,02,$$

et

$$X = mau_1 = 0,94 \times 0^{mm},001\,02 \times 185^m,54 = 0^{mc},1779.$$

Quant au travail dont la masse d'air est capable, il est donné par l'équation

$$T = \frac{X\frac{\delta'}{g}u_1^2}{2}.$$

Comme l'air se dilate en sortant, on ne fait pas une grande erreur en prenant pour le poids spécifique δ' celui qu'a le fluide à 0° sous la pression moyenne $13\,598^{kg} \times 0,76$. Par conséquent, $\delta' = 1^{kg},3$, et

$$T = \frac{0,1779 \times 1^{kg},3(185^m,54)^2}{2 \times 9^m,81} = 405^k,775.$$

294. Lorsque le manomètre est placé près de l'origine d'une longue conduite, on doit faire usage de la formule

(III) ou de la formule (IV), pour déterminer la vitesse de sortie. Supposons la conduite cylindrique et raccordée avec le tuyau conique précédent. Si $l = 90^m$, $D = 0^m,3$, et que $c = 0^m,2$, $t = 15°$, comme dans les deux premiers exemples,

$$u_1 = \sqrt{\frac{2 \times 9^m,81 \times 2719^{kg},6}{1^{kg},55\left[1 - \frac{(0,94)^2 (0^m,036)^4}{(0^m,3)^4}\left(1 - 0,0252 \frac{90^m}{0^m,3}\right)\right]}} = 185^m,42.$$

On voit par ce résultat, comparé au premier $185^m,54$, que le frottement des parois de la conduite influe bien faiblement sur la vitesse de sortie, quand le diamètre de cette conduite est un peu grand.

295. Prenons pour dernier exemple le cas où un réservoir cylindrique à mince paroi précède une longue conduite de même forme, dont l'entrée n'est diminuée ni par un rétrécissement ni par une soupape, et qui se termine par un tuyau conique raccordé. Nous pourrions employer la formule (VI), puisque $a' = A'$; mais servons-nous de la formule (V), afin de reconnaître l'influence du choc. Si le manomètre et le thermomètre du réservoir marquent, l'un $0^m,2$, l'autre $15°$, nous aurons encore $p - p_1 = 2719^{kg},6$, et $\delta = 1^{kg},55$. D'ailleurs, $m = 0,94$, $m' = 0,65$. Supposons en outre $0^m,5$ pour le diamètre du grand cylindre, $0^m,25$ pour celui du petit, $0^m,03$ pour celui de la sortie, et 90^m pour la longueur l de la conduite. Il s'ensuivra

$$\frac{a^2}{A^2} = \frac{(0^m,03)^4}{(0^m,5)^4}, \quad \frac{a^2}{A'^2} = \frac{(0^m,03)^4}{(0^m,25)^4}, \quad \frac{\omega}{A'} = \frac{4}{0,25},$$

et

$$u_1 = \left\{\sqrt{\frac{2 \times 9^m,81 \times 2719^{kg},6}{1^{kg},55\left\{1 - \frac{(0,94)^2 (0^m,03)^4}{(0^m,5)^4} + \frac{(0,94)^2 (0^m,03)^4}{(0^m,25)^4}\left[0,0063 \frac{4 \times 90^m}{0,25} + \left(\frac{1}{0,65} - 1\right)^2\right]\right\}}}\right\} = 185^m,36,$$

résultat dont la différence au dernier 185^m,42 est seulement 0^m,06, et qui fait voir que le choc de la veine contre les parois de la conduite affaiblit fort peu la vitesse de sortie.

MACHINES SOUFFLANTES ASPIRANTES.

296. Le tableau suivant offre les divisions et les subdivisions de la première classe des machines soufflantes (285) :

Machines soufflantes aspirantes.
- Soufflet
  - à un vent.
  - à deux vents.
- Tonne soufflante.
- Caisse soufflante.
- Pompe
  - à un vent
    - refoulant vers le bas.
    - refoulant vers le haut.
  - à deux vents.

Nous décrirons succinctement ces diverses espèces, puis nous en donnerons la théorie générale.

297. Le soufflet à un vent est en cuir ou en bois. Il sera question seulement de la seconde sorte qui a des parties particulières, outre toutes celles de la première.

Le soufflet en bois présente deux coffres : l'un supérieur A, qui n'a point de fond, s'appelle *volant* (P. IV, F. 21) ; l'autre inférieur B, qui n'a point de couvercle, est nommé *gîte*. Le volant emboîte exactement le gîte et oscille autour d'un boulon fixé à la *têtière* C ; aussi sa partie postérieure est-elle cylindrique. C'est sur le mantonnet D, qui termine cette partie, qu'agit la came de l'arbre hydraulique. Le gîte est immobile et supporté par une charpente ; à son fond se trouve un

clapet E, nommé *âme,* qui s'ouvre en dedans. Un autre clapet F se trouve quelquefois dans la têtière; il s'ouvre du côté de la *buse* G, tube conique qui porte le vent au foyer.

Lorsque le volant a terminé sa descente, un contre-poids le soulève, l'air du gîte se dilate et permet à l'air extérieur d'entrer par le clapet E, tandis que le clapet F se ferme et empêche l'aspiration de l'air chaud du foyer. A la fin de l'ascension, la came abaisse le volant, comprime l'air intérieur, et le force de fermer le clapet E, d'ouvrir le clapet F, puis de sortir par la buse.

Ainsi, le soufflet à un vent ne produit un courant d'air que pendant la descente du volant, et c'est de là que lui vient son nom. Pour obtenir un jet continu, il faut accoupler deux soufflets de manière que l'un s'élève pendant que l'autre s'abaisse. L'accouplement se fait au moyen d'un balancier H (F. 22) dont les bras se lient aux mantonnets par deux tringles I, I'. Il faut alors deux cames qui saisissent les mantonnets alternativement, ou bien une came pour l'un et un contre-poids pour l'autre.

L'expiration du soufflet en bois exige évidemment qu'il n'ait pas d'autre communication avec l'atmosphère que ses deux clapets. Les parois du volant et celles du gîte doivent donc se toucher constamment, et glisser les unes sur les autres à frottement doux. On obtient ces deux effets en plaçant sur l'épaisseur des parois *b* du gîte (F. 23) des liteaux *c* recouverts d'un cuir gras. Ils sont maintenus par des valets *d* dont les queues *e* se trouvent fixées aux faces internes du gîte; des ressorts *f* qui traversent ces queues, et dont les deux branches tendent à se rapprocher, pressent sans cesse les liteaux contre les parois *a* du volant.

Chaque liteau est d'ailleurs fait de deux pièces *g*,*h* (F. 24) assemblées à tenon et mortaise; au fond de chaque mortaise existe un petit ressort en boudin qui force les autres extrémités des pièces *g*,*h* à remplir les angles rentrants des parois du volant.

298. Il y a, dans les usines et les ateliers, des soufflets à deux vents qui ressemblent beaucoup aux soufflets à main du même genre qu'on emploie dans nos habitations; mais ils sont loin de valoir le soufflet *Rabier* dont le *réservoir* A est bien plus vaste (P. V, F. 1). Cette partie a pour fond le *diaphragme* B, qui forme le couvercle du soufflet proprement dit. Le fond C est un plateau dormant, comme le couvercle. Entre ces deux pièces s'en trouve une troisième D nommée *mobile*, qui oscille au moyen d'une charnière en sangle ou d'un boulon, et que met en mouvement soit une bielle de machine à vapeur, soit une came hydraulique, soit une *branloire*. Dans les deux derniers cas, un contre-poids placé à l'un des crans de la queue E produit la descente.

Le couvercle F du réservoir est chargé de quatre poids G : ce couvercle est un plateau de bois; mais les parois latérales, ainsi que celles du soufflet, sont en cuir.

Lorsque la mobile s'élève, l'air du dessous H du soufflet se dilate, et le fluide atmosphérique entre par la soupape I; au contraire, l'air du dessus H' est comprimé; il ferme la soupape K, ouvre la soupape L et passe dans le réservoir. Pendant la descente de la mobile, c'est l'air du dessus H' qui se raréfie; le fluide atmosphérique y entre par la soupape K, à laquelle aboutit un passage M pratiqué dans l'épaisseur même de la mobile; l'air du dessous H comprimé ferme la soupape I, fuit par le canal N, et entre dans le réservoir en ouvrant la soupape O. Enfin, la charge constante

des poids G force le fluide du réservoir à se rendre à la buse P par le canal Q pratiqué dans le diaphragme et la têtière R ; l'entrée de ce canal est libre ; mais à l'orifice de sortie se trouve un clapet S propre à empêcher l'introduction de l'air chaud du foyer, dans le cas où il y aurait aspiration du réservoir.

299. La tonne soufflante convient parfaitement aux feux d'affinerie, et l'air s'y perd moins que dans les soufflets en bois. Elle présente (P. V, F. 2) un cylindre A, mobile sur son axe, à moitié plein d'eau, divisé en deux parties égales par une cloison B qui se lie à la surface interne dans le haut seulement, et mis en mouvement par une manivelle C sur laquelle agit parfois une bielle motrice D. Chaque compartiment a deux soupapes E, F ou E', F' qui s'ouvrent, la première en dedans, la seconde en dehors ; celle-ci est l'orifice d'un tuyau flexible G ou G' qui conduit l'air au foyer.

Supposons que la bielle monte ; la cloison, perpendiculaire à la manivelle, s'incline à gauche ; à raison de la communication H des deux compartiments, l'eau conserve à peu près le même niveau ; l'air du compartiment de droite se raréfie, puisque la capacité de cette partie augmente ; le fluide atmosphérique entre par la soupape E', tandis que la soupape F' reste fermée ; l'air du compartiment de gauche, comprimé par suite d'une diminution dans la capacité, ferme la soupape E, ouvre la soupape F, et fuit vers le foyer par le tuyau G. L'oscillation contraire, que produit la descente de la bielle, incline la cloison à droite, raréfie l'air du compartiment de gauche et comprime celui de l'autre ; par conséquent, les soupapes E, F' s'ouvrent, les soupapes F, E' se ferment, le fluide atmosphérique entre dans le compartiment de gauche, et l'air que contient celui de droite se rend au foyer en suivant le tuyau G'.

Ainsi la tonne est un soufflet à deux vents; elle ne donne pas toutefois un courant aussi uniforme que celui du soufflet Rabier.

300. La caisse soufflante peut fournir autant d'air que le soufflet en bois, et elle consomme une bien moindre quantité d'action en frottement.

Au milieu d'un bassin A fait en prisme rectangle (P. V, F. 5) s'élève un massif B de même forme. L'intervalle C qu'ils laissent entre eux est rempli d'eau, et une caisse D prismatique, sans fond, s'y élève et s'y abaisse successivement, selon que la force motrice fait monter ou descendre la bielle E. Afin que l'axe se meuve constamment selon une même verticale, chaque paroi latérale de la caisse porte, dans le bas, une roulette F qui appuie contre le massif, et elle frotte elle-même contre une autre roulette G fixée à la paroi correspondante du bassin. L'intérieur de la caisse communique avec l'atmosphère par un tuyau H garni d'une soupape I qui s'ouvre de bas en haut, et avec le foyer, par un tuyau K dont la soupape L s'ouvre de haut en bas, quand la pression supérieure l'emporte sur un contre-poids qui la tient fermée.

Il est facile de voir, d'après cela, que l'ascension, raréfiant l'air contenu entre le couvercle de la caisse et le massif, permet au fluide atmosphérique d'entrer par l'orifice I, et que la descente, comprimant le fluide introduit, le force de s'échapper par le tuyau K.

Comme la raréfaction peut faire monter au-dessus du massif l'eau que renferme la caisse, la gorge M est destinée à empêcher ce liquide de se répandre dans les tuyaux. Quant à la feuillure N du bassin, elle empêche de se répandre au dehors l'eau qui s'élève le long de la surface extérieure de la caisse pendant la compression de l'air.

301. La pompe à un seul vent se compose d'un piston A (P. V, F. 4 et 5) qui oscille dans un cylindre B on dans un prisme rectangle, d'un tuyau C par lequel l'air se rend an foyer, et de deux soupapes. Si le refoulement se fait vers le haut (F. 4), le tuyau part de la base supérieure du cylindre, l'une D des soupapes est à son orifice, l'autre E sur le piston, et toutes deux s'ouvrent de bas en haut. Si le refoulement se fait vers le bas (F. 5), le tuyau part de la base inférieure du cylindre, la soupape D est encore à l'orifice ou du moins tout auprès; la sonpape E se trouve sur le fond du corps de pompe, et ces deux clapets s'ouvrent en sens inverses par rapport au fond.

La descente du piston produit l'aspiration, dans le premier cas, et l'expiration dans le second; l'ascension a des effets contraires. Enfin, pour que le piston à soupape soit symétriquement pressé par l'air atmosphérique pendant sa descente, et n'ait aucune tendance à basculer, on place un clapet de chaque côté de la tige, de manière qu'elle partage l'intervalle en deux parties égales. Conséquemment, la pompe qui refoule vers le haut est moins simple que celle qui refoule vers le bas.

302. Le cylindre de la pompe à deux vents a un fond A et un couvercle B (P. V, F. 6); chacune de ces parois porte deux soupapes qui s'ouvrent en sens contraires: celle, C ou C', qui s'ouvre en dedans établit la communication du cylindre avec l'atmosphère; celle, D ou D', qui s'ouvre en dehors est à l'orifice d'un tuyau E, E' par lequel l'air se rend dans un *réservoir* ou *régulateur* F, d'où il passe au foyer en suivant le *porte-vent* G et la buse H. Le piston I n'a point d'ouverture; sa course est moindre que la hauteur du cylindre; la capacité K qu'il laisse vers le fond à la fin de sa descente, ou celle K' qu'il laisse vers le couvercle à la fin

de son ascension, se nomme *espace nuisible;* c'est le jeu de la soupape C, C′ qui détermine la hauteur de cet espace. Enfin, les deux soupapes C′, D, qui s'ouvrent de haut en bas, sont continuellement pressées chacune par un ressort, ou plutôt par un levier à contre-poids, pour que les conditions de leurs mouvements soient les mêmes que celles des mouvements des deux soupapes C, D′, qui s'ouvrent de bas en haut.

Lorsque la force motrice élève la tige L du piston, l'air de l'espace nuisible K se raréfie, la soupape D se ferme, la soupape C s'ouvre, et le fluide atmosphérique entre dans le cylindre. Parvenu à sa plus haute position I′, le piston descend et comprime l'air placé au-dessous de lui. La soupape C se ferme dès que son poids, augmenté de la tension interne, surpasse la pression de l'atmosphère; mais la soupape D s'ouvre plus tard: il faut, pour qu'elle s'abaisse, que la tension qui a lieu au-dessous du piston surpasse celle du tuyau E ou du réservoir, augmentée de la pression du contre-poids. Lorsqu'il en est ainsi, l'air comprimé se rend au réservoir F.

Quand la descente commence, l'air de l'espace nuisible K′ se raréfie; la tension du tuyau E′, ajoutée au poids de la soupape D′, surpasse soudain la tension qui a lieu au-dessus du piston, et cette soupape se ferme. C′ s'ouvre un peu plus tard, dès que la pression atmosphérique l'emporte sur la force du contre-poids augmentée de la tension interne.

303. Les calculs que nous allons faire sur la pompe à deux vents s'appliqueront aux autres machines aspirantes, car toutes ont des soupapes pesantes ou à contre-poids, et au moins un espace nuisible.

Montrons d'abord qu'il est avantageux de donner au corps de pompe de grands orifices et de les fermer par

des soupapes légères. Le poids ou le contre-poids de l'une d'elles sera désigné par q; ce poids, décomposé perpendiculairement à la surface supposée à sa plus grande élévation, produit une pression normale $q \cos\alpha$, si α indique l'angle d'ouverture (P. V, F. 7). A cette pression, il faut ajouter celle qui a lieu au-dessus de la soupape, pour avoir la force qui tend à fermer l'orifice. Soit p' le nombre de kilogrammes qu'elle donne sur chaque mètre carré. Comme elle s'exerce aussi perpendiculairement à la surface, elle forme une pression totale $p'a$, si a exprime en mètres carrés l'aire de l'orifice. Par conséquent, $p'a+q\cos\alpha$ est la force qui tend à fermer le passage.

Supposons qu'il s'agisse d'une des soupapes C, C' (F. 6), et représentons par p la pression de l'atmosphère sur un mètre carré. La force normale qui tend à ouvrir davantage la soupape est pa, et conséquemment, pendant l'entrée du fluide atmosphérique, l'angle α ne peut être constant sans que pa fasse équilibre à $p'a+q\cos\alpha$. On a donc la relation

$$pa=p'a+q\cos\alpha,$$

qui donne

$$p'=p-\frac{q}{a}\cos\alpha.$$

Ainsi, la tension interne p' pourra être d'autant plus grande que q sera plus petit et a plus grand. Mais à volumes égaux et à températures égales, les tensions d'un même fluide sont comme ses densités. Par conséquent, il s'introduit d'autant plus d'air dans le corps de pompe, ou bien la machine donne d'autant plus de vent que l'orifice a plus de surface et la soupape moins de poids.

On voit aussi que, pour un même poids q, $\cos\alpha$

diminue ou l'angle d'ouverture augmente à mesure que s'affaiblit la différence $p - p'$ des pressions. Si p' égalait p, il faudrait pour l'équilibre que α fût de 90°. Mais la raréfaction qui précède l'entrée du fluide atmosphérique maintient toujours une telle différence entre p et p', que $\cos\alpha$ ne dépasse guère 0,96; ce qui donne pour α environ 15°, et $\frac{1}{4}$ du diamètre de l'orifice pour l'ascension du point le plus éloigné de la charnière.

La relation $pa = p'a + q\cos\alpha$ s'applique aux soupapes D, D' des tuyaux, si l'on y remplace p par la tension p'' de l'espace nuisible, qui a lieu dans le corps de pompe pendant la fuite de l'air comprimé vers le réservoir, et p' par la tension p_1 qu'il y prend. Il vient ainsi $p''a = p_1 a + q\cos\alpha$, équation qui montre que la pression du fluide du réservoir est toujours moindre que celle du fluide de l'espace nuisible.

304. La quantité d'action consommée par une pompe à deux vents se compose de plusieurs parties, et d'abord, il y a un travail T' à faire pour amener graduellement l'air intérieur de la tension p' à la tension p'', en vertu de laquelle il peut passer dans le réservoir.

Nous ne tiendrons pas compte, dans le calcul de T', ni dans les autres, du travail exécuté par le poids du piston; car, si deux pompes sont accouplées, le piston de l'une détruit à chaque instant l'effet du piston de l'autre, et s'il n'y a qu'une pompe, l'effet de la descente est compensé par l'effet contraire de l'ascension, de sorte que le travail relatif à un nombre pair d'oscillations se trouve encore indépendant du poids du piston.

Désignons par x une portion quelconque de l'ascension ou de la descente, par p'_1 la tension qui a lieu quand s'achève le parcours de x, et par S l'aire d'une des bases du piston en mètres carrés. Le travail élé-

mentaire fait dans l'instant suivant sera

$$dT' = Sp'_1 dx.$$

Nous supposerons, pour faire disparaître la variable p'_1, que la température reste la même pendant toute la course du piston, ce qui diffère peu de la vérité. Alors, les tensions p'_1 et p' sont inverses des volumes occupés par la masse d'air qui les possède, et comme ces volumes, de même base S, sont proportionnels à leurs hauteurs, les tensions p'_1 et p' sont en raison inverse des mêmes hauteurs. Soient donc h la course du piston, et h' la hauteur de l'espace nuisible. La hauteur du volume d'air qui a la tension p'_1 est $h+h'-x$; la hauteur du volume d'air qui, à l'origine du mouvement, possède la tension p' est $h+h'$, et par conséquent,

$$p'_1 : p' :: h+h' : h+h'-x.$$

Il en résulte

$$p'_1 = p'\frac{h+h'}{h+h'-x}, \qquad dT' = Sp'(h+h')\frac{dx}{h+h'-x},$$

et $$T' = -Sp'(h+h')\mathrm{Log}'(h+h'-x)+C.$$

Mais l'intégrale doit être prise depuis $x=0$, qui répond à la position I' qu'a le piston au commencement du mouvement, jusqu'à $x=h''$, portion de la course parcourue au moment où la tension devient p''. La première limite donne

$$-Sp'(h+h')\mathrm{Log}'(h+h')+C,$$

et la seconde,

$$-Sp'(h+h')\mathrm{Log}'(h+h'-h'')+C.$$

Retranchant la première valeur de la deuxième, qui

est la plus grande à cause des signes —, on obtient

$$T' = Sp'(h+h')\{\mathrm{Log}'(h+h') - \mathrm{Log}'(h+h'-h'')\},$$

ou

$$T' = Sp'(h+h')\mathrm{Log}'\frac{h+h'}{h+h'-h''}.$$

Si, au lieu des hauteurs, nous voulons introduire les volumes, nous représenterons par V le nombre de mètres cubes contenu dans celui qui a pour hauteur $h+h'$, et où la tension est p'; par V' le nombre de mètres cubes contenu dans celui qui a pour hauteur $h+h'-h''$, et où règne la tension p''. Comme ces volumes ont S pour base commune, il en résultera

$$T' = p'V\,\mathrm{Log}'\frac{V}{V'},$$

ou en logarithme ordinaire,

$$T' = 2{,}3026p'V\,\mathrm{Log}\frac{V}{V'}.$$

305. A ce premier travail en succède un second T'', qui fait passer l'air du cylindre dans le tuyau E, en réduisant le volume V' au volume v de l'espace nuisible, sans changer la tension p'', résistance à vaincre. L'effort constant est évidemment Sp'', et la portion de course parcourue, $h+h'-h''-h'$. Conséquemment,

$$T'' = Sp''\{(h+h'-h'')-h'\} = p''(V'-v).$$

Cette expression montre que la machine soufflante lance d'autant plus d'air dans le réservoir qu'il y a plus de différence entre V' et v. Si l'on avait $V'=v$, ou $h+h'-h''=h'$, ou $h-h''=0$, ou $h=h''$, le piston s'arrêterait dès que la tension p' serait devenue p'', le travail T'' serait nul,

la machine se bornerait à dilater l'air, puis à le comprimer jusqu'à la tension p'', et aucune masse de fluide ne passerait dans le tuyau E. L'espace nuisible v doit donc être strictement restreint à ce qu'exige le jeu de la soupape qui s'y ouvre.

306. Le travail T'' ne peut être fait sans que le volume d'air $V'-v$ fuie devant le piston, puisque la tension p'' ne change pas. Il y a donc aussi un travail T''' à exécuter, pour imprimer à ce volume la vitesse u de la descente. Soit δ le poids d'un mètre cube d'air sous la tension p''. On a $(V'-v)\delta$ pour le poids total à mettre en mouvement, $\frac{(V'-v)\delta}{g}$ pour la masse, $\frac{V'-v}{g}\delta u^2$ pour la force-vive à imprimer, et $T'''=\frac{V'-v}{2g}\delta u^2$. Mais cette quantité est toujours assez petite pour être négligée, car u n'est jamais qu'une fraction de mètre.

307. Il faut aussi un travail T^{iv} pour surmonter le frottement du piston contre le cylindre, et celui de la tige contre les parois de la boîte à cuir ou à étoupes. Désignons par N la pression totale, et par f le coefficient du frottement, les matières en contact étant supposées les mêmes. Nous aurons

$$T^{iv}=fNh.$$

308. Ainsi, le moteur et la résistance totale font chacun un travail $T'+T''+T'''+T^{iv}$. Mais, l'air atmosphérique qui entre dans le cylindre aide le piston en le poussant dans le sens même de l'oscillation, ou fait un travail T^{v} en sens inverse de celui de la résistance. Il faut donc retrancher T^{v} de la somme précédemment obtenue, pour avoir la quantité d'action réellement nécessaire. Or, l'air affluent, ayant une tension à très-peu près constante p', exerce sur l'une des bases du piston

un effort Sp' pendant toute la course h. Par conséquent,

$$T^{v} = Sp'h = Sp'(h + h' - h') = p'(V - v).$$

Appelant donc Q l'effort moyen exercé par le piston pendant sa course h, on a enfin, pour la quantité d'action à dépenser,

$$Qh = T' + T'' + T''' + T^{iv} - T^{v} = 2,3026p'V \operatorname{Log}\frac{V}{V'} + p''(V' - v) + \frac{V' - v}{2g}\delta u^2 + fNh - p'(V - v).$$

309. Les volumes V, v et la hauteur h dépendent des dimensions de la machine.

Il y a entre V', V la relation $\frac{V'}{V} = \frac{p'}{p''}$, puisque la masse d'air, éprouvant très-peu de variation dans sa température, prend des volumes inverses des pressions qu'elle supporte, et $V' = V\frac{p'}{p''}$.

Nous avons, comme au n.° 292,

$$\delta = \frac{1^{kg},3 + 1^{kg},713c}{1 + 0,004t},$$

si la hauteur manométrique c et la température t se rapportent à l'intérieur du corps de pompe.

La vitesse u du piston égale évidemment le produit de la course h et du nombre d'oscillations exécutées en 1''.

Il ne s'agit donc plus, pour rendre applicable la valeur de Qh, que de remplacer le terme fNh par une quantité facile à calculer.

Comme le piston doit se mouvoir verticalement, il importe que ses faces planes restent toujours horizon-

tales. Or, il n'en peut être rigoureusement ainsi, à moins que la génératrice droite n'ait une certaine longueur l; car une simple feuille circulaire basculerait autour de son point d'attache à la tige, pour peu que le frottement devînt plus grand en un point quelconque qu'au point diamétralement opposé. Supposons qu'en effet le frottement, d'abord uniforme sur toutes les génératrices droites du piston, augmente tout à coup de F sur une seule AB (P. V, F. 8), par suite d'un défaut dans l'alésement du corps de pompe. Il faut, pour qu'il n'en résulte pas un mouvement de bascule, qu'aussitôt le frottement s'accroisse aussi de F sur la génératrice opposée CD. La pression totale qui s'exerce tout le long de cette génératrice, et qu'on peut regarder comme appliquée au milieu E, devra donc croître d'une certaine quantité p, telle que $fp = F$.

Mais, puisque p provient de F, il y a égalité entre leurs moments relatifs au centre G de la rotation qui tend à naître, $p\frac{l}{2} = F\frac{d}{2}$, si d représente le diamètre du piston, $p\frac{l}{2} = fp\frac{d}{2}$, et $l = fd$.

Ainsi, pour qu'un piston ne puisse jamais pivoter verticalement autour de son point d'attache à la tige, il lui faut une longueur égale au produit de son diamètre et du coefficient du frottement.

Il s'ensuit que la surface frottante $l\pi d = f\pi d^2$. Or, l'expérience apprend qu'il faut, pour éviter les fuites, rendre la pression latérale du piston égale à $^1/_{10}$ de celle qui a lieu sur la base foulante. La pression totale vaut donc $0{,}1 f\pi d^2 p''$, si, pour la prendre au maximum, nous supposons la pression p'' exercée pendant toute la descente, et le frottement du piston est $0{,}1 f^2\pi d^2 p''$.

Comme la botte a des dimensions telles qu'il s'y fait un frottement d'à peu près $^1/_{10}$ du précédent,

$$fN = 0,11 f^2 \pi d^2 p'' = 0,3456 f^2 d^2 p''.$$

Par conséquent,

$$Qh = 2,3026 p'V \operatorname{Log} \frac{p''}{p'} + (p'V - p''v) + \frac{p'V - p''v}{2gp''} \delta u^2 + 0,3456 f^2 d^2 p'' h - p'(V - v).$$

On a d'ailleurs, pour déterminer les pressions p', p'', les relations précédemment trouvées (303)

$$pa = p'a + 0,96q,$$
$$p''a = p_1 a + 0,96q.$$

La première donne

$$p' = p - 0,96\frac{q}{a} = 10334^{kg},48 - 0,96\frac{q}{a},$$

parce que (292) la pression moyenne de l'atmosphère sur 1^{mm} est $10334^{kg},48$; et si c' indique la hauteur manométrique due à la pression p_1 dans le réservoir, il résulte de la seconde (291)

$$p'' = 13598^{kg}(0,76 + c') + 0,96\frac{q}{a}.$$

310. De la quantité d'action à dépenser pour une course du piston se déduit facilement celle **T** qui se consomme en 1''. Ayant observé la machine, afin de connaître le nombre k des oscillations faites par minute, on a

$$T = \frac{k}{60} Qh.$$

311. Nous prendrons la machine soufflante des forges

de Hayange pour sujet d'application. Cette machine est une double pompe à deux vents; elle refoule l'air dans un réservoir qui le verse par quatre buses sur les foyers de deux hauts-fourneaux.

Le piston a $0^m,925$ de rayon et $0^m,2$ d'épaisseur; la hauteur du corps de pompe en fonte est $2^m,2$; la course $h=1^m,82$; $k=10$; le manomètre marque $0^m,0685$ sous le piston, $0^m,0656$ dans le réservoir, et $0^m,063$ dans les buses, terme moyen; chaque soupape pèse à peu près $0^{kg},3525$ et présente une superficie de $0^{mm},05$; enfin, au moment où l'on a pris ces données, le local avait une température de $15°=t$, et le baromètre y était à $0^m,76$.

Il s'ensuit

$$p'=10334^{kg},48-0,96\frac{0^{kg},3525}{0,05}=10327^{kg},71,$$

$$p''=13598^{kg}(0,76+0^m,0656)+0,96\frac{\overset{kg}{0,3525}}{0,05}=\overset{kg}{11233},28,$$

$$2h'=2^m,2-1^m,82-0^m,2=0^m,18,\quad h'=0^m,09,$$

$$V=3,1416(0^m,925)^2(1^m,82+0^m,09)=5^{mc},1341,$$

$$v=3,1416(0^m,925)^2\times 0^m,09=0^{mc},242,$$

$$\delta=\frac{1^{kg},3+1^{kg},713\times 0,0685}{1+0,004\times 15}=1^{kg},3371,$$

$$u=\frac{k}{60}h=\frac{10}{60}1^m,82=0^m,303,\qquad d=0^m,925\times 2=1^m,85,$$

et comme le piston est entouré de cuir huilé, $f=0,15$.

Conséquemment, le travail nécessaire pour changer la tension p' en p'',

$$2,3026p'V\text{Log}\frac{p''}{p'}=2,3026\times 10327^{kg},71\times 5^{mc},1341\text{Log}\frac{11233,28}{10327,71}=4456^k,36;$$

le travail qui fait passer l'air dans le réservoir,

$$p'V - p''\nu = 10327^{kg},71 \times 5^{mc},1341 - 11233^{kg},28 \times 0^{mc},242 = 50305^{k},042\,;$$

le travail à produire pour imprimer au fluide sa vitesse d'écoulement,

$$\frac{p'V - p''\nu}{2gp''}\,\delta u^2 = \frac{50\,305,042}{2 \times 9^{m},81 \times 11\,233,28}\,1^{kg},3371(0^{m},303)^2 = 0^{k},028\,;$$

le travail qu'exige le frottement,

$$0,3456 f'^2 d^2 p'' h = 0,3456(0,15)^2(1,85)^2 11\,233^{kg},28 \times 1^{m},82 = 544^{k},099\,;$$

le travail que l'air affluent fait sur le piston dans le sens du mouvement,

$$p'(V - \nu) = 10327^{kg},71(5^{mc},1341 - 0^{mc},242) = 50\,524^{k},19\,;$$

le travail total pour chaque oscillation,

$$Qh = 4\,456^{k},36 + 50\,305^{k},042 + 0^{k},028 + 544^{k},099 - 50524^{k},19 = 4781^{k},339;$$

enfin le travail à faire, dans chaque seconde, sur un seul piston ou pour un seul haut-fourneau,

$$T = \frac{10}{60} 4\,781^{k},339 = 796^{k},89 = 10^{ch},625.$$

Ainsi, l'action de l'air aspiré est plus que suffisante pour chasser l'air refoulé ; la vitesse à donner au fluide n'absorbe qu'une très-petite fraction de kilogramme-mètre ; c'est le changement de la tension qui constitue le travail principal, et celui qu'exige le frottement en forme seulement les 0,122.

312. La dépense Qh, qui vient d'être calculée, a pour effet l'introduction dans le réservoir d'un volume d'air, à tension p'',

$$V' - \nu = V\frac{p'}{p''} - \nu = \frac{p'V - p''\nu}{p''} = \frac{50\,305^{mc},042}{11\,233,28} = 4^{mc},478,$$

$X = mau_1$ (287) la relation $d = \sqrt{\frac{4X}{\pi m u_1}}$, qui donne

$$d = \sqrt{\frac{4X}{3{,}1416 \times 0{,}94u_1}} = \sqrt{\frac{X}{0{,}738u_1}},$$

pour déterminer le diamètre de la sortie.

314. Soient p_1 la pression extérieure, p, c, δ la pression dans la buse, la hauteur manométrique correspondante, et le poids spécifique qui en résulte pour l'air. Le nombre de mètres c est donné par les équations

$$13\,598^{kg}c = p - p_1, \qquad u_1 = \sqrt{\frac{2g(p-p_1)}{\delta}},$$

$$\delta = \frac{1^{kg},3 + 1^{kg},713c}{1 + 0{,}004t},$$

trouvées dans les n.os 291, 287, 292. On tire de la seconde

$$p - p_1 = \frac{\delta u_1^2}{2g} = \frac{1^{kg},3 + 1^{kg},1713c}{1 + 0{,}004t} \times \frac{u_1^2}{2g};$$

la première devient

$$13\,598^{kg}c = \frac{1^{kg},3 + 1^{kg},713c}{1 + 0{,}004t} \times \frac{u_1^2}{2g},$$

et

$$c = \frac{1^{kg},3u_1^2}{13598^{kg}(1+0{,}004t)2g - 1{,}713u_1^2} = \frac{u_1^2}{205\,225^m,2(1+0{,}004t) - 1{,}32u_1^2}.$$

Il suffira donc de remplacer t par une température qui convienne à la proximité du foyer, pour obtenir le nombre de mètres que devrait marquer un manomètre appliqué à la buse.

Les formules du mouvement de l'air fourniraient aisément une relation entre c et la hauteur manométrique c' relative au réservoir ou régulateur; mais les expériences

de M. d'Aubuisson lui ont permis d'en établir une plus simple, qui donne pourtant à fort peu près la même valeur pour c'. D'après ce savant ingénieur,

$$c' = c\left(1 + 0{,}0238\, l' \frac{d^4}{d'^5}\right).$$

La longueur l' du porte-vent dépend uniquement du local, et le diamètre d' du même tuyau est pris aussi grand que le permet une économie bien entendue; car il importe de diminuer c', afin qu'il y ait une moindre pression p' dans le réservoir, et que, par suite, le refoulement de l'air dans la pompe exige moins de travail.

Ayant c', on en déduit aisément p', puisque (291)

$$p' = 13598^{\text{kg}}(0{,}76 + c').$$

315. La formule VII du n.° 290 donne alors le moyen de déterminer la pression p'' qui doit régner dans le corps de pompe pendant l'expulsion de l'air. Il faut y remplacer la pression intérieure p par p'', la pression p_1 par p', δ par δ', u_1 par u'_1, et l'aire a de l'entrée dans le réservoir par l'aire A' de la section droite du tuyau de conduite qui lie le régulateur au corps de pompe, car cette entrée n'est diminuée ni par une soupape ni par un rétrécissement.

Conséquemment, $m = 1$; la vitesse avec laquelle l'air débouche dans le réservoir,

$$u_1' = \sqrt{\frac{2g(p'' - p')}{\delta'\left[1 - \frac{A'^2}{A^2} + 0{,}0063\frac{\omega l}{A'} + \left(\frac{A'}{m'a'} - 1\right)^2 - \left(1 - \frac{A'}{A''}\right)^2\right]}},$$

et

$$p'' = p' + \frac{u'^2_1 \delta'}{2g}\left[1 - \frac{A'^2}{A^2} + 0{,}0063\frac{\omega l}{A'} + \left(\frac{A'}{m'a'} - 1\right)^2 - \left(1 - \frac{A'}{A''}\right)^2\right].$$

Comme la densité de l'air peut être supposée constante de la pompe au régulateur, le poids spécifique est le même dans ces deux cylindres, et

$$\delta' = \frac{1^{kg},3 + 1^{kg},715c'}{1 + 0,004t'},$$

t' étant la température moyenne des ateliers de forges.

D'ailleurs, $A'u'_1 = Au_2$, si u_2 indique la vitesse de l'air fuyant et celle du piston. Or, cette dernière se règle de manière à donner environ 10 oscillations par minute, ce qui rend $u_2 = \frac{10}{60}h = \frac{h}{6}$, h étant la course verticale et de $1^m,85$ à 2^m. Il en résulte que le fluide entrant dans le régulateur a une vitesse peu différente de celle qu'il y prend, et que le choc ne cause qu'une faible perte de quantité d'action.

Les diamètres D, D' du corps de pompe et de la conduite sont ordinairement tels qu'on peut admettre 0,25 pour valeur provisoire du rapport $\frac{D'}{D}$. De là suit,

$$\frac{A'}{A} = \frac{D'^2}{D^2} = (0,25)^2 = 0,0625, \qquad \frac{\omega}{A'} = \frac{\pi D'}{{}^1/_4\pi D'^2} = \frac{4}{D'}.$$

Enfin, on a coutume de faire $\frac{a'}{A'} = 0,3$; rien n'empêche de rendre la section A'' du régulateur égale à A, celle du corps de pompe, et quant à la longueur l de la conduite, elle dépend du local, comme l'.

Par conséquent,

$$u'^2_1 = \frac{A^2}{A'^2}u_2^2 = \left(\frac{1}{0,0625}\right)^2 \frac{h^2}{36} = \frac{h^2}{0,1404},$$

$$\frac{A'^2}{A^2} = (0,0625)^2 = 0,0039,$$

$$p'' = p' + \frac{\delta' h^2}{2,783}\left[1 - 0,0039 + 0,0063\frac{4l}{D'} + \left(\frac{1}{0,3m'} - 1\right)^2 - 0,8789\right];$$

et, comme la soupape de la conduite exige que $m' = 0,65$, étant toujours pratiquée en mince paroi,

$$p'' = p' + \frac{\delta' h^2}{2,783}\left(17,1576 + 0,0063\frac{4l}{D'}\right) = p' + \delta' h^2\left(6,165 + 0,009\frac{l}{D'}\right).$$

Ainsi p'' ne sera connue qu'après la fixation de D'. Mais on ne déduira pas la valeur de D de celle qui sera donnée arbitrairement à D' et du rapport $\frac{D'}{D} = 0,25$, attendu que ce rapport n'est qu'une approximation adoptée dans la seule vue de prévenir des difficultés de calcul.

316. La hauteur c'' du mercure dans le manomètre appliqué au corps de pompe sera fournie par l'équation

$$p'' = 13598^{kg}(0,76 + c'').$$

Pour trouver le vrai diamètre du même cylindre, nous nommerons p''' la pression qui s'y exerce durant l'aspiration, h' la hauteur de l'espace nuisible, et h'' la partie de course pendant le parcours de laquelle p''' devient p''. D'après cette notation, le volume de la masse d'air sous la pression p''' vaut $\frac{1}{4}\pi D^2(h + h')$, et sous la pression p'', le volume de la même masse est $\frac{1}{4}\pi D^2(h + h' - h'')$. Comme la température reste à fort peu près constante, les pressions sont inverses des volumes,

$$\frac{p'''}{p''} = \frac{h + h' - h''}{h + h'}, \quad \text{et} \quad h'' = (h + h')\left(1 - \frac{p'''}{p''}\right) = \frac{21}{20}h\left(1 - \frac{p'''}{p''}\right),$$

parce qu'il est d'usage de restreindre la hauteur de l'espace nuisible à $\frac{1}{20}$ de la course.

Mais (309)

$$p''' = 10334^{kg},48 - 0,96\,\frac{q}{a}\,;$$

la soupape d'aspiration pèse habituellement $0^{kg},3525 = q$, et sa superficie a vaut $0^{mm},05$. Donc

$$p''' = 10327^{kg},71\,, \qquad h'' = \frac{21}{20}\,h\left(1 - \frac{10327^{kg},71}{p''}\right).$$

Ayant h'' en fonction de p'', on obtiendra de la même manière le diamètre D, car il est d'expérience que le volume d'air X versé en $1''$ sur le foyer doit être les 0,75 du volume qui serait expulsé du corps de pompe dans le même temps, s'il n'y avait pas d'espace nuisible, et comme le second volume vaut

$$\frac{10}{60} \times \frac{\pi D^2}{4}(h - h''), \qquad X = 0,75\,\frac{\pi D^2}{24}(h - h''),$$

relation d'où l'on tire

$$D = \sqrt{\frac{10,186X}{h - h''}}.$$

Les difficultés de calcul dont nous avons parlé plus haut (315) viendraient de ce que, ne fixant pas un nombre pour D', il faudrait substituer sa valeur 0,25D dans celle de p''; alors h'' et le dénominateur de l'expression de D^2 seraient fonction de D, ce qui obligerait à résoudre une équation complète du 3.e degré pour déterminer le diamètre du corps de pompe.

Le piston a aussi D pour diamètre, et par conséquent (309) son épaisseur

$$e = fD = 0,15D,$$

parce qu'il doit être entouré de cuir huilé.

Enfin, la course, l'épaisseur du piston et les deux espaces nuisibles font que la hauteur totale du cylindre de fonte,

$$H = h + fD + 2h' = 1,1h + fD.$$

317. Imposons-nous pour sujet d'application la détermination des principales dimensions et des hauteurs manométriques d'une pompe à deux vents et à deux buses, qui doive verser par seconde $0^{mc},7$ d'air animé d'une vitesse de 120^{m}.

Comme chaque buse versera $0^{mc},35$, le diamètre

$$d = \sqrt{\frac{X}{0,738u_1}} = \sqrt{\frac{0^{mc},35}{0,738 \times 120^{m}}} = 0^{m},063.$$

Ce n'est pas exagérer que de porter à 25° la température prise par l'air en passant dans les buses. Il s'ensuit pour la hauteur de leurs manomètres,

$$c = \frac{(120^{m})^2}{205225^{m},2(1+0,004\times 25) - 1,32(120^{m})^2} = 0^{m},0696.$$

Nous donnerons au porte-vent un diamètre de $0^{m},3$ et une longueur de 100^{m}. Le manomètre du régulateur devra donc indiquer un nombre de mètres

$$c' = 0^{m},0696\left[1 + 0,0238 \times 100^{m}\frac{(0^{m},063)^4}{(0^{m},3)^5}\right] = 0^{m},071.$$

Par suite,

$$p' = \overset{kg}{13\,598}(0,76 + 0,071) = \overset{kg}{11\,299,94},$$

$$\delta' = \frac{\overset{kg}{1,3} + \overset{kg}{1,713} \times 0,071}{1 + 0,004 \times 14} = \overset{kg}{1,3466},$$

si l'on fait $t = 14^{\circ}$.

Prenons 6^{m} pour longueur de la conduite, $0^{m},4$ pour le diamètre de ce tuyau, et $0^{m},95$ pour le bras de la

manivelle qui fait osciller le piston. Il en résultera

$$h = 2 \times 0^{m},95 = 1^{m},9,$$

$$p'' = 11299^{kg},94 + 1^{kg},3466(1,9)^2\left(6,165 + 0,009\frac{6}{0,4}\right) = 11330^{kg},566,$$

$$c'' = \frac{p'' - 13598^{kg} \times 0,76}{13598^{kg}} = \frac{11330^{kg},566 - 10334^{kg},48}{13598^{kg}} = 0^{m},0732,$$

$$h'' = 1,05 \times 1^{m},9\left(1 - \frac{10327^{kg},71}{11330^{kg},566}\right) = 0^{m},1766,$$

$$D = \sqrt{\frac{10,186 \times 0^{mc},35}{1^{m},9 - 0^{m},1766}} = 1^{m},4383,$$

$e = 0,15 \times 1^{m},4383 = 0^{m},216$, et $H = 1,1 \times 1^{m},9 + 0^{m},216 = 2^{m},306$.

MACHINES SOUFFLANTES DE TRANSPORT.

318. Les machines soufflantes qui transportent l'air sont au nombre de trois : la *trompe*, le *chapelet* et la *vis d'Archimède ;* mais nous ne pourrons pas même décrire ce dernier soufflet dû à M. Cagnard, attendu qu'il se trouve seulement cité dans le tome VII des Annales des mines, et qu'il n'en est pas question dans le reste du recueil, bien que les rédacteurs renvoient au tome XVI de leur journal.

Le véhicule de la trompe est une masse d'eau qu'on fait tomber verticalement. D'un bief A (P. V, F. 9) le liquide descend dans l'entonnoir B, dont la partie inférieure est enveloppée du tuyau vertical C, cylindrique ou prismatique, nommé l'*arbre*. Tantôt un faible jour est laissé entre la surface externe de l'entonnoir et la surface interne de l'arbre ; tantôt ces deux surfaces se rachètent, et l'on perce près de leur inter-

section, dans la paroi du tuyau, trois trous D inclinés, coniques, nommés *trompilles*, dont le plus grand orifice est en dehors; ces trous, placés à la même hauteur, divisent le pourtour de l'arbre en trois parties égales.

La chute de l'eau détermine un courant d'air de même direction, et le liquide entraînant le gaz qui entre par les trompilles, arrive dans une grande caisse E, où un *tablier* F criblé de trous détruit la vitesse. Alors les deux fluides rejaillissent et se séparent; le plus lourd tombe au fond de la caisse, s'y accumule, remplit par l'ouverture G une cuvette H plus haute que cette ouverture, et se déverse au dehors dès que son niveau dans la caisse atteint la hauteur des bords de la cuvette. L'air ne pouvant plus sortir par l'ouverture G ni remonter dans l'arbre, prend une tension supérieure à celle de l'atmosphère, et obligé de céder la place à celui qu'introduit sans cesse le courant, il fuit par le porte-vent I vers le foyer qu'il doit alimenter.

Comme l'air se mêle à l'eau pendant la chute dans l'arbre, il est visible que l'*étranguillon*, orifice inférieur de l'entonnoir, doit être placé le plus haut possible. On laisse donc seulement une distance d'environ $0^m,5$ entre cet orifice et le niveau dans le bief. Quant aux diamètres de l'entonnoir, celui de l'étranguillon se détermine de manière que le niveau de l'eau affluente reste constant, et l'on se borne à rendre un peu plus grand celui de l'orifice supérieur, afin de n'avoir pas une forte contraction.

La caisse doit être oblongue, et avoir, quand elle est destinée à l'alimentation d'un haut-fourneau, $3^m,5$ de longueur sur $1^m,5$ de hauteur. Sa largeur dépend du nombre des arbres qui doivent y aboutir. On les place tous à l'un des bouts, dans un plan perpendiculaire

à la longueur, et le porte-vent s'adapte à l'autre bout, pour que l'air n'y entre pas chargé de bruine. Enfin le tablier est établi à environ 1^m au-dessous du couvercle.

519. Voici maintenant des faits qu'on a constatés en appliquant un manomètre à la caisse et en fermant le porte-vent. La tension de l'air intérieur augmente peu quand l'entonnoir et l'arbre forment ensemble une hauteur moindre que 6^m ; elle croît d'autant plus promptement qu'il y a un plus grand rapport entre la section droite de l'arbre et l'aire de l'étranguillon ; l'accroissement cesse dés que ce rapport surpasse 2 ; une quatrième trompille n'augmente point la masse d'air de la caisse ; des trompilles percées vers le milieu de l'arbre restent sans aucune influence ; celles qui seraient placées près de l'extrémité inférieure donneraient lieu à des jets d'eau, et nuiraient par conséquent à l'affluence de l'air.

Une trompe doit donc, pour constituer un bon soufflet, avoir un arbre d'au moins 6^m, dont la section droite se trouve précisément double de l'étranguillon, et qui ne soit percé d'aucune trompille vers son extrémité inférieure. Cette dernière condition a contre elle un préjugé inexplicable : les forgerons des Pyrénées croient qu'une trompe soufflerait faiblement s'il n'en sortait pas des jets d'eau par des ouvertures pratiquées au bas de l'arbre.

Il est facile d'expliquer les faits qui viennent d'être indiqués. Lorsque la chute est faible, l'eau mélangée d'air n'a pas, à son entrée dans la caisse, une force-vive capable de vaincre instantanément la résistance qu'oppose l'air intérieur en vertu de sa tension, et le fluide refoulé sort en partie par l'une des trompilles voisines de l'étranguillon. La réaction doit évidemment

produire encore un effet analogue, quand un grand arbre a des trompilles à son extrémité inférieure. Mais on conçoit que le ressort de la caisse ne donne plus au milieu d'un grand arbre qu'une force à peu près égale à la pression atmosphérique, et qu'il ne peut rien entrer ni sortir par des trompilles placées vers ce milieu.

Une fois sorties de l'étranguillon, les tranches d'eau se séparent et s'élargissent; leur épaisseur diminue d'autant plus que l'arbre a un plus grand diamètre; par suite, une plus grande quantité d'air peut se loger entre elles et être charriée dans la caisse. Mais si la section droite de l'arbre est telle que la colonne liquide ne puisse la remplir, une portion de l'air affluent se loge entre cette colonne et la paroi; puis formant un contre-courant, elle remonte vers les trompilles.

On voit par là que la forme cylindrique est préférable pour l'arbre à la forme prismatique circonscrite, car les coins compris entre les deux n'ont aucune influence utile, quand la section droite du cylindre est double de l'étranguillon, et ils en ont une nuisible, puisqu'il s'y fait un courant ascensionnel propre à diminuer la masse d'air transportée vers la caisse.

320. Pour démontrer qu'en effet la colonne d'eau est formée de tranches séparées, nous dirons d'abord que le milieu de celle qui passe à un instant quelconque par l'étranguillon, s'en trouve, au bout du temps t, à une distance $e = \frac{1}{2}gt^2$. Le milieu de la tranche suivante est éloigné de cet orifice, au même moment, d'une quantité $e' = \frac{1}{2}gt'^2$. Il y a donc entre les deux milieux un intervalle

$$e - e' = \frac{1}{2}g(t^2 - t'^2) = \frac{1}{2}g(t - t')(t + t').$$

Mais, au moment du passage par l'étranguillon, les deux

tranches consécutives se touchaient, et la distance de leurs milieux ou la somme des deux demi-épaisseurs valait à fort peu près $(t-t')u$, si u représente la vitesse à la sortie de l'entonnoir. Comme l'épanouissement de la veine double les bases des tranches, les épaisseurs se réduisent à moitié, et le véritable intervalle de ces bases, après le temps t, se trouve être

$$\tfrac{1}{2}g(t-t')(t+t') - \tfrac{1}{2}(t-t')u.$$

Supposons que l'étranguillon soit à $0^m,5$ du niveau dans le bief, faisons $t-t'=0'',001$, et demandons-nous à quelle distance e de l'entonnoir les deux tranches laisseront entre elles un intervalle de $0^m,005$. Nous aurons d'abord

$$u = \sqrt{2g \cdot 0^m,5} = 3^m,133,$$

puis

$$0^m,005 = \frac{9^m,81}{2} 0,001(t+t') - \frac{0,001 \times 3^m,133}{2},$$

$$t+t' = \frac{0^m,01 + 0,003\,133}{0,009\,81} = 1'',34,$$

$$t = \frac{1'',34 + 0'',001}{2} = 0'',6705,$$

et enfin $$e = \frac{9^m,81}{2}(0,6705)^2 = 2^m,21.$$

Si l'on remarque que l'intervalle des milieux $e-e'$ croît comme la somme $t+t'$ des temps de chute, et qu'une augmentation dans la vitesse u diminuerait ces temps pour une descente déterminée, on comprendra l'importance de ce qui a été prescrit sur la hauteur à laquelle doit être placé l'étranguillon (318).

321. Les particules d'une même tranche ne descendent pas également vite, à cause de l'air placé audessous qui les sépare, en tendant à s'élever, et repousse les unes plus que les autres. Il ne passe donc pas par l'orifice inférieur de l'arbre alternativement une tranche d'eau et une tranche d'air; la masse qui entre dans la caisse en 1″ est un mélange indéfinissable des deux fluides. De là suit qu'on ne saurait calculer directement la quantité d'air produite par une trompe. La détermination de la vitesse à l'entrée, celle de l'intervalle de deux tranches consécutives au même point, et celle du nombre des intervalles qui passent en 1″, donneraient un résultat tellement éloigné de la réalité, qu'il ne pourrait être regardé comme une approximation.

Il a donc fallu rechercher expérimentalement le rapport qui existe entre la quantité d'action communiquée à l'air versé par la buse et le travail de l'eau motrice, afin de pouvoir déduire du liquide dépensé le volume de gaz produit. De nombreuses expériences ont été faites à ce sujet par MM. Thiband et Tardy sur les trompes des Pyrénées, puis par M. d'Aubuisson tant sur les mêmes trompes que sur d'autres, bien meilleures, analogues à celles des Alpes. Le rapprochement des résultats obtenus montre que le rapport de l'effet utile au travail fait est généralement 0,1, et qu'il peut s'élever à 0,15 dans les appareils bien proportionnés et bien construits.

Soient donc H la distance verticale de l'eau du canal de fuite au niveau du bief, h la distance de l'étranguillon au même niveau, A la superficie de cet orifice en mètres carrés, a celle du petit cercle de la buse, u_1 la vitesse de l'air à sa sortie, δ le poids d'un mètre cube de ce fluide. La dépense d'eau (131) a pour expression $C''A\sqrt{2gh}$; le poids de ce volume vaut

1000^{kg} C″A$\sqrt{2gh}$; le travail du moteur est, pour 1″, 1000^{kg} C′AH$\sqrt{2gh}$; le volume de l'air versé dans le même temps par la buse (287) égale mau_1; il a une masse $\frac{mau_1\delta}{g}$; la quantité d'action qu'il possède

$$\frac{mau_1\delta}{g}\times\frac{u_1^2}{2}=\frac{ma\delta u_1^3}{2g},$$

et les formules pratiques sont, pour les cas ordinaires,

$$\frac{ma\delta u_1^3}{2g}=100^{kg}C''AH\sqrt{2gh},$$

et pour les cas du maximum d'effet,

$$\frac{ma\delta u_1^3}{2g}=150^{kg}C''AH\sqrt{2gh}.$$

On détermine d'ailleurs la quantité δ au moyen de l'équation

$$\delta=\frac{1^{kg},3+1^{kg},713c}{1+0,004t}$$

du n.° 292, ou bien cette quantité se remplace par $1^{kg},3$, poids qui diffère toujours très-peu du véritable.

322. Nous avons trouvé 0,686 pour rapport de l'effet utile d'une pompe soufflante au travail du moteur (312). La trompe est donc de beaucoup inférieure à cette machine; son désavantage devient même plus grand encore, quand elle se trouve adaptée à une chute moindre que 6^m, car elle donne peu de vent alors, et produit un effet bien au-dessous de 0,1 du travail fait. Mais, si la chute est grande et l'eau abondante, la trompe doit être préférée à toute autre machine soufflante : elle est très-simple et très-facile à construire; elle exige peu de

soins, peu de frais d'établissement et d'entretien; son action se régularise et se modère fort aisément, au moyen de bondons percés qui diminuent plus ou moins l'aire de l'étranguillon; enfin il suffit de monter plusieurs arbres sur la même caisse, pour obtenir d'une seule buse un vent aussi fort que l'exige toute usine où l'on consume du charbon de bois.

On reproche aux trompes, il est vrai, de verser un air nuisible aux travaux métallurgiques, en raison de la grande quantité de vapeur aqueuse qu'il est supposé contenir; mais rien n'a encore prouvé que l'air humide nuise effectivement à la qualité du fer ou à la quantité produite avec un poids donné de charbon, et les expériences de MM. Thibaud et Tardy montrent que la masse d'eau renfermée dans l'air d'une trompe n'excède guère celle du même volume de fluide atmosphérique; le contraire arrive même assez souvent.

323. Dans la trompe de Rancié, défectueuse comme toutes celles des Pyrénées, l'étranguillon a un diamètre de $0^m,15$; il se trouve à $0^m,64$ au-dessous du niveau du bief, et la chute totale est de $8^m,61$. Supposons que le diamètre de la grande base de l'entonnoir excède de $\frac{1}{4}$ celui de la petite (131), et que la buse conique (291) ait un diamètre de $0^m,03$, nous aurons

$$C'' = 0,8, \qquad m = 0,94, \qquad A = \frac{\pi(0^m,15)^2}{4} = 0^{mm},0177,$$

$$a = \frac{\pi(0^m,03)^2}{4} = 0^{mm},0007;$$

la première formule du n.° 321 donnera

$$u_1 = \left\{ \sqrt[3]{\frac{2 \times 9^m,81 \times 100^{kg} \times 0,8 \times 0^{mm},0177 \times 8^m,61\sqrt{(2 \times 9^m,81 \times 0^m,64)}}{0,94 \times 0^{mm},0007 \times 1^{kg},3}} \right\} = 99^m,696,$$

et nous trouverons que le volume d'air versé sur le foyer en 1″,

$$mau_1 = 0{,}94 \times 0^{mm}{,}0007 \times 99^{m}{,}696 = 0^{mc}{,}0656.$$

324. Il existe dans une usine du Hartz une machine soufflante de transport dont le véhicule est un chapelet pareil à celui qu'on emploie pour élever l'eau. La chaîne sans fin ABCLA (P. V, F. 10) contient les centres des plateaux carrés B qu'elle porte, et se trouve soutenue par un croisillon à 6 bras D qui peut tourner sur deux tourillons. Au moment où chaque plateau passe devant le coursier E, il s'engage dans un puits F, légèrement courbe vers le bas, reçoit une charge d'eau qui ne remplit pas toute la capacité comprise entre les parois du puits et deux plateaux consécutifs, descend sous l'action de cette charge, comprime l'air que le plateau précédent a laissé au-dessus de l'eau d'une bâche G en s'y enfonçant, donne au fluide élastique la tension qui règne dans le régulateur H, le force d'y entrer par l'orifice I, et conséquemment fait sortir une masse égale d'air par le porte-vent K, puis s'enfonce à son tour dans la bâche pour remonter bientôt vers le croisillon. Ainsi, le chapelet est à la fois le véhicule et la machine motrice du soufflet.

Les plateaux doivent ne laisser aucun jeu entre leurs bords et les parois du puits, afin que leurs charges d'eau ne puissent diminuer, et qu'il soit impossible à l'air placé au-dessus de chaque charge de remonter vers le coursier. Ils frottent donc sur ces parois comme un piston sur celle du cylindre d'une pompe soufflante.

Les sections droites du puits prises au-dessous de l'orifice I sont un peu plus grandes qu'au-dessus, pour que les plateaux n'y frottent pas, et que l'eau de la bâche, remontant par le jeu, forme constamment une

surface d'appui contre laquelle puisse être effectuée la compression de l'air charrié.

Enfin, le liquide de la bâche, toujours au-dessous de l'orifice I dans le puits, a extérieurement un niveau plus élevé d'une quantité qui établit l'équilibre entre la pression atmosphérique et la pression dans le régulateur; de sorte que la bâche et la partie inférieure du puits constituent ensemble un véritable manomètre d'eau.

325. Pour établir la relation qui lie le travail du moteur et l'effet utile, nous nommerons u la vitesse de l'eau à la sortie du coursier, M la masse liquide versée en $1''$, u' la vitesse constante du chapelet, l la longueur de chaîne qui sépare deux plateaux consécutifs, d l'équarrissage du puits, c' la différence de niveau entre le puits et la bâche, ou la hauteur manométrique qui indique la pression dans le réservoir, a l'orifice de la buse conique en mètres carrés, u_1 la vitesse de l'air à sa sortie, h la chute quand la machine est au repos, c'est-à-dire la distance verticale du coursier au niveau commun qui s'établit alors dans la bâche et le puits, R la longueur des bras du croisillon, à partir de l'axe du treuil, et r le rayon des tourillons.

Lorsque le mouvement du chapelet est devenu uniforme, la différence de niveau c' reste constamment la même, la chute vaut $h+0,5c'$, et le moteur peut produire par seconde la quantité d'action

$$\frac{Mu^2}{2}+Mg(h+0,5\,c').$$

Mais le choc de la masse M contre les plateaux, qui a lieu en vertu de la vitesse relative $u-u'$, fait perdre par seconde une quantité d'action $\frac{M(u-u')^2}{2}$. L'énergie

réelle du moteur est donc seulement

$$\frac{Mu^2}{2} - \frac{M(u-u')^2}{2} + Mg(h+0{,}5c').$$

Comme les deux premiers termes de cette expression reviennent à $M(u-u')u' + \frac{Mu'^2}{2}$, somme de la quantité d'action $\frac{Mu'^2}{2}$ que conserve l'eau après le choc, et de celle qui est due à la quantité de mouvement $M(u-u')$ imprimée aux plateaux par la masse M, le travail utilisé du moteur vaut, pour chaque seconde,

$$M(u-u')u' + \frac{Mu'^2}{2} + Mg(h+0{,}5c').$$

Il doit égaler le travail total consommé par les diverses résistances dans le même temps, et ces résistances sont le frottement des plateaux sur les parois du puits, l'effort nécessaire pour amener à la tension de l'air du régulateur celui que renferme chaque intervalle, l'effort à exercer pour faire passer le fluide élastique de la seconde capacité dans la première, l'obstacle qu'oppose l'eau de la bâche au mouvement des plateaux immergés, et enfin le frottement des tourillons.

326. Lorsqu'un piston doit pousser sa tige, il a besoin, pour ne point basculer (309), d'une épaisseur fd; mais quand il la tire, dit Tredgold, il lui suffit d'une épaisseur égale à $0{,}4fd$. Or, les plateaux, descendant toujours pendant qu'ils fonctionnent comme pistons, tirent la chaîne qui remplace les tiges. La surface frottante est donc pour chacun $0{,}4fd \times 4d = 1{,}6fd^2$, et pour les n plateaux engagés à la fois dans le puits, elle vaut $1{,}6nfd^2$.

L'air comprimé tend à s'élever en vertu de sa ten-

sion qui vaut

$$1000^{kg}c' + 13\,598^{kg} \times 0{,}76.$$

Comme il suffit, pour empêcher le passage de l'air, que la pression latérale d'un plateau soit 0,1 de la pression sur la base, le frottement est sur l'unité de surface

$$0{,}1f(1000^{kg}c' + 10\,334^{kg}{,}48),$$

et la quantité d'action qu'il exige pour les n plateaux, dans chaque seconde, s'élève à

$$0{,}1f(1000^{kg}c' + 10\,334^{kg}{,}48)1{,}6nfd^2u' = (100^{kg}c' + 1033^{kg}{,}448)1{,}6nf^2d^2u'.$$

327. Nous avons trouvé (304) que $2{,}3026p'\,\mathrm{V}\,\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}'}$ est le travail nécessaire pour changer la tension p' d'un certain volume V d'air en une autre tension relative au volume V'. Or, si l' indique la hauteur de l'eau dans chaque intervalle, $\mathrm{V} = d^2(l - l')$ exprime le volume qu'il s'agit d'amener à la tension du régulateur. Cet air n'ayant plus aucune communication avec l'atmosphère, ne presse guère qu'en vertu de son poids, qui est

$$1^{kg}{,}3\,d^2(l - l'), \quad \text{ou} \quad 1^{kg}{,}3(l - l'),$$

pour chaque unité superficielle de la base. Telle serait donc aussi à fort peu près la pression qu'il exercerait sur un baromètre mis en communication avec la tranche inférieure. Comme la pression est nulle à la tranche supérieure, qui, faute d'être comprimée, se trouve pour ainsi dire dépourvue de ressort, on a pour pression ou tension moyenne,

$$p' = \frac{1^{kg}{,}3(l - l')}{2}.$$

D'ailleurs,

$$V : V' :: 1000^{kg}c' + 13598^{kg} \times 0{,}76 : \frac{1^{kg},3(l-l')}{2}.$$

Par conséquent,

$$\text{Log}\frac{V}{V'} = \text{Log}\frac{1000c' + 10334{,}48}{0{,}65(l-l')},$$

et le travail à faire pour amener l'air d'un seul intervalle à la tension de celui du régulateur, est

$$2{,}3026 \times 0^{kg},65(l-l')d^2(l-l')\,\text{Log}\frac{1000c' + 10334{,}48}{0{,}65(l-l')}.$$

Réduit à la seconde, il devient

$$\frac{(n-1)u'}{h+0{,}5c'}\,2{,}3026 \times 0^{kg},65d^2(l-l')^2\,\text{Log}\frac{1000c'+10334{,}48}{0{,}65(l-l')};$$

car $\frac{h+0{,}5c'}{u'}$ exprime le temps qu'emploie à passer devant l'orifice du régulateur la partie du chapelet engagée dans le puits, et parce que cette partie renferme $n-1$ intervalles, le nombre des intervalles qui passent en 1″ devant le même orifice est

$$(n-1) : \frac{h+0{,}5c'}{u'} = \frac{(n-1)u'}{h+0{,}5c'}.$$

328. La pression totale que l'eau motrice doit exercer pour faire entrer l'air d'un intervalle dans le régulateur, vaut évidemment $1000c'd^2$, car la pression atmosphérique agit aux deux extrémités du piston. Le chemin le long duquel cet effort est fait égale la hauteur du volume V′, c'est-à-dire

$$(l-l')\frac{0{,}65(l-l')}{1000c'+10334{,}48} = \frac{0{,}65(l-l')^2}{1000c'+10334{,}48}.$$

La quantité d'action à dépenser par intervalle est donc

$$1000c'd^2\frac{0,65(l-l')^2}{1000c'+10334,48},$$

ce qui donne pour $1''$,

$$1000c'd^2\frac{0,65(l-l')^2}{1000c'+10334,48}\times\frac{(n-1)u'}{h+0,5c'}.$$

329. Chaque plateau qui chemine dans l'eau de la bâche imprime, durant le temps dt, sa vitesse u' à la masse élémentaire dM$'$, ou lui communique une quantité de mouvement u'dM$'$, et de là une réaction d'autant contre la face antérieure. Or, le volume de dM$'$ a pour base d^2 et pour longueur du'; cette masse d'eau vaut donc $\frac{1000^{kg}d^2 du'}{g}$; la résistance élémentaire égale $\frac{1000^{kg}d^2}{g}u'du'$, et puisque la vitesse u' ne s'altère point, la résistance constante qui s'oppose au mouvement du plateau, pendant un temps fini quelconque, a pour expression

$$\int\frac{1000^{kg}d^2}{g}u'du'=\frac{1000^{kg}d^2u'^2}{2g}.$$

Mais cette valeur théorique se trouve trop faible, parce qu'elle est établie indépendamment des pertes de vitesse produites par les chocs auxquels donne lieu l'impression des quantités de mouvement élémentaires u'dM$'$, et parce que l'effet du sillage rend la pression en avant du plateau supérieure à la pression en arrière. L'expérience a montré, dit Navier, que pour les prismes qui cheminent selon leur longueur dans un fluide en repos, le coefficient de correction est 1,2, si la longueur du prisme égale la racine quarrée de la base, et 1,1 si elle surpasse cette racine, car la différence des pressions est d'autant moindre que le corps se trouve plus long.

Or, l'épaisseur fd du plateau étant inférieure à $\sqrt{d^2}$, il convient ici d'adopter au moins 1,3. Nous aurons donc $\frac{1300^{kg}d^2u'^2}{2g}$ pour la résistance constante qu'oppose le liquide de la bâche au mouvement de chaque plateau, $\frac{650^{kg}n'd^2u'^2}{g}$ pour celle des n' plateaux immergés à la fois, et $\frac{650^{kg}n'd^2u'^3}{g}$ pour la quantité d'action qu'elle absorbe par seconde.

330. La charge des tourillons comprend le poids P du chapelet et du croisillon, et le poids de l'eau contenue dans le puits, $Mg\,\frac{h+0{,}5c'}{u'}$; mais la pression de l'air du régulateur sur la face inférieure du plateau comprimant doit être déduite. En la supposant donc constamment égale à $1000c'd^2$, nous trouverons que le frottement des tourillons est

$$f'\left(P+Mg\frac{h+0{,}5c'}{u'}-1000c'd^2\right),$$

car la résistance de l'eau de la bâche ne peut le modifier d'une manière notable, puisqu'elle agit de bas en haut sur les plateaux descendants, et de haut en bas sur les plateaux ascendants. Or, le chemin d'un point quelconque de la surface des tourillons est évidemment, pour 1″, $\frac{u'}{R}\,r$. La quantité d'action consommée par leur frottement vaut donc

$$\frac{f'ru'}{R}\left(P+Mg\frac{h+0{,}5c'}{u'}-1000c'd^2\right),$$

et enfin l'équation de la machine est

$$M(u-u')u'+\frac{Mu'^2}{2}+Mg(h+0,5c')=(100^{kg}c'+1033^{kg},448)1,6nf'^2d^2u'$$

$$+\frac{(n-1)u'}{h+0,5c'}2,3026\times 0,65d^2(l-l')^2\,\mathrm{Log}\,\frac{1000c'+10334,48}{0,65(l-l')}$$

$$+1000c'd^2\frac{0,65(l-l')^2}{1000c'+10334,48}\times\frac{(n-1)u'}{h+0,5c'}+\frac{650n'd^2u'^3}{g}$$

$$+\frac{f'ru'}{R}\left(P+Mg\frac{h+0,5c'}{u'}-1000c'd^2\right). \qquad \text{(I)}$$

On a d'ailleurs, pour déterminer l', la relation

$$l'=\frac{Mg}{1000d^2}\times\frac{h+0,5c'}{(n-1)u'};$$

car le volume $l'd^2$ de l'eau contenue dans un intervalle est le quotient du volume $\frac{Mg}{1000^{kg}}$ que verse le coursier en $1''$, divisé par le nombre $\frac{(n-1)u'}{h+0,5c'}$ des intervalles qui passent dans le même temps devant ce coursier.

Le nombre n résulte de l'égalité évidente

$$(n-1)l+nfd=h+0,5c',$$

de laquelle on tire

$$n=\frac{l+h+0,5c'}{l+fd}.$$

Quant à la longueur des bras du croisillon, elle est donnée par l'équation

$$R=l+fd.$$

En effet, R ou AD vaut AL, côté de l'hexagone régulier formé par les extrémités des bras; AL = NAO, distance des plateaux, de milieu à milieu, afin que chaque plateau, passant sur le croisillon, se place précisément selon

la bissectrice de l'angle compris entre deux bras consécutifs, et

$$\text{NAO} = l + 2\frac{fd}{2} = l + fd.$$

331. Il nous faut maintenant une relation entre la vitesse u' du chapelet et la vitesse u_1 de l'air à sa sortie de la buse. Or, le volume de l'air contenu dans chaque intervalle, à la tension atmosphérique, est $d^2(l-l')$, et comme le nombre des intervalles qui passent en $1''$ devant l'entrée du régulateur vaut $\frac{(n-1)u'}{h+0{,}5c'}$, la machine recueille, dans le même temps, un volume d'air égal à

$$d^2(l-l')\frac{n-1}{h+0{,}5c'}u'.$$

Le fluide sortant de la buse peut être supposé aussi d'une tension pareille à celle de l'atmosphère, et son volume pour $1''$ (291) est $0{,}94au_1$. Par conséquent, à part les fuites,

$$d^2(l-l')\frac{n-1}{h+0{,}5c'}u' = 0{,}94au_1. \qquad \text{(II)}$$

En outre, la formule (II) du n.° 287 donne

$$u_1 = \sqrt{\frac{2g \times 1000c'}{\delta}}, \qquad \text{(III)}$$

δ étant le poids d'un mètre cube de l'air contenu dans le régulateur, et nous avons trouvé (292)

$$\delta = p\frac{0{,}000126}{1+0{,}004t}.$$

Comme la pression $p = 1000c' + 10334{,}48$, on a

$$\delta = \frac{1^{\text{kg}}{,}3 + 0^{\text{kg}}{,}126c'}{1+0{,}004t}, \qquad \text{(IV)}$$

pour la quatrième des équations au moyen desquelles on peut déterminer quatre des quantités u, u', c', u_1, δ, quand la cinquième est donnée. A la vérité, il faudrait résoudre une équation du troisième degré, à l'effet d'obtenir u', si u se trouvait seul connu; mais un tel cas est fort rare, ou plutôt il ne se présente point, parce qu'on sait toujours avec quelle vitesse doit sortir l'air d'une machine soufflante qu'il s'agit d'établir.

332. Le chapelet soufflant du Hartz verse, par seconde, sur le foyer, $1^{mc},29$ d'air animé de la vitesse $u_1 = 71^m,667$. Une description imparfaite de cette machine porte à supposer

$$h = 9^m,974,\quad l = 3^m,105,\quad d = 1^m,36,\quad f = 0,15,\quad u' = 0^m,785,$$
$$r = 0^m,02,\quad f' = 0,08\quad \text{et}\quad n' = 4.$$

Admettons, pour compléter ces données, que la température dans la buse, $t = 30°$.

L'équation (IV) donne

$$\delta = \frac{1^{kg},3 + 0^{kg},126c'}{1,12},$$

et l'équation (III),

$$\delta = \frac{2 \times 9^m,81 \times 1000^{kg}c'}{(71,667)^2}.$$

Il en résulte

$$c' = \frac{1^{kg},3(71^m,667)^2}{19^m,62 \times 1,12 \times 1000^{kg} - 0,126(71^m,667)^2} = 0^m,313,$$
$$h + 0,5c' = 9^m,974 + 0,5 \times 0,313 = 10^m,131,$$
$$n = \frac{3^m,105 + 10^m,131}{3^m,105 + 0,15 \times 1^m,36} = 4\ ;$$

l'équation (II) devient

$$(1^m,36)^2(l - l')\frac{3 \times 0^m,785}{10^m,131} = 0,94au_1 = 1^{mc},29,$$

et l'on en tire

$$l - l' = \frac{1^{mc},29 \times 10^{m},131}{(1^{m},36)^2 \times 2^{m},355} = 3^{m}.$$

Donc,

$$l' = l - 3^{m} = 3^{m},105 - 3^{m} = 0^{m},105 = \frac{M \times 9^{m},81 \times 10^{m},131}{1000^{kg} d^2 \times 2^{m},355},$$

$$M = \frac{0,105 \times 1000(1,36)^2 \times 2,355}{9,81 \times 10,131} = 4,602,$$

et le volume d'eau qui doit sortir du coursier en 1'',

$$X = \frac{Mg}{1000^{kg}} = \frac{4,602 \times 9^{m},81}{1000^{kg}} = 0^{mc},045,$$

quantité à laquelle s'élève précisément la consommation de la machine.

Nous déduirons u de l'équation (I). Le 1.er terme

$$M(u-u')u' = 4,602 \times 0^{m},785u - 4,602(0^{m},785)^2 = 3^{kg},613u - 2^{k},836.$$

Le 2.e terme

$$\frac{Mu'^2}{2} = \frac{4,602(0^{m},785)^2}{2} = 1^{k},418.$$

Le 3.e terme

$$Mg(h + 0,5c') = 4,602 \times 9^{m},81 \times 10^{m},131 = 457^{k},37.$$

Le premier membre vaut donc

$$3^{kg},613u - 2^{k},836 + 1^{k},418 + 457^{k},37, \quad \text{ou} \quad 3^{kg},613u + 455^{k},952.$$

Le travail consommé en 1'' par le frottement des plateaux est

$$(\overset{kg}{100} \times 0,313 + \overset{kg}{1033,448})1,6 \times 4(0,15)^2(1,36)^2 \times 0^{m},785 = \overset{k}{222,616}.$$

Le travail à faire, par seconde, pour changer la tension

de l'air s'élève à

$$\frac{3\times0{,}785}{10{,}131}2{,}3026\times0{,}65(1{,}36)^2\times9\,\mathrm{Log}\frac{1000\times0{,}313+10334{,}48}{0{,}65\times3}=21^{k}{,}644.$$

Le travail pour chasser l'air dans le régulateur vaut à chaque seconde

$$1000\times0{,}313(1{,}36)^2\frac{0{,}65\times9\times3\times0{,}785}{(1000\times0{,}313+10334{,}48)10{,}131}=0^{k}{,}074.$$

Le travail qu'absorbe, par seconde, la résistance du liquide de la bâche est

$$\frac{650\times4(1{,}36)^2(0{,}785)^3}{9{,}81}=237^{k}{,}133.$$

Prenons pour poids spécifique des plateaux celui du chêne ordinaire qui n'est pas sec, c'est-à-dire 1000^{kg} par mètre cube. Comme chaque plateau a un volume de $d^2\times fd=fd^3$, son poids vaut $1000^{kg}\times0{,}15(1{,}36)^3$. Il y a 19 plateaux dans le chapelet ; le poids de la chaîne peut compter pour environ moitié du leur ou pour celui de 10 plateaux, et le croisillon pour 11. Conséquemment,

$$P=40\times1000^{kg}\times0{,}15(1{,}36)^3=15092^{kg}{,}74\,;$$

le travail qu'exige le frottement des tourillons monte par seconde à

$$\frac{0{,}08\times0{,}02\times0{,}785}{3{,}309}\left\{\left[15092{,}74+4{,}602\times9{,}81\frac{10{,}131}{0{,}785}-1000\times0{,}313(1{,}36)^2\right]\right\}=5^{k}{,}73,$$

car

$$R=l+fd=3^{m}{,}105+0{,}15\times1^{m}{,}36=3^{m}{,}309;$$



et l'équation (I) donne

$$\overset{\text{kg}}{3,613}u + \overset{\text{k}}{455,952} = \overset{\text{k}}{222,616} + \overset{\text{k}}{21,644} + \overset{\text{k}}{0,074} + \overset{\text{k}}{237,133} + 5^{\text{k}},73 = 487^{\text{k}},217,$$

puis

$$u = \frac{\overset{\text{k}}{487,217} - \overset{\text{k}}{455,952}}{3^{\text{kg}},613} = 8^{\text{m}},653,$$

vitesse qui exige une chute

$$h' = \frac{u^2}{2g} = \frac{(8^{\text{m}},653)^2}{19^{\text{m}},62} = 3^{\text{m}},816.$$

La chute totale est donc

$$h + h' = 9^{\text{m}},974 + 3^{\text{m}},816 = 13^{\text{m}},79,$$

et le moteur se trouve capable par seconde d'une quantité d'action

$$Mg(h + h') = 45^{\text{kg}} \times 13^{\text{m}},79 = 620^{\text{k}},55.$$

Or celle que possède l'air en arrivant au foyer est seulement

$$\frac{\overset{\text{kg}}{1,3} \times 1^{\text{mc}},29}{9^{\text{m}},81} \times \frac{(71^{\text{m}},667)^2}{2} = \overset{\text{k}}{439,01},$$

et forme au plus les 0,71 de la première. Par conséquent, le jeu de la machine absorbe les 0,29 de l'énergie du moteur.

MACHINES A VAPEUR.

333. Les machines-ouvrières qui sont mises en mouvement soit par le cheval, soit par l'eau, peuvent l'être aussi par la vapeur. Il ne s'agit que de les lier à une

machine-motrice propre à recevoir et à transmettre la quantité d'action dont est capable le fluide élastique. Cette machine-motrice se nomme *machine à vapeur;* sa bonté dépend du rapport de la quantité du combustible consumé pour vaporiser l'eau et obtenir une tension déterminée, au travail que peut faire le récepteur dans le même temps.

Avant d'établir la formule générale du rapport au moyen duquel on apprécie les machines à vapeur, nous décrirons succinctement celles qui sont employées aujourd'hui, puis nous étudierons en détail leurs organes les plus importants.

Les machines à vapeur forment trois classes : celles du système de *Watt*, celles du système de *Wolf*, et les locomotives. Dans toutes, un fourneau, où brûle soit de la houille, soit du coke, soit du bois, chauffe l'eau d'une chaudière, la transforme en fluide élastique, et porte ce fluide à une température qui, lui donnant une certaine tension, le met à même d'exercer une pression déterminée.

MACHINES DE WATT.

334. La pièce principale d'une machine de Watt est un cylindre C dans lequel va et vient un piston D (P. V, F. 11). Ce piston a une tige DE qui traverse une *boîte à étoupes* fixée à la base supérieure du cylindre, puis s'attache à un balancier EF dont l'essieu G est un centre d'équilibre indifférent. Une bielle FH part de l'autre extrémité du balancier et fait tourner une manivelle HIK qui met en mouvement l'arbre KL des rouages de la machine-ouvrière. On monte ordinairement un volant M sur cet arbre, pour obliger la manivelle à tourner avec une vitesse constante, quoi-

qu'elle ne reçoive aucun effort du balancier au moment où se termine soit l'ascension, soit la descente.

Le piston est le véritable récepteur de la machine, car c'est l'action de la vapeur qui le fait monter et descendre ; elle part de la chaudière A chauffée par le fourneau B, et arrive, en suivant le tuyau N, à la base inférieure du cylindre, quand le robinet ou le tiroir O est ouvert. Le piston, obéissant à la pression du fluide, s'élève alors ; puis le robinet O se ferme soit à la fin de l'ascension, soit auparavant : dans ce second cas, le récepteur ne continue pas moins d'être poussé par la force expansive de la vapeur qui se dilate, se *détent*, en vertu du calorique qu'elle renferme.

Lorsque le piston est parvenu à sa position la plus élevée D', le robinet P s'ouvre, et la vapeur agit au-dessus de D'. Néanmoins, la descente ne pourrait avoir lieu, si en même temps ne s'ouvrait le robinet Q, qui permet à la vapeur d'ascension de fuir par le tuyau R. Ce tuyau la conduit dans le *condenseur* S, où jaillit continuellement de l'eau froide obligée de monter par le tube T. La vapeur d'ascension redevient donc liquide en S ; celle qui se trouve encore dans le cylindre C perd sa tension, et rien ne gêne plus la descente du piston. Dès qu'il est arrivé à une certaine distance de sa position D', le robinet P se ferme pour laisser la vapeur agir par détente.

Le récepteur reprend enfin sa première position D. Alors s'ouvre de nouveau le robinet O ; mais en même temps s'ouvre aussi le robinet U, pour offrir une issue à la vapeur qui a opéré la descente ; elle fuit donc vers le condenseur, pendant que celle qu'introduit le robinet O cause une seconde ascension.

Ainsi, le mouvement alternatif du piston et la rotation de l'arbre KL, qui en résulte, tiennent à l'ou-

verture simultanée des robinets ou tiroirs O, U, et à celle des robinets ou tiroirs P, Q, lesquelles se succèdent continuellement.

MACHINES DE WOLF.

335. Wolf a donné deux pistons à ses machines, pour tirer tout le parti possible de la détente du fluide. Après avoir élevé le piston *d* (P. V, F. 12), la vapeur d'ascension passe par le robinet Q, non plus pour aller au condenseur, mais pour se rendre au-dessus d'un grand piston D'. Elle fait donc descendre ce piston, en agissant par détente, tandis que celle qui afflue par le robinet P abaisse *d'*. Dès que la descente des deux récepteurs est terminée, la vapeur du petit cylindre passe dans la partie inférieure du grand, par le robinet U, et force, en se détendant, le piston D à s'élever, pendant que celle qui afflue par le robinet O produit le même effet sur *d*. Au même moment, le robinet ou tiroir V s'ouvre, et la vapeur de descente du grand cylindre se rend au condenseur S. La vapeur d'ascension du même cylindre y passe à son tour, par le robinet X qui s'ouvre en même temps que Q et P.

Mais les robinets O, P restent ouverts, l'un pendant toute l'ascension, l'autre pendant toute la descente, de sorte que le fluide agit par détente dans le grand cylindre seulement. Ce cylindre a un diamètre double de celui du petit et même hauteur, ce qui rend son volume quadruple. Il en doit être ainsi, parce que la vapeur ne peut guère se dilater au-delà de quatre fois et demie son volume primitif, sans se refroidir beaucoup et se réduire à une tension peu efficace dans les machines. L'inventeur a même senti la nécessité, pour empê-

cher la température de descendre à ce point, d'envelopper les deux cylindres d'un troisième Y, nommé *chemise*. La vapeur qui sort de la chaudière circule dans l'intervalle, avant de s'introduire dans le petit cylindre, et maintient plus chaudes toutes les parties de l'appareil. La chemise est donc une sorte d'appendice du tuyau N : il y débouche, et le fluide qu'il y verse passe ensuite au-dessous ou au-dessus du petit piston, par les robinets O, P situés dans le cylindre Y. Mieux vaudrait cependant que le tuyau N traversât ce cylindre pour arriver au petit, et que la température des parois fût entretenue au moyen de la vapeur qui a subi la détente, car celle de la chaudière s'affaiblit dans la chemise avant d'agir sur le petit piston.

Enfin, une traverse *ab* unit les tiges des deux récepteurs d, D, et de cette traverse part une bielle *ce* qui va s'attacher à l'extrémité E du balancier EF (F. 11). Il en résulte que l'action exercée sur ce balancier est moins variable que dans la machine de Watt; car évidemment la pression est forte sur le grand piston au moment où elle se trouve faible sur le petit, et celle du premier fait croître celle du second à mesure qu'elle diminue elle-même.

MACHINES LOCOMOTIVES.

336. Les machines de Watt et de Wolf sont fixes; mais il en existe qui changent de lieu spontanément, et qu'on appelle pour cela *locomotives*. Elles doivent leur faculté à ce qu'elles ont pour supports des roues unies à leurs essieux; ces roues, creusées en demi-gorge rectangulaire à leur surface cylindrique, roulent sur des barres de fonte nommées *rails*, quand la manivelle HKL imprime un mouvement de rotation aux essieux KL (P. V, F. 11).

Les locomotives n'ont point de condenseur : il tiendrait trop de place, et son alimentation exigerait le transport d'un grand volume d'eau. C'est bien assez que ces machines soient obligées de charrier une provision de combustible, en même temps qu'elles traînent à leur suite plusieurs voitures ou wagons chargés. Aussi, la vapeur s'échappe-t-elle dans l'air par le robinet U ou V pendant l'ascension (F. 12), et par le robinet Q ou X pendant la descente, selon que la locomotive est construite dans le système de Watt ou dans celui de Wolf : ce dernier est généralement préféré.

Dans les trois sortes de machines, c'est la tige du piston qui, en montant et en descendant, ouvre et ferme les divers robinets ou tiroirs, et dans les deux premières, la chaudière est alimentée par l'eau chaude du condenseur, qui s'y rend en suivant un tuyau Z (F. 11) muni d'un robinet qu'un mécanisme ouvre au degré nécessaire pour que le niveau reste constant.

FOURNEAUX.

337. Après cette description succincte de l'ensemble des machines à vapeur, il nous faut étudier en détail chacune des parties mentionnées. Nous le ferons dans l'ordre où elles se présentent de la chaudière au condenseur.

Le fourneau offre cinq choses distinctes : le cendrier, la grille, le foyer, les conduits ou *carneaux*, et la cheminée.

Le cendrier doit avoir pour section horizontale un rectangle égal à celui de la grille, et former un prisme droit d'une hauteur suffisante pour que les résidus de la combustion puissent s'y loger pendant un certain temps sans le remplir, mais telle néanmoins que le fond

se ressente fortement de la chaleur du foyer; car il convient, pour l'économie du combustible, que l'air s'échauffe avant de l'atteindre : s'il n'en était pas ainsi, il faudrait évidemment consommer une plus grande quantité de charbon ou de bois pour obtenir la même température.

Le devant du cendrier est ouvert, mais une porte à registre permet de le fermer plus ou moins, et de modifier ainsi l'intensité de la combustion.

338. La grille est formée de barreaux de fonte. La section droite de chacun présente un trapèze symétrique dont la grande base supporte le combustible. Deux barreaux consécutifs sont écartés de $0^m,025$; la somme des intervalles fait le quart de la largeur d'un foyer à bois et le septième d'un foyer à houille. Or, m barreaux donnent $m+1$ intervalles; si donc b représente la grande base du trapèze en mètres, on a

$$(m+1)0^m,025=\tfrac{1}{4}[mb+(m+1)0^m,025],$$

puis

$$(b-0^m,075)m=0^m,075,$$

pour déterminer, dans le cas du bois, la largeur ou le nombre des barreaux, quand l'une ou l'autre de ces deux choses est connue. Dans le cas de la houille,

$$(m+1)0^m,025=\tfrac{1}{7}[mb+(m+1)0^m,025]$$

et

$$(b-0^m,15)m=0^m,15.$$

Les intervalles des barreaux n'ont que $0^m,025$, parce que les morceaux de houille doivent être au plus de la grosseur d'un œuf pour produire un feu uniforme, et que si l'on brûle du bois, les charbons ne doivent pouvoir tomber sur le fond du cendrier qu'après avoir été réduits à l'état de braise menue.

La grille a une longueur égale au tiers de celle de

la chaudière, et une superficie de $0^{mm},062$ à $0^{mm},077$ répétés autant de fois qu'il faudrait de chevaux pour produire l'effet de la machine. Sa distance au milieu du fond concave de la chaudière ou la hauteur du foyer est de $0^{m},3$ à $0^{m},4$, si l'on emploie de la houille; ce combustible doit d'ailleurs être disposé en couche de $0^{m},05$ à $0^{m},06$ d'épaisseur; si l'on brûle du bois, la hauteur du foyer est de $0^{m},5$ à $0^{m},6$, et les bûches sont placées parallèlement les unes au-dessus des intervalles des autres, pour que l'air ne passe pas sans avoir abandonné la plus grande partie de son oxigène. Dans les deux cas, les longs bords de la grille sont écartés de la chaudière d'environ moitié de la hauteur du foyer.

339. Le premier carneau commence à la fin de la grille; son fond est élevé de $0^{m},15$ au-dessus des barreaux, pour la houille, et du double pour le bois; son orifice forme à peu près $1/3$ de l'aire horizontale du foyer. Arrivé derrière la chaudière, il se courbe en s'élevant, revient horizontalement passer par devant, en longeant la partie la plus basse, et retourne de la même manière à l'arrière; là, il se courbe et s'élève de nouveau, pour aller déboucher dans la cheminée placée aussi près du fourneau qu'il est possible. Ainsi, tous les fluides produits par la combustion ont le temps de donner la plus grande partie de leur calorique à l'eau de la chaudière, avant de s'élever au-dessus.

340. La cheminée est d'autant plus haute qu'on a besoin d'une plus grande température, car le tirage et l'énergie de la combustion dépendent de la distance verticale qui se trouve entre l'orifice supérieur et le centre de la porte du cendrier. Si la cheminée a une hauteur de 30^{m} à 36^{m}, la section droite des carneaux est partout $1/5$ de la superficie de la grille, et cette section est portée à $1/4$ de la même superficie, lorsque

la hauteur de la cheminée est seulement de 15^m à 18^m. Dans ce dernier cas, il faut en effet plus de place pour les fluides dégagés du combustible, puisqu'ils ont une moindre vitesse, par suite de l'affaiblissement du tirage. Quant à la section droite de la cheminée, elle forme $^5/_6$ ou $^4/_5$ de celle des carneaux.

CHAUDIÈRES.

341. On emploie quatre sortes de chaudières : celle de Watt pour les machines à basse pression, dans lesquelles la tension équivaut seulement à $^5/_4$ d'atmosphère ; celle de Wolf pour les machines à moyenne et à haute pression, dans lesquelles la vapeur exerce un effort de $3^{atm.}\ ^1/_2$ et de 6 à $10^{atm.}$; la chaudière *à foyer central* pour les machines locomotives, et la chaudière *à petits tubes* pour toutes les espèces de machines à haute pression.

342. La chaudière de Watt est dite *en chariot*, à cause de sa forme ; elle ressemble en effet, par sa coupe, à certaines voitures en osier : la partie supérieure est un demi-cylindre circulaire A (P. V, F. 13); les flancs et le fond sont des portions de surfaces cylindriques dont la concavité est tournée en dehors, afin que la chaleur ait plus de points de contact avec le liquide, et que la résistance à la pression de l'eau soit plus grande. Les flancs forment effectivement chacun une paroi des carneaux latéraux B.

343. La chaudière de Wolf est cylindrique et dite *à bouilleurs*, à cause de deux tubes D qui communiquent avec elle par des tubulures et reçoivent la plus grande action du feu (P. V, F. 14); ces tubes sont en tôle de fer ou de cuivre ; on les établit dans le carneau

inférieur E. Quant aux carneaux latéraux B, ils s'appliquent contre les deux parties de la chaudière proprement dite qui se trouvent immédiatement au-dessous du plan diamétral horizontal.

344. La chaudière à foyer central est un manchon cylindrique. Le tuyau qui la traverse sert à la fois de foyer et de carneau inférieur. Cette forme a été imaginée pour éviter les pertes de chaleur; mais le combustible entouré d'eau ne peut acquérir la température nécessaire à une vive combustion.

345. La chaudière à petits tubes a l'apparence d'un système de canons de fusil. Les tubes traversent le foyer dans différents sens, et comme ils contiennent peu d'eau chacun, la vapeur s'y produit promptement.

346. Toute chaudière est percée de 6 ouvertures dans sa partie supérieure, celle qu'occupe la vapeur. La plus grande s'appelle *trou d'homme;* elle est ovale, hermétiquement fermée par une plaque de fonte, et sert à l'introduction de l'ouvrier chargé d'enlever le dépôt ou de faire des réparations.

Deux ouvertures circulaires d'un assez petit diamètre sont bouchées par des *soupapes de sûreté.* L'une de ces soupapes reste à la disposition du chauffeur, mais l'autre est enfermée dans une boîte dont le directeur de l'usine a la clef.

La quatrième ouverture donne passage à la tige de l'*indicateur,* appareil qui fait connaître la hauteur de l'eau dans la chaudière.

Les deux dernières sont les orifices du tuyau d'alimentation et de celui qui conduit la vapeur dans le cylindre du piston.

Il y a quelquefois encore deux autres ouvertures fermées par des *plaques fusibles*, c'est-à-dire des plaques que peut mettre en fusion la vapeur, lorsque sa

température vient à surpasser celle qui répond à la plus grande tension légale.

DIMENSIONS DES CHAUDIÈRES.

547. On appelle *surface de chauffe* la superficie de toutes les parties de la chaudière qui reçoivent immédiatement l'action de la chaleur émanée du foyer. Chaque mètre carré de cette surface produit par heure 30^{kg} de vapeur dans la chaudière de Watt, et 36^{kg} dans celle de Wolf. Si donc s représente la surface de chauffe mesurée en mètres carrés, et P le poids de la vapeur à dépenser dans une heure, on doit avoir

$$P = 30^{kg}\, s,$$

pour une machine du système de Watt, et

$$P = 36^{kg}\, s,$$

pour une machine du système de Wolf.

Dans l'une et dans l'autre, chaque kilogramme de houille brûlée donne 6 à 7^{kg} de vapeur; si donc c désigne le nombre de kilogrammes que pèse la houille consommée en une heure, on a, terme moyen, $P = 6^{kg},5c$. Or, sur une grille bien faite, il se consume 40^{kg} de houille en une heure, par mètre carré. Conséquemment,

$$c = 40^{kg}\, s',$$

si s' est la surface de la grille exprimée en mètres carrés. Il en résulte

$$P = 6,5 \times 40^{kg}\, s' = 260^{kg}\, s'.$$

Ces relations serviront à déterminer la surface de chauffe et celle de la grille, lorsque P sera connu.

348. Nous supposerons, pour trouver le poids P de la vapeur à dépenser dans une heure, que le fluide conserve toujours la même densité; alors il existe entre les poids δ, δ' du mètre cube de deux vapeurs à températures et à pressions différentes, la relation

$$\delta = \delta' \frac{1 + 0,00375t'}{1 + 0,00375t} \cdot \frac{p}{p'},$$

établie au n.° 292. Or, on sait que le mètre cube de vapeur pése $0^{kg},588$ à la température 100° centigrades, et sous la pression ordinaire de l'atmosphère

$$13598^{kg} \times 0,76 = 10334^{kg},48.$$

Par conséquent,

$$\delta = 0^{kg},588 \frac{1,375}{1 + 0,00375t} \times \frac{p}{10334,48} = \frac{0^{kg},8085}{1 + 0,00375t} \times \frac{p}{10334,48}.$$

Traduisant p en n atmosphères, on obtient

$$p = 10334^{kg},48n, \qquad \delta = \frac{0^{kg},8085n}{1 + 0,00375t},$$

et le volume ν de vapeur consommé en 1^h a un poids

$$P = \nu\delta = \frac{0^{kg},8085n\nu}{1 + 0,00375t}.$$

Soient maintenant ν' le volume que remplit dans le cylindre le fluide élastique aprés chaque oscillation du piston, et k le nombre des oscillations effectuées en 1^h. Évidemment $\nu = k\nu'$. Mais l'expérience a montré que l'espace V occupé dans la chaudière par la vapeur doit valoir 13 fois et demie ν', pour que la température t et la tension varient peu. On a donc

$$\nu' = \frac{V}{13,5} \quad \text{et} \quad P = \frac{0^{kg},8085n}{1 + 0,00375t} \times \frac{kV}{13,5}.$$

D'un autre côté, V est seulement $^1/_3$ de la capacité totale, car l'eau en occupe les $^2/_3$. Si donc l, d représentent en mètres la longueur et le diamètre d'une chaudière cylindrique, forme la plus employée aujourd'hui, $V = \frac{\pi d^2 l}{12}$, et enfin

$$P = \frac{0^{kg},8085\,n}{1 + 0,00375\,t} \times \frac{k\pi d^2 l}{162}.$$

Ainsi, P sera facile à trouver dès que l'on connaîtra le nombre d'atmosphères indicateur de l'énergie de la machine, le nombre des oscillations du piston, le diamètre et la longueur de la chaudière. La dernière de ces dimensions est arbitraire, ou plutôt elle dépend uniquement de la valeur qu'on donne au volume v'; mais le diamètre d est réglé par une ordonnance du 25 mai 1828, qui prescrit, pour diminuer les chances d'explosion, de satisfaire à l'équation

$$e = 0,0018\,d(n-1) + 0^m,003,$$

e indiquant en mètres l'épaisseur des parois de la chaudière. Comme cette épaisseur ne peut surpasser $0^m,014$, afin que la proximité de l'eau empêche le métal de s'échauffer extérieurement au point de s'oxider, le maximum de d est donné par la formule

$$d = \frac{0^m,014 - 0^m,003}{0,0018(n-1)} = \frac{0^m,011}{0,0018(n-1)}.$$

Or, c'est seulement quand une machine à vapeur exerce une pression d'au moins 8 atmosphères, que sa chaudière a besoin d'une épaisseur de $0^m,014$. Conséquemment, le plus grand diamètre qui puisse être adopté égale $0^m,873$.

349. Si n n'était pas connu, on pourrait trouver ce

nombre à l'aide d'une observation faite sur la température de la vapeur; car, d'après des expériences dues à MM. Arago et Dulong, la tension ou pression

$$p = 10334^{kg}(0,2847 + 0,007153t)^5\,;$$

et comme $p = 10334^{kg}n$, à fort peu près,

$$n = (0,2847 + 0,007153t)^5.$$

SOUPAPES DE SURETÉ.

350. On appelle soupape de sûreté une rondelle métallique à tige A (P. V, F. 15) qu'un levier B à poids curseur, analogue à celui de la romaine, maintient appliquée contre un orifice C d'un diamètre un peu moindre. Une poignée D, fixée à la tige, permet de soulever la rondelle de temps en temps, pour s'assurer qu'elle n'adhère pas au bord de l'orifice, et le poids q est placé à une telle distance du point fixe E, que la force expansive de la vapeur puisse ouvrir le passage, dès qu'elle dépasse de 2 à 3 hectogrammes, par *centimètre circulaire*, la tension nécessaire au jeu du piston.

Le centimètre circulaire est une unité de superficie usitée parmi les mécaniciens; il égale l'aire du cercle qui a le centimètre linéaire pour diamètre, et vaut $\frac{1}{4}\pi$ en centimètres carrés; de sorte que, pour trouver la superficie d'un cercle en centimètres circulaires, il faut simplement faire le quarré numérique du diamètre exprimé en centimètres, et que, pour convertir des centimètres circulaires en centimètres carrés, il suffit d'en multiplier le nombre par 0,7854, quart de 3,1416.

Ainsi, la soupape de sûreté doit pouvoir être soulevée quand l'excès de pression est d'environ $0^{kg},25$ sur 0,7854 de centimètre carré, ou de $25\,000\,000^{kg}$ sur

7854^{mm}, ou enfin de 3183^{kg} par mètre carré. Or, si la machine à vapeur fonctionne sous une tension de n atmosphères, la pression totale du fluide élastique de la chaudière vaudra $10\,334^{kg}n + 3183^{kg}$, lorsque le passage devra être forcé, et son effort sur l'aire s de ce passage sera $(10\,334^{kg}n + 3183^{kg})s$. Soient donc a, b le bras de levier du poids négligeable de la soupape, et celui de q; en retranchant la pression atmosphérique qui s'exerce sur la soupape, on a l'équation

$$q = [10\,334^{kg}(n-1) + 3183^{kg}]s\frac{a}{b},$$

pour déterminer le poids curseur q, quand sa position est marquée, ou pour trouver cette position, quand on prend q arbitrairement.

Il convient en effet que le poids q puisse se mouvoir le long du levier; on doit même donner peu de profondeur au cran dans lequel s'engage l'anneau qui le soutient, car il faut qu'à l'instant où commence le soulèvement, ce poids glisse vers la soupape, afin que la charge diminue rapidement, et qu'il y ait plus de chances pour l'ouverture complète de l'orifice.

351. L'aire s du trou circulaire C doit être au moins telle que la vapeur produite en $1''$ dans la chaudière puisse s'échapper dans le même temps. Représentons encore par v' le volume de la partie de cylindre dont la hauteur égale la course du piston, par k le nombre des oscillations faites en 1^h, et par u la vitesse avec laquelle la vapeur sortira sous la soupape. Le volume de fluide dépensé et produit en $1''$ est $\frac{kv'}{3600}$; celui qui peut s'échapper par l'orifice C dans le même temps est us, et il faut que $us = \frac{kv'}{3600}$. Conséquemment,

$$s = \frac{kv'}{3600\,u}.$$

Mais (287) la vitesse d'un gaz soumis à deux pressions contraires est

$$\sqrt{\frac{2g(p-p')}{\delta}};$$

ici $p = 10\,334^{kg}n + 3183^{kg}$; p', pression qu'exerce l'atmosphère sur la soupape, vaut $10\,334^{kg}$ par mètre carré. Donc

$$u = \sqrt{\frac{2g[10334(n-1)+3183]}{\delta}};$$

et comme d'ailleurs (348), $\delta = \frac{P}{kv'}$,

$$s = \frac{1}{3600}\sqrt{\frac{kv'P}{2g[10334(n-1)+3183]}}.$$

Dans la pratique, le diamètre du cercle s a $0^m,0227$ par cheval, c'est-à-dire qu'il est d'autant de fois $0^m,0227$ que l'exprime l'énergie de la machine divisée par 75^k, et la charge de la soupape se règle à $0^{kg},91$ par cheval.

INDICATEUR.

352. Il faut, pour la régularité du jeu d'une machine à vapeur, que l'eau ait dans la chaudière un niveau à peu près constant, et l'économie du combustible exige que ce niveau soit tel que le liquide occupe environ les $^2/_3$ de la capacité du vase.

Le chauffeur doit donc pouvoir s'assurer de temps en temps, et surtout au commencement de l'action, que la seconde condition est remplie. Un flotteur, surmonté

d'une tige qui sortirait de la chaudière au travers d'une boîte à étoupes, lui en donnerait le moyen, si de plus une planchette portait une marque à laquelle dût répondre l'extrémité supérieure de la tige, quand le niveau serait à la hauteur voulue. Mais cette tige devrait être d'un faible diamètre, pour que son frottement dans la boîte n'exigeât pas un flotteur un peu grand, et il serait possible qu'elle se faussât.

Aussi, l'indicateur ordinaire se compose-t-il de deux tubes qui portent, à leurs parties supérieures, des robinets renfermés dans une boîte. Ces tubes n'ont pas la même longueur : l'un A descend un peu au-dessous du niveau prescrit BC (P. V, F. 16), et l'autre D ne l'atteint pas tout à fait. La chaudière se trouve donc dans un état convenable, quand l'eau sort par le robinet ouvert du premier tube, et la vapeur par celui du second.

Les constructeurs donnent souvent à l'appareil indicateur le nom de *robinets d'épreuve.*

MANOMÈTRES.

353. Il y a près de la chaudière un manomètre qui, communiquant avec l'intérieur, peut être regardé comme un appendice de cet organe générateur. Dans quelques usines, sa forme est celle d'un siphon (291), et on l'adapte alors à la conduite N (P. V, F. 11); dans d'autres, il présente un long tube droit, ouvert aux deux bouts, qui sort d'une cuvette fermée, en partie remplie de mercure, où débouche un petit tuyau issu du tuyau principal N, et il renferme un flotteur disposé comme celui du siphon. Mais le manomètre le plus usité aujourd'hui ressemble beaucoup au baromètre; seulement, son tube droit, fermé par le haut, contient de l'air, et

un petit tuyau débouche dans la cuvette, comme au précédent. Les échelles des deux derniers sont mobiles, attendu que le zéro répond au niveau du mercure de la cuvette, et que ce niveau varie avec la pression.

354. Le manomètre de la chaudière sert à guider le chauffeur, et afin de le rendre propre à cet usage, on marque sur l'échelle le point où doit arriver l'indicateur pour que la machine à vapeur fonctionne avec une tension égale à n, nombre d'atmosphères fixé. Voici comment est déterminé ce point dans le manomètre en siphon. Soit c le double des mètres qu'indiquera l'échelle fixe quand la tension sera de n atmosphères; c égale la hauteur de la colonne de mercure soutenue par la pression de la vapeur, et $\frac{c}{0^m,76}$ donne le nombre d'atmosphères que vaut cette colonne. Ajoutant donc 1 pour la pression atmosphérique, à laquelle celle du fluide aqueux fait aussi équilibre, on a la relation

$$\frac{c}{0^m,76} + 1 = n, \quad \text{ou} \quad c = 0^m,76(n-1),$$

et l'indication cherchée de l'échelle,

$$\tfrac{1}{2}c = 0^m,38(n-1).$$

Ainsi, pour une machine qui doit fonctionner à $\frac{5}{4}$ d'atmosphère, le point se marque à une distance du zéro de l'échelle

$$\tfrac{1}{2}c = 0^m,38(\tfrac{5}{4}-1) = 0^m,38 \times \tfrac{1}{4} = 0^m,095,$$

et pour celle qui a besoin d'une force de 6 atmosphères,

$$\tfrac{1}{2}c = 0^m,38 \times 5 = 1^m,9.$$

On voit par là que le manomètre en siphon ne convient

pas aux machines à haute pression, et qu'il faut leur donner l'un des deux autres.

Dans le manomètre à long tube, les indications de l'échelle sont doubles de celles de la précédente, puisqu'il n'a pas deux branches. Le point à marquer est donc donné par l'équation

$$c = 0{,}76\,(n-1),$$

et l'on trouve qu'il doit être à $3^m{,}8$ au-dessus du niveau dans la cuvette, pour le cas de 6 atmosphères.

355. La hauteur c' du mercure dans le manomètre à tube fermé est moins grande que c, en raison de la réaction de l'air comprimé. Soit l la longueur du tube au-dessus du liquide de la cuvette; $l-c'$ sera la hauteur du volume d'air à tension p, qui aura même température t que la boîte du manomètre. Mais, quand on construit l'instrument, le zéro est placé au niveau du mercure dans la cuvette; le tube se trouve plein d'air à la pression p' et à la température t' de l'atmosphère; le volume de cet air a d'ailleurs l pour hauteur à fort peu près. Il y a donc entre les poids δ, δ' du mètre cube d'air, dans les deux circonstances (348), la relation

$$\frac{\delta'}{\delta} = \frac{1+0{,}00375t}{1+0{,}00375t'}\cdot\frac{p'}{p}.$$

Multipliant par le rapport des volumes, on obtient

$$\frac{\delta' l}{\delta(l-c')} = \frac{l}{l-c'}\cdot\frac{1+0{,}00375t}{1+0{,}00375t'}\cdot\frac{p'}{p},$$

et comme $\delta' l = \delta(l-c')$, attendu que le poids de l'air renfermé dans le tube est invariable,

$$p = \frac{l}{l-c'}\cdot\frac{1+0{,}00375t}{1+0{,}00375t'}p'.$$

Prenant pour p' la pression moyenne de l'atmosphère, 10334^{kg} par mètre carré, et pour t' sa température moyenne 10°, il vient

$$p = \frac{l}{l-c'} \cdot \frac{1+0{,}00375t}{1{,}0375} 10334^{kg}.$$

Or, la pression que doit exercer la vapeur,

$$10334^{kg} n = 13598^{kg} c' + p.$$

Par conséquent,

$$n = \frac{c'}{0^m{,}76} + \frac{l}{l-c'} \cdot \frac{1+0{,}00375t}{1{,}0375}.$$

Cette équation donne successivement

$$c'^2 - (0^m{,}76n + l)c' = \frac{0^m{,}76l(1+0{,}00375t}{1{,}0375}) - 0^m{,}76ln,$$

$$c' = \left\{ 0^m{,}38n + 0{,}5l \pm \sqrt{\left[(0^m{,}38n + 0{,}5l)^2 - 0^m{,}76ln + \frac{0^m{,}76l(1+0{,}00375t)}{1{,}0375}\right]}, \right.$$

$$c' = 0^m{,}38n + 0{,}5l \pm \sqrt{\left[(0^m{,}38n - 0{,}5l)^2 + \frac{0^m{,}76l(1+0{,}00375t)}{1{,}0375}\right]}.$$

Comme le radical surpasse $0^m{,}38n - 0{,}5l$, le signe $+$ rendrait $c' > 0^m{,}76n$ et $> c$, ce qui ne peut être. Il faut donc prendre le signe $-$; alors enfin,

$$c' = 0^m{,}38n + 0{,}5l - \sqrt{[(0^m{,}38n - 0{,}5l)^2 + 0^m{,}73253l + 0^m{,}002747lt]}.$$

Donnons $0^m{,}46$ de hauteur au tube; supposons t de 30°, et cherchons le point de l'échelle qui doit indiquer une pression de 6 atmosphères. Nous trouverons

$$c' = 0^m{,}38 \times 6 + 0{,}5 \times 0^m{,}46 - \sqrt{[(0^m{,}38 \times 6 - 0{,}5 \times 0^m{,}46)^2 + 0^m{,}73253 \times 0^m{,}46 + 0^m{,}002747 \times 0^m{,}46 \times 30]} = 2^m{,}28 + 0^m{,}23 - \sqrt{[(2^m{,}05)^2 + 0^{mm}{,}336964 + 0^{mm}{,}036909]} = 2^m{,}51 - \sqrt{4^{mm}{,}576373} = 2^m{,}51 - 2^m{,}139 = 0^m{,}371.$$

356. Il est bon de remarquer que le manomètre en siphon deviendrait un excellent tube de sûreté, si sa section droite égalait l'un des orifices destinés à prévenir les explosions : on n'aurait plus à craindre l'adhérence ni la surcharge des soupapes. Mais les deux colonnes de mercure devraient avoir, quand la machine ne fonctionnerait pas, une hauteur commune en rapport avec le nombre n d'atmosphères fixé pour le travail, et cette hauteur serait bien grande pour les machines à haute pression, qui ont besoin plus que les autres d'être assurées contre l'explosion.

Il faudrait en effet que les deux colonnes n'en fissent qu'une dans la branche ascendante du manomètre, lorsque la tension de la vapeur (350) vaudrait

$$10334^{kg}n + 3183^{kg},$$

car alors la colonne de la branche descendante se trouverait réduite à zéro, le mercure serait projeté par la branche ascendante, et la vapeur s'échapperait en masse égale à celle que produirait la chaudière. On aurait donc $13598^{kg}c = 10334^{kg}(n-1) + 3183^{kg}$, ou $c = 0^{m},76(n-1) + 0^{m},234$, et pour la hauteur des deux colonnes égales, $\frac{1}{2}c = 0^{m},38(n-1) + 0^{m},117$; ce qui, dans le cas d'une pression de six atmosphères, donnerait $\frac{1}{2}c = 1^{m},9 + 0^{m},117 = 2^{m},017$.

APPAREIL ALIMENTAIRE.

357. L'eau d'alimentation, c'est-à-dire celle qui doit remplacer le liquide converti en vapeur, ne se rend pas directement du condenseur à la chaudière; car, pour qu'elle y entrât, il faudrait qu'elle formât dans le tuyau alimentaire une colonne dont la pres-

sion fût capable de surmonter la tension du fluide élastique. L'eau de condensation s'écoule d'abord dans une bâche; puis, elle est poussée de là par une pompe foulante, que la machine à vapeur met en jeu, dans une cuvette cylindrique A, où elle arrive en suivant le tuyau B (P. V, F. 17). Cette cuvette a deux soupapes qui s'ouvrent en sens contraires: l'une C bouche le tube alimentaire D; l'autre E, le tuyau de décharge F. Le tube D descend vers le fond de la chaudière I; mais, avant d'y arriver, il se coude et se prolonge, en s'inclinant du côté opposé au foyer, afin que l'eau d'alimentation, se mêlant avec celle qui a la moindre température, diminue moins la chaleur intérieure. Il est visible d'ailleurs que si l'alimentation se faisait dans l'espace occupé par la vapeur, la tension éprouverait de trop fortes variations.

Les soupapes C, E ont une tige commune liée à un levier rotatif qu'un contre-poids G tient en équilibre constamment. Du côté de ce contre-poids, le levier se termine par un flotteur H, calotte métallique dont la face convexe repose sur l'eau de la chaudière.

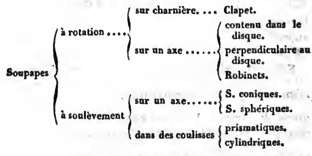
Quand le niveau a la hauteur convenable, le levier est horizontal, la soupape inférieure C est ouverte, la soupape supérieure E est fermée, et le liquide dont la pompe a rempli la cuvette descend dans la chaudière pour réparer les pertes. Mais s'il en entre une quantité plus grande que celle qui sort en vapeur, le niveau s'élève, le flotteur monte, la soupape C se ferme, la soupape E s'ouvre, et l'eau de la cuvette, cessant de s'introduire par le tube alimentaire, sort par le tuyau de décharge F. Bientôt la perte vient à faire baisser le niveau; alors le flotteur descend, le levier reprend sa position horizontale, la soupape C s'ouvre, la soupape E se ferme, et l'eau de la cuvette, au lieu

de fuir par le tuyau de décharge, se rend de nouveau au fond de la chaudière.

SOUPAPES.

358. On donne généralement le nom de *soupapes* à tout objet employé pour fermer et ouvrir successivement un conduit destiné au mouvement d'un fluide. Les soupapes des machines à vapeur sont fort diverses; elles varient d'abord avec les parties auxquelles on les adapte, puis avec le goût des constructeurs. Toutes néanmoins doivent satisfaire à quatre conditions : 1.° livrer un passage dont l'aire soit au moins égale à la moindre section droite du conduit; 2.° diminuer de très-peu la vitesse du fluide, en changeant la direction du mouvement; 3.° exiger peu d'effort pour se déplacer; 4.° se mouvoir avec assez de rapidité pour que leurs deux fonctions soient remplies chacune au moment voulu.

Les diverses soupapes employées peuvent être classées comme le montre le tableau suivant :



Soupapes	à rotation	sur charnière.	Clapet.
		sur un axe	contenu dans le disque.
			perpendiculaire au disque.
			Robinets.
	à soulèvement	sur un axe......	S. coniques.
			S. sphériques.
		dans des coulisses	prismatiques.
			cylindriques.

CLAPET.

359. Le clapet est un grand segment de cercle en cuir, dont le bord droit BB', fixé sur une feuillure,

forme charnière (P. V, F. 18). Ses dimensions surpassent de quelque peu celles du trou de même forme qu'il doit boucher ; mais son bord courbe est taillé en biseau. On lui donne du poids et on l'empêche de se gauchir, en couvrant le dessous d'une feuille métallique moins grande, et le dessus d'une autre feuille métallique qui le déborde. Il joue dans une boîte dont la largeur DE surpasse le diamètre AB du conduit, et pour qu'il retombe facilement, son ascension est bornée à une trentaine de degrés.

Lorsqu'un clapet doit fonctionner dans un courant d'une haute température, le cuir, qui se dessécherait, est remplacé par une plaque métallique rodée avec soin.

La première des conditions auxquelles doit satisfaire une soupape détermine le diamètre de la boîte du clapet. Il faut en effet que tout le fluide qui sort par l'onglet compris entre le cercle horizontal AB et le cercle incliné BC, passe dans le même temps, et sans aucune contraction, par la section DE de la boîte, diminuée de la projection horizontale CF du cercle BC. Conséquemment, la superficie du cercle DE doit égaler au moins celle de l'onglet augmentée de celle de l'ellipse CF, si l'on considère le clapet comme un cercle complet.

Soient D, d les diamètres DE, AB. Le cercle du premier vaut $\frac{\pi D^2}{4}$. La circonférence du second est πd, longueur de l'onglet. La circonférence à laquelle appartient l'arc AC est $2\pi d$; cet arc ayant 30°, en est $1/12$, et vaut $\frac{2\pi d}{12}$ ou $\frac{\pi d}{6}$; sa moitié, moyenne de tous les arcs parallèles décrits sur l'onglet par les points de la circonférence du clapet, est $\frac{\pi d}{12}$, et en conséquence, la

superficie de l'onglet égale

$$\frac{\pi d}{12} \times \pi d = \frac{\pi^2 d^2}{12}.$$

Quant à l'ellipse, elle a d pour grand axe et CF ou BG pour petit axe. $BG^2 = d^2 - \overline{CG}^2$; et comme CG, moitié de la corde de 60°, vaut $\frac{d}{2}$,

$$BG^2 = d^2 - \frac{d^2}{4} = \frac{3}{4}d^2,$$

ce qui donne $BG = \frac{d}{2}\sqrt{3} = 0{,}866d$. Or, la superficie de l'ellipse égale celle du cercle qui a le grand axe pour diamètre, multipliée par le rapport du petit axe au grand. L'ellipse CF vaut donc $0{,}866\,\frac{\pi d^2}{4}$.

Ainsi,

$$\frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi^2 d^2}{12} + 0{,}866\,\frac{\pi d^2}{4},$$

ou bien

$$D^2 = \frac{\pi d^2}{3} + 0{,}866 d^2,$$

et

$$D = d\sqrt{\frac{\pi}{3} + 0{,}866} = d\sqrt{1{,}9132} = 1{,}38d.$$

On fait ordinairement $D = 1{,}5d$, parce que peu de fluide passe par la partie de la boîte dont le rectangle BFEH est la projection verticale.

REGISTRE.

360. Un disque A qui tourne sur un axe BC qu'il contient (P. V, F. 19), constitue le *registre*, souvent

appelé *soupape à gorge*, parce qu'il fonctionne ordinairement dans une partie du tuyau élargie en gorge DE. Le registre est la soupape des cheminées, du tuyau à vapeur, et en général de tous les conduits où il importe de pouvoir faire varier la vitesse du courant ; il suffit, pour y parvenir, de diminuer ou d'augmenter le passage, en inclinant le disque plus ou moins par rapport au plan horizontal.

DISQUES PERCÉS.

361. Si le disque forme un plan perpendiculaire à son axe de rotation, il est percé d'une ouverture, et il se superpose à un autre disque fixe qui a une ouverture aussi. Lorsque le mouvement circulaire fait coïncider les deux trous, le passage est ouvert ; dans le cas contraire, le premier disque bouche l'ouverture du second.

Quelquefois les disques sont concentriques (P. V, F. 20), et les trous A, B se trouvent placés excentriquement, de manière que leurs centres appartiennent à la même circonférence AB de rotation. D'autres fois, le trou B du disque fixe lui est concentrique (F. 21), et le disque mobile a son axe C en dehors. Cette seconde disposition rend moins facile la manœuvre de la soupape.

ROBINETS.

362. Le robinet a de deux à quatre ouvertures ; mais, dans tous les cas, il présente un tronc de cône dont les diamètres extrêmes diffèrent au plus de $\frac{1}{6}$ de la longueur, car il serait trop difficile de confectionner des

cylindres qui entrassent à frottement doux dans des creux cylindriques, et y pussent tourner facilement.

La pièce creuse dans laquelle se loge un robinet, en est le *boisseau ;* elle forme comme deux embases sur le cylindre du tuyau, et son canal rachète celui de ce cylindre des deux côtés.

Le robinet à deux ouvertures est percé de part en part d'un canal A de même diamètre que celui du tuyau B (P. V, F. 22), et perpendiculaire à l'axe du tronc de cône. Le robinet est ouvert (F. 22) quand l'axe de son canal se confond avec celui du tuyau, et il est complétement fermé (F. 23) lorsque ces deux axes sont d'équerre. Ce sont des robinets de cette espèce que nous avons supposés dans la description de la machine à vapeur. Ils sont plus faciles à construire que les autres, et ils rendent plus simple, moins dispendieuse, la disposition des tuyaux ; mais leur boisseau est un peu plus sujet à prendre la forme elliptique, par suite de la pression que la vapeur exerce sur leurs parois, en les traversant. Cette même pression occasionne aussi un grand frottement qui nuit à la facilité du jeu.

363. Le robinet à trois ouvertures est rarement employé ; il a d'ailleurs beaucoup d'analogie avec le robinet à quatre ouvertures. Ce dernier présente deux variétés, l'une due au Français *Papin,* véritable inventeur des machines à vapeur, l'autre due à l'Anglais *Bramah.*

Le robinet de Papin est percé de deux canaux *ag*, *bc*, courbés en sens contraires (P. V, F. 24), dont les extrémités correspondantes *a*, *b* sont séparées par un arc égal à celui *cc'* qu'embrasse la concavité de chacun sur la surface tronc-conique. Quand le piston P est au point le plus élévé de sa course, le canal *bc* établit communica-

tion entre le tuyau D, qui vient de la chaudière, et le tuyau E, qui débouche dans le haut du cylindre F; le canal *ag* fait communiquer le tuyau H, qui part du fond du même cylindre, avec le tuyau I, qui conduit la vapeur dans le condenseur ou dans l'atmosphère. Le robinet tourne sur son axe un peu avant que le piston ait terminé sa descente, soit pour que le fluide agisse par détente, soit pour diminuer la vitesse avant l'arrêt. Dans le premier cas, le point *b* recule à gauche d'une quantité égale au diamètre bc', et le canal *ag*, plus large qu'il n'est dans la figure, continue de lier H et I, tandis que la vapeur ne peut plus passer de D en E. Dans le second cas, le point *b* prend la position b', le point *c* se transporte en *b*, le point *a* en *g*, le point *g* en g', et alors la vapeur, passant de D en H, afflue dans la partie inférieure du cylindre F, tandis que celle de la partie supérieure se trouve déjà en communication avec le condenseur ou avec l'air par les tuyaux E, I, et perd sa tension.

Mais le fluide traversant le robinet de Papin par des canaux courbes, cause sur le boisseau des pressions convergentes dont la résultante est beaucoup plus grande que la pression qui a lieu dans le robinet à deux ouvertures. Il est vrai que cette dernière s'exerce toujours sur les mêmes points, au lieu qu'ici les efforts se font tantôt perpendiculairement aux arcs $b'g$, cc', tantôt dans un sens d'équerre à celui-là. Cependant, si la déformation du boisseau n'est plus la même, elle n'en a pas moins lieu, et c'est pour la prévenir ou l'atténuer qu'a été inventé le robinet de Bramah.

564. La vapeur arrive de la chaudière par le tuyau K (P. V, F. 25), entre dans une boite que forme la tête du robinet, et pénètre dans le tronc de cône par un trou en triangle curviligne L. Ce trou est contigu à

l'une *m* des 4 ouvertures, et si cette ouverture se trouve placée, comme dans la figure, devant le tuyau N qui conduit le fluide au-dessus du piston, la descente a lieu, car la vapeur du cylindre sort alors par le tuyau O, rentre dans le robinet par l'ouverture *p*, sort par l'ouverture *q*, et passe au condenseur ou dans l'atmosphère en suivant le tuyau R.

Le robinet faisant un quart de rotation, de droite à gauche, place son ouverture *m* devant le tuyau O, et la vapeur de K afflue sous le piston. L'ouverture *p* prend alors la place de *q*, *q* la place de *s*, et *s* la place de *m*. Le fluide qui remplit le cylindre peut donc passer du tuyau N dans le robinet et en sortir pour suivre le conduit R.

Un quart de rotation exécuté de gauche à droite remet les 4 ouvertures dans leurs premières positions, et le piston descend de nouveau.

On ne peut disconvenir que le robinet de Bramah est compliqué et d'une exécution difficile; mais, en revanche, il ne déforme pas sensiblement son boisseau: la vapeur remplissant toujours l'espace prismatique L et l'espace T qui met en communication les trois ouvertures *p*, *q*, *s*, exerce des pressions à peu près égales sur tous les points de contact du boisseau et des parties pleines du robinet.

SOUPAPES CONIQUES.

365. La soupape conique a deux variétés: dans l'une, la partie mobile est le disque, et dans l'autre, le *siège*, c'est-à-dire le tronc de cône creux où se loge le disque pour fermer exactement le passage.

La soupape conique à disque mobile se nomme souvent *poupée* dans les ateliers, et quelquefois *soupape*

en T, à cause de la forme que présente sa coupe. Elle se compose d'un tronc de cône A peu épais (P. VI, F. 1) et d'une tige B solidement liés l'un à l'autre. La tige, placée selon l'axe du cône, se meut verticalement dans deux colliers C, D, et le frottement qu'elle y éprouve suffit pour tenir la soupape ouverte, malgré le poids. Ce systéme est contenu dans une boîte cylindrique E, où arrive la vapeur par un tuyau F, et dont le siége G forme le fond. La tige traverse le couvercle de la boîte dans une boîte à étoupes; sa partie extérieure porte un mantonnet au moyen duquel une tringle attachée au balancier de la machine à vapeur peut élever ou abaisser le disque. L'amplitude HI de l'ascension est ordinairement $1/4$ du diamétre de la petite base du tronc de cône. Enfin, les génératrices droites de la surface conique sont inclinées à 45°. Si elles étaient plus rapprochées de la verticale, le disque aurait trop de tendance à glisser, par suite de la décomposition de l'effort qu'il supporte; dans le cas contraire, la base supérieure aurait un plus grand diamétre, celui de la base inférieure restant le même: la soupape exigerait plus d'espace, et la pression de la vapeur sur le disque s'augmenterait.

Le diamétre D de la boîte E dépend du diamétre d de la grande base. Il faut effectivement que le fluide qui passe par l'anneau plan compris entre le cylindre et le tronc de cône élevé s'écoule dans le même temps, sans contraction ni dilatation, par la surface cylindrique dont HI est la génératrice droite. Or, si l'on suppose $\mathrm{HI} = 1/4 d$, cette surface a pour expression

$$\pi d \times \mathrm{HI} = \pi d \times \frac{d}{4} = \frac{\pi d^2}{4},$$

et l'anneau vaut $\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}$, différence des deux cercles

qui le forme. Conséquemment,

$$\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d'^2}{4} = \frac{\pi d'^2}{4}, \quad \text{ou} \quad D^2 = 2d'^2, \quad \text{et} \quad D = d\sqrt{2} = 1,414d.$$

Les constructeurs font $D = 1,5d$.

C'est pour de pareils motifs que l'amplitude HI de l'ascension est fixée à $\frac{1}{4}$ de d'; car l'égalité de l'orifice inférieur du siége et de la surface cylindrique qu'engendre H'I', dont la longueur sera désignée par a, donne la relation $a\pi d' = \frac{\pi d'^2}{4}$, puis cette autre $a = \frac{d'}{4}$.

La pression de la vapeur sur les grandes soupapes coniques en rend l'ouverture assez difficile. Pour remédier à cet inconvénient, Watt a imaginé d'ajouter à la tige B un piston K d'un diamètre égal à d, qui se meut dans un cylindre L d'une longueur égale à a. La tige traverse le piston, le couvercle du cylindre, et n'a plus besoin de boîte à étoupes. Il est d'ailleurs visible que la pression du fluide sur la base inférieure du piston détruit celle qu'il exerce sur le disque, et que le poids total de la soupape est la seule résistance qui s'oppose à l'ascension.

366. La soupape conique à siége mobile a été inventée dans les mêmes vues que la *soupape à piston;* mais, si elle dispense d'une pièce additionnelle, elle ne détruit pas entièrement la pression de la vapeur, comme l'appareil de Watt.

Le disque fixe est le tronc de cône plein A (P. VI, F. 2); il repose sur un massif cylindrique et porte une douille C dans laquelle monte et descend la tige B. Cette tige traverse aussi, dans une boîte à étoupes, le couvercle de la boîte cylindrique à vapeur E. Le siége mobile est le tronc de cône creux G. Il termine par le

bas un manchon cylindrique L dont la paroi est liée à la tige par une traverse D. Ce manchon se trouve couronné d'un tronc de cône creux M, propre à faciliter l'entrée de la vapeur qu'amène dans la boite E le tuyau F. Du couronnement résulte un rebord N conique en dessous comme en dessus, qui s'appuie sur un bourrelet de même forme O quand la soupape est fermée, c'est-à-dire quand le tronc de cône G se superpose au tronc de cône plein A. Le bourrelet O fait le fond de la boite à vapeur E, et comme il est élastique, son contact permanent avec le manchon L interdit au fluide tout passage autre que celui du cylindre creux.

L'amplitude HI de l'ascension doit être encore ici le quart du diamètre d' de la petite base de A ; ce même diamètre doit évidemment égaler celui du tuyau F et celui du tuyau P, par lequel la vapeur se rend dans le cylindre à piston ; il est clair qne l'effort nécessaire pour ouvrir la soupape égale seulement le poids du manchon L joint à sa tige, plus la pression qu'exerce le fluide sur le rebord N et la traverse D ; enfin, si l'on donne à L une longueur $\frac{d'}{2}$, la hauteur totale de la boite à vapeur E sera $d' + \frac{d'}{2} = \frac{3}{2}d'$.

SOUPAPES SPHÉRIQUES.

367. Les soupapes sphériques sont des boules entières ou des segments de sphère qui ont un siége de même forme et de même rayon. Les segments, plus usités que les boules, portent le nom de *soupapes en coupe*. On les a employés comme soupapes de sûreté, attachant au-dessous du segment A (P. VI, F. 3) le poids B destiné à équilibrer la tension nécessaire de la vapeur. L'inventeur prétendait que l'adhérence n'y serait pas à

craindre; mais il paraît que son allégation n'a pas été confirmée par l'expérience : les coupes convenablement chargées ne jouent pas mieux sur leurs siéges *c* que les disques.

TIROIRS A COULISSE PRISMATIQUE.

368. Les tiroirs à coulisse prismatique se trouvent aujourd'hui dans un grand nombre de machines à vapeur. Le plus simple est le *tiroir-plan*, imitation de la vanne ordinaire des retenues d'eau, qui peut être employé pour modifier le courant de vapeur vers sa sortie de la chaudière. Il consiste en une plaque métallique parfaitement rodée A (P. VI, F. 4), qui, au moyen d'un mouvement alternatif rectiligne, bouche ou débouche plus ou moins le conduit B, contre la tranche duquel un ressort la presse constamment. On conçoit que la coulisse C fait partie de l'une des parois d'une boîte à vapeur D qui interrompt le tuyau. Le mouvement est quelquefois produit par une bielle E, un pignon à manivelle et une crémaillère liée à la plaque, après avoir traversé une boîte à étoupes.

369. Le *tiroir en anse* A est très-simple et très-ingénieux (P. VI, F. 5); mais continuellement pressé par la vapeur affluente, il oblige, comme le tiroir-plan, à vaincre un grand frottement. Ses coulisses verticales font aussi partie d'une boîte à vapeur B dans laquelle débouche le tuyau C qui vient de la chaudière. Lorsque les pieds de l'anse s'appuient sur l'embase D et la cloison E, comme dans la figure, le fluide se rend au-dessus du piston par le tuyau F, et celui qui a produit l'ascension va au condenseur par les tuyaux G, H. Quand les pieds de l'anse sont sur la cloison E′ et l'embase D′, le fluide versé par C

passe sous le piston en suivant le tuyau G, et celui qui a produit la descente revient par F, pour passer par H et gagner le condenseur. C'est au moyen d'une tringle I que le tiroir s'élève et s'abaisse; elle traverse une boîte à étoupes, en entrant dans la boîte à vapeur.

Un appareil analogue pourrait être appliqué aux machines à détente, car il suffirait évidemment d'ajouter à l'amplitude de l'arcade de l'anse le diamètre des tuyaux F, G, pour que l'orifice de F, par exemple, fût fermé avant que la communication de G et du condenseur se trouvât interrompue; alors le pied inférieur serait plus bas qu'il n'est dans la figure, d'une quantité égale au même diamètre, et il ne ferait qu'affleurer l'orifice de G, quand déjà le pied supérieur boucherait F. L'ascension du tiroir devrait s'arrêter à cette époque, et ne s'achever qu'à la fin de la descente du piston.

370. Le *tiroir en* D a été imaginé pour obvier à l'inconvénient du grand frottement qu'éprouve le tiroir en anse. Les deux embases sont remplacées par une cloison D (P. VI, F. 6); les pieds n'ont plus leur partie parallèle à l'arcade, et les tuyaux sont disposés de manière que la boîte à vapeur se trouve remplie du fluide qui se rend au condenseur par H, tandis que l'arcade est occupée par celui que le tuyau C amène de la chaudière. Il en résulte évidemment que les pieds sont simplement pressés contre les cloisons D, E, E′, par la faible tension de la vapeur qui communique avec l'eau froide du condenseur.

La figure représente la disposition propre à une machine à détente. On voit que le pied supérieur du tiroir A bouchera l'orifice F, quand le pied inférieur ne sera pas encore descendu devant l'orifice G. Par conséquent, la vapeur cessera d'arriver au-dessus du

piston, sans que celle de l'ascension cesse d'aller au condenseur.

Il conviendrait, lorsque la course est longue, d'employer deux tiroirs en D au lieu d'un seul, qui, difficile à bien ajuster, pourrait causer des fuites de fluide tantôt par l'extrémité supérieure, tantôt par l'inférieure. La même tige I n'en suffirait pas moins ; mais le tuyau C devrait être bifurqué de manière à verser la vapeur sous les deux arcades.

TIROIR A COULISSE CYLINDRIQUE.

371. Le tiroir à coulisse cylindrique est aussi nommé *soupape-piston*, attendu que c'est effectivement un petit piston qui, par ses oscillations, arrête ou laisse passer la vapeur. Il en faut deux A, A' pour une seule machine (P. VI, F. 7), mais c'est d'ordinaire la même tige I qui les met en mouvement. La figure représente le moment où la vapeur commence à se détendre dans le cylindre principal. L'orifice F vient d'être complétement fermé par le piston supérieur A, et pourtant le piston inférieur A' n'a pas encore commencé à masquer l'orifice G. Lorsqu'il le bouchera, le piston A n'aura pas encore démasqué l'orifice F ; de sorte qu'à ce moment, le cylindre principal ne recevra ni ne perdra plus de fluide. Il est bon qu'il en soit ainsi vers la fin de la descente, pour qu'elle s'achève doucement, en vertu de la réaction d'une couche de vapeur laissée au fond du cylindre. Dès qu'elle est terminée, le piston A' s'abaissant davantage, laisse pénétrer sous le grand piston P la vapeur venue de la chaudière par le tuyau C, et l'ascension commence, tandis que le fluide situé dans la partie supérieure du grand cylindre passe au condenseur ou dans l'atmosphère par le conduit H.

MÉCANISMES DES SOUPAPES.

372. Les mécanismes dont on fait usage pour ouvrir et fermer les soupapes aux instants convenables rentrent tous dans l'une des cinq espèces suivantes :

Mécanisme............	à encliquetage.	
	à excentrique. . .	circulaire.
		triangulaire.
	à cames.	tournantes.
		oscillantes.

Ils doivent être mis en mouvement par la machine à vapeur même, afin que le fluide arrivant au-dessus du piston un peu avant la fin de l'ascension, et au-dessous un peu avant la fin de la descente, diminue graduellement la vitesse acquise, et prévienne ainsi les secousses violentes qui auraient lieu, si le changement de direction s'opérait précisément au moment où la force-vive serait à son maximum. Il faut d'ailleurs, dans les machines à détente, que l'effluve d'ascension et l'effluve de descente soient interrompues vers la moitié de la course.

De là suit que les mécanismes à excentriques et les cames tournantes conviennent seulement aux machines qui transforment le mouvement rectiligne alternatif du piston en mouvement circulaire continu. Quant au mécanisme à encliquetage et aux cames oscillantes, on peut les appliquer à toutes les sortes de machines à vapeur ; mais ces moyens ont été imaginés particulièrement pour celles qui n'ont aucune partie rotative.

ENCLIQUETAGE.

373. Le mécanisme à encliquetage présente une bielle A (P. VI, F. 8) liée au balancier près du point

où s'y attache la tige du piston, contenue par des moises B qui la forcent à se mouvoir verticalement, et garnie de deux chevilles C, C'. Quand le piston est sur le point de terminer son ascension, la cheville inférieure C soulève le levier rotatif D ; ce levier fait tourner le déclic E ; la dent F d'un levier coudé et rotatif échappe à l'encliquetage ; un poids G suspendu au bras H descend soudain, et le bras I tire, en tournant, une tringle K. Pour que l'abaissement de cette tringle livre passage à la vapeur, il suffit qu'elle soit articulée avec un tiroir, ou avec la manivelle d'un robinet, ou avec un levier rotatif L dont un bras, fendu en fourche, embrasse la tige d'une soupape conique M au-dessous d'une embase.

Le poids G doit être cylindrique et se mouvoir dans un cylindre rempli d'eau, dont le diamètre surpasse le sien de très-peu. Le cylindre est placé dans une bâche pleine d'eau aussi ; il y communique par sa base supérieure et par un clapet N situé près de la base inférieure. Au moment où l'encliquetage est détruit, le poids tombe à la manière des graves, en vertu de son excès sur la pression du liquide ; mais bientôt l'eau comprimée ferme le clapet et oppose à la descente une résistance toujours croissante. L'ouverture de la soupape se fait donc brusquement, tandis que le reste du mouvement a lieu avec une vitesse qui, décroissant avec rapidité et devenant bientôt nulle, prévient toute espèce de choc.

Peu après l'instant où la vapeur a un libre accès sur le dessus du piston, la descente commence ; la cheville inférieure C s'éloigne du bras de levier D ; ce bras, plus pesant que l'autre, s'abaisse ; le déclic E tourne en sens inverse, et son mantonnet va s'appuyer contre l'axe du levier coudé H. Lorsque l'effluve de

vapeur doit être arrêtée, la cheville supérieure C′ presse un troisième bras O du levier coudé, remonte le poids G à sa position primitive, comprime la dent F contre le mantonnet du déclic, et rétablit ainsi l'encliquetage, pendant que le bras I s'élevant ferme soit le tiroir, soit le robinet, ou laisse la soupape conique retomber sur son siège.

Du reste, le poids G n'offre pas d'autre résistance à son ascension que son excès sur la pression de l'eau, car le clapet permet au liquide de la bâche d'affluer dans la partie inférieure du cylindre.

Enfin, un mécanisme analogue et deux chevilles placées sur la face de la bielle A opposée à celle où se trouvent C et C′, font ouvrir la soupape inférieure M′ un peu avant que ne se termine la descente, et arrêtent l'effluve ascendante quand le piston est vers le milieu de sa course ou l'a presque achevée.

EXCENTRIQUE CIRCULAIRE.

374. Il y a deux espèces de mécanismes à excentrique circulaire : dans l'un, l'excentrique fait mouvoir un levier coudé ; dans l'autre, il fait osciller verticalement une bielle moisée ; tous deux opèrent les changements de direction sans causer le moindre choc.

Le premier (P. VI, F. 9) offre un cylindre peu long A monté excentriquement sur l'arbre B que fait tourner le piston par le moyen de la manivelle C. Ce cylindre est entouré d'un bandeau D dont le diamètre intérieur surpasse le sien de très-peu, et auquel sont soudées deux tringles E, E′ qui se réunissent pour s'articuler avec le bras F d'un levier coudé. L'autre bras s'articule avec une tringle G par laquelle la soupape est manœuvrée comme dans le mécanisme précédent.

La position de la manivelle C et le sens de son mouvement font voir que la descente du piston est sur le point de se terminer. Alors le centre a de l'excentrique se trouve verticalement au-dessous du centre B de l'arbre ; les tringles E, E′ rendent vertical le bras F, horizontal le bras H du même levier ; la manivelle I du robinet de Bramah a aussi une position horizontale, et l'ouverture K de ce robinet n'est devant aucun tuyau. Mais la continuation du mouvement fait marcher le centre a vers la position a', le bras F vers la position F′, H vers H′, I vers I′, et l'ouverture K vers l'orifice K′ du tuyau qui conduit la vapeur sous le piston. Ainsi, à partir de a, le robinet commence à s'ouvrir, et il est entièrement ouvert quand a se trouve en a', ou quand le piston est près du milieu de son ascension, puisqu'alors F couvre F′, I couvre I′, et K couvre l'orifice K′. L'instant d'après, le robinet commence à se fermer, car la manivelle marche vers C″, a' vers a'', les bras F′, I′ retournent vers leurs premières positions, et il en est de même de l'ouverture K. La fermeture du tuyau K′ est complète quand le centre de l'excentrique se trouve en a'' et la manivelle en C″, positions symétriques de a et de C. L'ascension va bientôt se terminer ; mais, à cette époque, l'orifice K″ du tuyau qui conduit la vapeur au-dessus du piston commence à correspondre à l'ouverture K du robinet, car F marche vers F″, H vers H″, et I vers I″. Le tuyau K″ est entièrement démasqué, lorsque a''' devient le centre de l'excentrique ; la manivelle est en C‴, et la descente, près de son milieu. Ensuite, le système tend vers sa position primitive, pour laquelle la manivelle est en C et le centre de l'excentrique en a ; le tuyau K″ commence à se fermer ; il l'est entièrement quand la descente va se terminer, et au même moment, le tuyau K′ commence à s'ouvrir.

375. Le second mécanisme à excentrique circulaire se compose d'un arbre horizontal A auquel un engrenage communique la rotation du volant (P. VI, F. 10), de deux courts cylindres B, B′ montés excentriquement sur cet arbre, puis de deux bielles verticales C, C′ maintenues par des moises D, D′, et terminées par des rouleaux E, E′, que leur poids force de s'appuyer constamment sur les excentriques. La bielle C s'élève avec le piston, et au contraire la bielle C′ s'abaisse, parce que l'arbre A se trouve entre les centres des deux excentriques.

Vers le milieu de l'ascension, une cheville de C ferme la soupape d'en bas, pour que la détente s'effectue, et quand l'ascension est sur le point de s'achever, une autre cheville de la même bielle ouvre la soupape d'en haut. La descente a donc lieu, et la bielle C′ s'élève à son tour ; cette bielle ferme la soupape d'en haut vers le milieu de sa course, et ouvre la soupape d'en bas un peu avant de s'arrêter.

EXCENTRIQUE TRIANGULAIRE.

376. L'excentrique triangulaire A (P. VI, F. 11) est une pièce en fer de quelques centimètres d'épaisseur, et limitée par trois arcs de cercle égaux, de 60° chacun. Cette pièce est fixée sur un plateau circulaire B établi perpendiculairement au bout d'un arbre horizontal que celui du volant fait mouvoir au moyen d'un engrenage. L'excentricité CD, qui donne la position de la vis D, égale les $^2/_3$ de la perpendiculaire abaissée du sommet C sur la corde de l'arc opposé EF ; de sorte que ce sommet C se trouve au centre du plateau B.

L'excentrique ainsi placé se loge dans un rectangle mixtiligne EFGH. Ce rectangle est formé par deux

barres égales et parallèles EH, FG, cordes d'un cercle de fer I concentrique au plateau B; et perpendiculairement au milieu des barres, sont soudées au cercle I les deux parties K, K′ d'une bielle aussi en fer. Le rayon de la circonférence intérieure du cercle I égale celui des arcs de l'excentrique et l'écartement EF des barres, de sorte que les arcs EF, GH du rectangle sont de 60° et égaux à ceux du triangle curviligne A.

Cela posé, on conçoit que, si le plateau B tourne dans le sens FEH, l'arc CE, agissant à la manière d'une came sur la barre EH, élevera cette barre jusqu'à la position E′H′, avec une vitesse décroissante qui finira par devenir nulle. La bielle atteindra alors son maximum d'ascension, et achevera d'ouvrir la soupape d'en haut. D'ailleurs, elle conservera cette position pendant tout le temps que l'arc EF de l'excentrique sera tangent à E′H′, c'est-à-dire durant $1/6$ de la double course du piston ou $1/3$ de la descente. Ensuite, l'arc CE, parvenu à la position CH, presse la barre inférieure FG qui se trouve en F′G′, et fait descendre la bielle pendant les deux autres tiers de la descente du piston, ou jusqu'à ce que FG arrive en F″G″. La soupape d'en bas achève alors de s'ouvrir; il y a station de la bielle durant le premier tiers de l'ascension du piston; puis l'arc CE redevient tangent à la barre supérieure EH parvenue en CF′, et la bielle remonte pendant les deux autres tiers de l'ascension du piston.

CAMES TOURNANTES.

377. Chaque mécanisme à cames tournantes en contient deux A, B (P. VI, F. 12), qui ne font qu'une seule pièce montée sur l'arbre C du volant, ou sur un autre arbre que celui-là met en mouvement. Elles agissent

sur deux rouleaux D, D′ portés par deux cadres rectangulaires et verticaux que lient l'un à l'autre quatre tringles horizontales E, E′ ; ces tringles glissent à frottement doux dans les gorges rectangulaires de deux poulies F établies concentriquement sur l'arbre C. Au milieu d'un des cadres est fixé une sorte de triangle G, dans le plan vertical des cames ; il porte au sommet opposé deux chevilles qui enserrent le bras H d'un levier coudé ; l'autre bras agit sur la soupape comme dans le premier ou le second des mécanismes précédemment décrits.

La figure représente le moment où la descente du piston vient de se terminer : la manivelle I est en bas et verticale ; la came A abandonne le rouleau D, après l'avoir poussé de droite à gauche à sa plus grande distance du centre C; le bras K du levier coudé est à sa plus grande hauteur, parce que le bras H est à sa plus courte distance de C, et le balancier L, lié au levier coudé par une bielle, a fait descendre à sa position la plus basse le tiroir M, M′ ; de sorte que la vapeur, qui arrive par le conduit N, peut se rendre sous le piston en suivant le tuyau O, et que la vapeur de descente peut gagner le condenseur par le tuyau P.

Cet état de choses continue tant que la came B n'atteint pas le rouleau D′, et l'ascension s'effectue. Lorsque le piston est à moitié de sa course ascendante, la manivelle se trouve en I′; la came B, qui finit à 180° de I, abandonne le rouleau D′, après l'avoir éloigné de C, après avoir fait prendre à H la position H′, à K la position K′, à L la position L′, et placé M devant O. La vapeur ne se rend plus sous le piston, et celle qui s'y trouve agit par détente. A la fin de l'ascension, la manivelle est en I″. Comme la came A finit à 90° de I, elle abandonne le rouleau D′; mais elle avait commencé à

l'éloigner de C quand le piston n'était encore qu'aux $^5/_6$ environ de sa course ascendante, car son extrémité la plus voisine du centre est à peu près à 120° de I; en outre, le chemin rectiligne qu'elle a fait parcourir au même rouleau est double de celui qu'il parcourt sous la came B, attendu que la hauteur de cette came, mesurée selon un rayon, est seulement moitié de celle de la came A. Par conséquent, le bras H a parcouru l'arc H'H'', double de HH', le bras K est en K'', L en L'', et M', qui affleurait le bord inférieur du tuyau P, ayant parcouru un chemin double de sa hauteur, a démasqué ce tuyau en prenant la position M''. Ainsi, P se trouve entièrement ouvert à la fin de l'ascension, et il a commencé à s'ouvrir qu'elle n'était pas encore terminée.

Maintenant que D' est à sa distance maximum de C, D en est à sa distance minimum. Ce dernier rouleau sera donc repoussé par la came B, quand la manivelle approchera de I'''; à la moitié de la descente, le bras H sera revenu de H'' en H'''; les autres bras auront d'ailleurs les positions K''', L''', et par conséquent M'', descendu d'une quantité égale à sa hauteur, masquera P, tandis que M affleurera le bord supérieur de O. Enfin, avant la fin de la descente, la came A abaissera le tiroir et commencera à ouvrir le tuyau P; puis elle remettra les choses dans l'état que représente la figure, en ramenant H de sa position H''' à sa position primitive.

CAMES OSCILLANTES.

378. Le mécanisme à cames oscillantes en présente quatre qui forment deux pièces fixées sur les faces opposées d'une bielle A (P. VI, F. 13). Cette bielle, mise en mouvement par le balancier de la machine à vapeur, monte et descend avec le piston. Elle traverse, ainsi

que les cames, un cadre rectangulaire dont deux côtés opposés font les axes de deux rouleaux B, C; ces rouleaux peuvent se mouvoir entre deux plans horizontaux fixes D, D′, et leur écartement égale la saillie de l'une E des grandes cames, augmentée de la largeur de la bielle. Enfin, au cadre est attachée une tringle F qui se termine par un œil propre à recevoir la manivelle G du robinet.

L'appareil est représenté au moment où la descente du piston vient de se terminer. La grande came E a éloigné de la bielle le rouleau B autant qu'il peut l'être, puisque le rouleau C touche cette bielle; l'orifice du tuyau H, qui aboutit sous le piston, est entièrement démasqué, et l'ascension peut commencer. Quand elle se trouve à moitié effectuée, la petite came I a mis le rouleau C dans la position *c*; la manivelle G est en G′; l'ouverture du robinet répond à H″, et la vapeur ne peut plus agir que par détente. Mais dès que l'origine *e* de la grande came E′ touche le rouleau *c*, ce rouleau marche vers *c*′, G′ vers G″, et l'ouverture du robinet commence à passer devant l'orifice du tuyau H″, qui conduit la vapeur au-dessus du piston. L'ascension finit lorsque ce tuyau est entièrement ouvert. La came E′ a poussé le rouleau C jusqu'en *c*′, et B, qui est en *b*′, touche la bielle A. La descente commence aussitôt. Vers le milieu de cette seconde course, la petite came I′ saisit le rouleau *b*′, le fait rétrograder jusqu'en *b*, ramène G″ en G′, et l'ouverture du robinet devant H′. Enfin, la grande came E, agissant sur *b* un peu avant la fin de la descente, commence à ouvrir le tuyau H.

Il est visible d'après cela que si l'intervalle H′ égale le diamètre des tuyaux H, H″, chacune des grandes cames doit avoir une saillie double de celle d'une des petites, relativement à la bielle; que la distance ver-

ticale EE′ des points les plus saillants des premières égale la course du piston, et que les points les plus saillants des deux autres doivent répondre à la moitié de EE′.

379. Une observation générale terminera cet article; elle porte sur la mise en mouvement des machines à vapeur. Évidemment, elles ne peuvent commencer d'elles-mêmes à se mouvoir, puisque le jeu du piston exige celui des soupapes, et réciproquement. Il faut donc qu'un agent étranger détermine l'un ou l'autre. Cet agent est le chauffeur : il agit sur l'un des leviers rotatifs du mécanisme des soupapes, pour ouvrir celle qui permet à la vapeur de passer sous le piston ; cette pièce ouvre, en s'élevant, la soupape supérieure, et dès lors la machine continue de marcher par ses propres forces.

PISTONS.

380. Les pistons sont, comme on sait, des cylindres pleins qui se meuvent dans des cylindres creux. Ils doivent satisfaire à trois conditions : 1.° maintenir leurs bases planes perpendiculaires à la tige ; 2.° ne dépenser qu'une faible partie de la force motrice par leur frottement; 3.° *étancher* parfaitement le cylindre creux, c'est-à-dire interdire tout passage à la vapeur.

Nous avons vu (309) comment la première condition est remplie; les deux autres le sont au moyen d'une *garniture* en chanvre ou en laiton.

PISTON EN CHANVRE.

381. Le piston à garniture de chanvre est le plus usité pour les machines à vapeur (P. VI, F. 14). Sa base

inférieure a deux embases : celle du centre A offre un tronc de cône percé d'un trou conique de même axe, dans lequel se loge le pied de la tige B; ce pied est fixé par une clavette ou par un boulon. L'autre embase C forme un anneau qui entoure la première ; sa surface courbe intérieure est conique, et sa surface extérieure a deux courbures.

La base supérieure ou le *chapeau* se compose ordinairement de deux pièces : un anneau plat à rebord D dont le pourtour extérieur présente aussi deux courbures, et une *pièce de pression* E, taraudée pour recevoir quelques filets de vis placés à la partie inférieure de la tige. L'anneau du chapeau est lié à celui de la base par des goujons F qui l'empêchent de tourner, mais non de monter et de descendre. L'un de ces goujons porte un pignon G qui engrène avec le pourtour denté de la pièce de pression, et pour que l'axe de ce pignon ne raccourcisse point la course du piston, le couvercle du cylindre lui livre passage au moyen d'un trou que recouvre habituellement un *capuchon* vissé H.

La garniture de chanvre I est enroulée autour de l'anneau de la base et comprimée par l'anneau du chapeau. Quand le frottement l'a usée, et qu'elle laisse fuir la vapeur entre elle et le cylindre, on la force de remplir l'intervalle, en rapprochant le chapeau de la base. Il faut, pour effectuer cette manœuvre, arrêter le piston dans sa position la plus haute, enlever le capuchon H, et faire tourner le pignon G au moyen d'une clef qui coiffe l'axe. La pression verticale exercée sur l'anneau du chapeau se décompose ; une partie agit normalement à la surface à double courbure, et pousse la garniture contre le cylindre. Le même effet est produit par la surface à double courbure de la base, réagissant contre la pression des filets inférieurs du chanvre.

Mais la machine à vapeur peut jouer assez long-temps sans qu'il soit nécessaire de faire étendre horizontalement la garniture. L'action du fluide suffit pour maintenir un contact parfait, tant que l'enveloppe de chanvre n'est pas très-usée. La vapeur en effet s'introduit, par les trous des goujons, par le joint des deux pièces du chapeau, dans l'espace K qui sépare ces pièces de la base, passe de là dans la garniture, et la gonfle en même temps qu'elle la pousse horizontalement.

Un piston a besoin d'être constamment lubrifié, pour que son jeu soit doux. Il faut donc de temps en temps verser un liquide gras sur la surface frottante. C'est ordinairement du suif fondu qu'on emploie. Il tombe d'un entonnoir L qui traverse le couvercle du cylindre et que ferme un robinet.

PISTON EN LAITON.

382. Dans un piston à garniture métallique (P. VI, F. 15), le chapeau A, la base B et le corps C forment un seul bloc ordinairement. Des segments D d'anneaux plats en laiton occupent le rentrant cylindrique que laisse le corps entre les deux parties extrêmes. Ces segments, qui constituent la garniture, sont disposés en deux lits, de manière que les joints du lit inférieur ne correspondent point verticalement à ceux du lit supérieur; autrement, les fuites de vapeur seraient inévitables. Le coin compris entre deux segments contigus d'un même lit est occupé par une pièce en laiton E qu'on nomme *triangle*, mais qui ressemble réellement à une lunette de fortification. Chaque triangle est foré cylindriquement selon sa capitale; dans le trou se trouve une hélice élastique qui, enroulée sur un goujon et appuyée d'un bout sur le corps C, pousse de l'autre le triangle, et force ainsi les segments de laiton

à rester constamment en contact avec la paroi du cylindre F où se meut le piston. La vapeur les aide d'ailleurs à produire cet effet, car elle s'introduit derrière les triangles, en passant par les joints horizontaux des segments et du chapeau ou de la base.

Quelques constructeurs ont placé le sommet de chaque triangle sur la surface cylindrique des segments; mais il en est bientôt résulté des cannelures sur le cylindre de fonte. Il faut que les segments d'un même lit se touchent deux à deux par un joint dirigé selon un rayon du piston, et d'une longueur telle que les sommets des triangles ne puissent toucher le cylindre qu'à l'époque où les ressorts en boudin, totalement distendus, rendent nécessaire le renouvellement de tout le système.

383. Il existe dans quelques machines des pistons dont la garniture métallique est semblable au filet carré des vis. Ces pistons sont faits comme ceux qui ont une simple garniture de chanvre, si ce n'est que le corps est cylindrique, au lieu d'avoir deux courbures. L'hélice élastique, à profil carré, s'enroule sur ce corps, pardessus une mince garniture de chanvre, et ses spires, pressées les unes contre les autres par le chapeau, sont forcées de rester constamment en contact avec la paroi du cylindre creux.

COMPARAISON DES PISTONS.

384. Il suffit de savoir que le coefficient du frottement est $^1/_8$ dans les pistons garnis en laiton, et $^1/_6$ dans les pistons garnis en filasse, pour prononcer qu'il y a de l'avantage, sous le rapport de l'économie de la force motrice, à faire usage des premiers; mais il est bon d'apprécier au juste cet avantage.

Soient l, d, la longueur et le diamètre de la surface frottante, exprimés en mètres. Cette surface cylindrique vaut en mètres carrés $l\pi d = f\pi d^2$, puisque (309) on doit avoir $l = fd$. Mais la pression de la même surface égale au moins la tension de la vapeur ; car si elle était moindre, le fluide, qui cherche toujours à pénétrer par le joint, aurait bientôt détruit le contact. On peut donc prendre, pour cette pression sur chaque mètre carré, le nombre $10334^{kg}n$, qui indique la force de la vapeur. Conséquemment, tout mètre carré de la garniture donne lieu à un frottement $10334^{kg}nf$, et le frottement total est $10334^{kg}nf \times f\pi d^2 = 10334^{kg}nf^2\pi d^2$.

Les dimensions de la boîte à étoupes que traverse la tige sont telles, qu'il s'y fait un frottement à peu près égal au dixième du précédent. Le piston absorbe donc une force $F = 1,1 \times 10334^{kg}nf^2\pi d^2$.

Or, la pression constante de la vapeur sur les bases du piston pendant l'ascension et la descente, étant représentée en totalité par Q, donne

$$Q = 10334^{kg}n\frac{\pi d^2}{4},$$

puisque le diamètre de ces bases est aussi d. Par conséquent, $10334^{kg}n\pi d^2 = 4Q$, et $F = 4,4f^2Q$.

Ainsi, la force motrice consommée par tous les frottements d'un piston à garniture de laiton est déterminée par l'équation

$$F = \frac{4,4}{64}Q = 0,069Q,$$

et l'on a, pour celle que consomme un piston à garniture de chanvre,

$$F = \frac{4,4}{36}Q = 0,122\ Q.$$

La première n'est donc guère que la moitié de la seconde.

MÉCANISMES DES PISTONS.

585. La tige d'un piston doit se mouvoir verticalement, pour que son frottement sur la garniture de la boîte et celui du piston sur la paroi du corps de pompe n'absorbent pas une grande partie de la force motrice ; il pourrait d'ailleurs y avoir des fuites de vapeur, si la tige, prenant une position inclinée, obligeait le piston à exercer sur un point une pression plus grande que sur le point opposé. En second lieu, une machine à vapeur renferme ordinairement des arbres et des roues dont la rotation doit être produite par la pression verticale du fluide. C'est au moyen de mécanismes particuliers qu'on remplit ces deux conditions. Ils ne diffèrent que par l'appareil propre à diriger la tige, car dans tous le mouvement rectiligne alternatif se change en mouvement circulaire continu, à l'aide d'une bielle et d'une manivelle. Conséquemment, nous pouvons classer comme il suit les mécanismes des pistons :

Mécanisme......	à galets.	
	à balancier........	à fléau.
		à parallélogramme.

MÉCANISME A GALETS.

586. Le mécanisme à galets est de beaucoup le plus simple des trois, et bien qu'il soit moins employé que les deux autres, il les vaut au moins sous le rapport de l'efficacité, car il rend le mouvement de la tige parfaitement vertical, tandis que le fléau et le parallélogramme ne donnent qu'un à peu près.

La tige A du piston (P. VI, F. 16) est terminée par

une fourche B dont les branches sont traversées par un axe C. Cet axe forme comme deux tourillons d'un autre D qu'il traverse au milieu et perpendiculairement. L'axe D sert d'essieu à deux roulettes ou *galets* E de même rayon, dont le diamètre égale l'écartement de deux montants verticaux F et celui de deux autres montants G parallèles aux premiers. Enfin, deux bielles H oscillent sur les extrémités du même axe D, et font tourner les manivelles I attachées à l'arbre K.

La tige du piston ne peut évidemment éprouver aucune déviation dans le sens de l'axe D; il faut donc seulement s'opposer à ce que les efforts des bielles H l'inclinent dans le sens perpendiculaire à celui-là. Or, les galets E, contenus par les montants F sur lesquels ils roulent, ne lui permettent pas d'obéir à ces efforts. On sent d'ailleurs qu'il faut deux bielles pour empêcher l'essieu D de basculer, soit quand la tige A le pousse vers le haut des montants, soit lorsqu'elle le tire vers le cylindre L. Enfin, un pareil mécanisme exige que l'arbre K se trouve au-dessous du cylindre, et que le même plan vertical en renferme l'axe et celui de l'essieu D.

MÉCANISME A FLÉAU.

387. Un balancier, un contre-balancier et la pièce nommée *fléau* qui les unit, constituent la seconde espèce de mécanisme; son nom vient de ce que les mouvements simultanés de la première et de la troisième pièce ont de l'analogie avec ceux des deux parties de l'instrument qui sert à battre le blé.

Les deux bras AB, AC du balancier (P. VI, F. 7) et le bras unique DE du contre-balancier ont ordinairement chacun 4^m; la distance horizontale AF des

centres A, D d'oscillation est de 8^m ; leur distance verticale DF a 2^m, moitié de AB ; la même longueur 2^m est donnée au fléau BE, et c'est au milieu G de cette pièce que se trouve articulée la tige du piston. Il s'ensuit que le fléau a une position verticale, lorsque le balancier et le contre-balancier sont horizontaux ; que l'articulation G s'éloigne extrêmement peu de cette verticale, pendant que le balancier parcourt un angle d'environ 15° tant au-dessus qu'au-dessous de sa position horizontale ; que le milieu G de la droite AD des centres est presque au milieu de la course de l'articulation, et enfin que cette course a une étendue d'à peu près 2^m.

Pour démontrer ces diverses conséquences, nous considérerons le mécanisme dans une position quelconque ; A (F. 18) sera l'origine des coordonnées, x l'abscisse AH de G, y l'ordonnée GH du même point, α l'angle formé par le balancier et l'horizontale AF, β l'angle formé par le contre-balancier et l'horizontale DI, et γ l'angle compris entre le fléau et l'horizontale BK ; enfin nous mènerons les verticales BL, EN, l'horizontale GO, puis nous chercherons les relations des coordonnées de G et des angles α, β.

On voit d'abord que $AH = AL + LH = AL + BQ$.

Par conséquent, $x = 4\cos\alpha + \cos\gamma$.

Mais aussi $AH = AF - FN - HN = AF - DI - GO$,

et $x = 8 - 4\cos\beta - \cos\gamma$.

Donc $2x = 8 + 4\cos\alpha - 4\cos\beta$,

ou $x = 2(2 + \cos\alpha - \cos\beta)$.

L'ordonnée y est fournie par les relations

$GH = GQ + QH = GQ + BL$, et

$$GH = ON = OI + IN = EI - EO + IN = EI - EO + DF;$$

car elles donnent

$$y = \sin\gamma + 4\sin\alpha, \quad \text{et} \quad y = 4\sin\beta - \sin\gamma + 2,$$

puis

$$2y = 2 + 4\sin\alpha + 4\sin\beta \quad \text{ou} \quad y = 2(1/_2 + \sin\alpha + \sin\beta).$$

Comme les angles α, β dépendent l'un de l'autre, il faut encore avoir la valeur du second en fonction du premier, afin de pouvoir déterminer x et y pour chaque position du balancier. Or,

$$AF = AL + LN + NF = AL + BR + ID;$$

ce qui donne

$$8 = 4\cos\alpha + 2\cos\gamma + 4\cos\beta, \quad 4 = 2\cos\alpha + \cos\gamma + 2\cos\beta,$$

et

$$\cos\gamma = 4 - 2(\cos\alpha + \cos\beta).$$

D'ailleurs,

$$DF = IN = IR + RN = ER - EI + BL,$$

ce qui revient à

$$2 = 2\sin\gamma - 4\sin\beta + 4\sin\alpha,$$

d'où l'on tire

$$\sin\gamma = 1 - 2(\sin\alpha - \sin\beta).$$

Donc

$$\cos^2\gamma = 16 - 16(\cos\alpha + \cos\beta) + 4(\cos\alpha + \cos\beta)^2,$$

$$\sin^2\gamma = 1 - 4(\sin\alpha - \sin\beta) + 4(\sin\alpha - \sin\beta)^2,$$

$$1 = \left\{\begin{array}{l} 17 - 16(\cos\alpha + \cos\beta) + 4\cos^2\alpha + 8\cos\alpha\cos\beta + 4\cos^2\beta - \\ \quad 4(\sin\alpha - \sin\beta) + 4\sin^2\alpha - 8\sin\alpha\sin\beta + 4\sin^2\beta, \end{array}\right.$$

$$0 = 16 - 16(\cos\alpha + \cos\beta) + 4 + 8(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + 4 - 4(\sin\alpha - \sin\beta),$$

$$0 = 6 - 4(\cos\alpha + \cos\beta) + 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) - (\sin\alpha - \sin\beta),$$

$$2\sin\alpha\sin\beta - \sin\beta = 6 + \cos\beta(2\cos\alpha - 4) - (4\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Si, pour abréger, nous posons

$$2\sin\alpha - 1 = A,\quad 2\cos\alpha - 4 = B,\quad 4\cos\alpha + \sin\alpha - 6 = C,$$

il vient

$$A\sin\beta = B\cos\beta - C,\quad A^2(1-\cos^2\beta) = B^2\cos^2\beta - 2BC\cos\beta + C^2,$$

$$\cos^2\beta - \frac{2BC}{A^2+B^2}\cos\beta = \frac{A^2-C^2}{A^2+B^2},$$

$$\cos\beta = \frac{BC}{A^2+B^2} \pm \sqrt{\left\{\frac{A^2-C^2}{A^2+B^2} + \frac{B^2C^2}{(A^2+B^2)^2}\right\}} = \frac{BC \pm A\sqrt{(A^2+B^2-C^2)}}{A^2+B^2}.$$

Supposons maintenant que le plus grand écart du balancier AB au-dessous de l'horizontale AF le porte seulement sur la droite AD des centres (F. 17). La tangente du maximum de α sera $\frac{BG}{AB} = 1/4 = 0,25$; par conséquent, pour ce maximum,

$$\alpha = 14°2'10'',\quad \cos\alpha = 0,9701,\quad \text{et}\quad \sin\alpha = 0,2425.$$

Il en résulte

$$A = -0,515,\quad B = -2,0598,\quad C = -1,8771,$$

et $\qquad \cos\beta = 0,744$ ou $0,9709.$

Or, de ces deux valeurs de $\cos\beta$, c'est la seconde 0,9709 qu'il faut prendre. En effet, lorsque AB s'abaisse au-dessous de l'horizontale AF, le fléau BE prend une position inclinée, et la distance verticale des articulations B, E diminue. L'angle β n'augmente donc pas autant que l'angle α, et puisque ces deux angles sont égaux dans la figure 17, on doit avoir $\beta < \alpha$ dans la figure 18, et par suite $\cos\beta > \cos\alpha$. D'ailleurs, $\cos\beta = 0,744$ répond à une position BE' du fléau, dans laquelle E se trouve au-dessus de B (F. 18).

Ainsi, $\qquad \beta = 13°51'20''$ et $\sin\beta = 0,239.$

Substituant dans la valeur générale de l'abscisse du point G, on obtient pour AH,

$$x=2(2^m+0^m,9701-0^m,9709)=2(2^m-0^m,0008)=4^m-0^m,0016.$$

Or, le point G se trouve horizontalement à 4^m de A, quand le fléau est vertical. Conséquemment, il s'écartera de la verticale BE et à gauche d'environ $0^m,0016$, pendant que le balancier exécutera la seconde moitié de la descente.

Si nous considérons la seconde moitié de l'ascension de AB, nous aurons encore $\alpha=14°2'10''$, et les mêmes nombres pour $\cos\alpha$, $\sin\alpha$; mais cette dernière ligne devra être prise négativement, puisqu'elle changera de direction. Par conséquent, dans ce cas,

$$A=-(2\sin\alpha+1)=-1,485,\quad B=2\cos\alpha-4=-2,0598,$$
$$C=4\cos\alpha-\sin\alpha-6=-2,3621,\quad \text{et}\quad \cos\beta=0,5399\quad \text{ou}\quad 0,969.$$

Ces valeurs sont toutes deux plus petites que celle de $\cos\alpha=0,9701$, et cela prouve que les deux positions inclinées B'E'', B'E''' du fléau, qui peuvent répondre à la position la plus élevée de AB, exigent que β surpasse α. Il en doit être effectivement ainsi, car la distance verticale des articulations B, E diminuant pendant que AB s'éloigne de la position horizontale du contre-balancier DE, il faut que celui-ci parcoure un plus grand chemin. Quant à celle des deux valeurs de $\cos\beta$ qu'on doit prendre, il est visible que c'est la plus grande 0,969 : elle répond au point E'' et à la moindre valeur de β, par laquelle passe DE avant d'atteindre l'autre.

Ainsi, pour l'abscisse de la plus haute position de G, on a

$$x=2(2^m+0^m,9701-0^m,969)=4^m+0^m,0022,$$

ce qui montre que cette articulation s'écarte alors à

droite de la verticale BE un peu plus qu'elle ne s'en écarte à gauche dans sa plus basse position. Néanmoins, la petitesse de chaque écart est telle qu'on est bien fondé à regarder le mécanisme à fléau comme rendant vertical le mouvement de la tige GP du piston.

La substitution des valeurs de $\sin\alpha$ et de $\sin\beta$, relatives à la fin de la descente, donne pour l'ordonnée GH,

$$y = 2(0^m,5 + 0^m,2425 + 0^m,239) = 1^m,963.$$

Retranchant $BG = 1^m$, ordonnée relative à la position horizontale du balancier, on trouve $0^m,963$ pour la descente qu'effectue la tige pendant que AB parcourt au-dessous de l'horizontale AF un arc de $14°2'10''$.

Nous avons trouvé $\cos\beta = 0,969$ pour la fin de l'ascension de AB. Il s'ensuit

$$\beta = 14°18'10'', \quad \sin\beta = -0,247,$$

$$y' = 2(0^m,5 - 0^m,2425 - 0^m,247) = 0^m,021, \text{ et } y + y' = 1^m,984.$$

La course du piston est donc de 2^m, à un centimètre et demi près. Ajoutant d'ailleurs $BG = 1^m$ à la valeur de y', on obtient $1^m,021$ pour l'ascension qu'effectue la tige GP pendant que AB parcourt au-dessus de l'horizontale AF un arc de $14°2'10''$. Aux deux chemins égaux du balancier répondent donc deux chemins inégaux pour la tige; mais la demi-course du piston

$$\frac{y + y'}{2} = 0^m,992, \text{ et } 1^m,021 - 0^m,992 = 0^m,029.$$

Par conséquent, le milieu G de la droite AD des centres se trouve seulement à $0^m,029$ au-dessous du milieu de la course du piston; cette course est effectuée à moitié quand le balancier AB s'est élevé de quelque peu au-dessus de sa position horizontale, et les vitesses de

ce balancier sont à bien peu près proportionnelles à celles de la tige.

388. Au fond, l'articulation G parcourt un arc peu courbe d'une lemniscate dont l'axe est perpendiculaire au milieu de la droite AD des centres (P. VI, F. 19); ce milieu est le nœud de la courbe en 8, ou le point dans lequel ont lieu les deux inflexions, et c'est l'inclinaison de l'axe YZ qui rend verticale la plus grande portion de l'arc parcouru.

La lemniscate du mécanisme à fléau est facile à tracer. Marquez, sur le bord droit d'une bande de papier, les extrémités et le milieu G' de la droite DF qui égale le fléau; décrivez les arcs B'B'', E'E'' que doivent parcourir l'extrémité B du balancier et l'extrémité E du contre-balancier; puis, placez la bande de papier dans diverses positions B'E', B''E'', B'''E''', etc., de manière que les points F, D soient chacun sur un des arcs B'B'', E'E''; toutes les positions de G' seront des points de la courbe : le nœud G est donné par G', quand la bande devient perpendiculaire à AB, et les extrémités Y, Z de l'axe répondent à G', lorsque la bande se trouve parallèle à AD.

MÉCANISME A PARALLÉLOGRAMME.

389. Le mécanisme à parallélogramme a été imaginé et adopté pour réduire de moitié les longueurs du mécanisme à fléau, et des trois quarts l'espace total occupé. Le jeu de l'un est absolument le même que celui de l'autre; tous deux font parcourir le même chemin vertical au point d'attache de la tige du piston. Mais le premier, outre l'avantage d'avoir de plus faibles dimensions, possède encore celui de pouvoir conduire deux pistons à la fois.

Plaçons une articulation au milieu B′ du bras AB du balancier (P. VI, F. 20); achevons le parallélogramme BB′E′G, dont BB′, longueur égale au fléau, et BG, moitié de ce fléau, sont deux côtés contigus; adaptons une articulation au sommet E′; transportons le centre d'oscillation du contre-balancier DE en D′, milieu de la droite AD des centres; prenons D′E′ pour remplacer DE; supprimons GE, moitié du fléau BE, et laissons en G l'articulation qui attache la tige GP du piston; le système du bras AB, du parallélogramme articulé BB′E′G et du contre-balancier D′E′ constituera le mécanisme à parallélogramme.

Or, malgré les variations des angles du quadrilatère BB′E′G, ou les déformations qu'il éprouvera pendant les rotations de AB et de D′E′, cette figure restera toujours un parallélogramme, puisque les côtés opposés ne cesseront pas d'être égaux. Conséquemment, B′E′ et BE conserveront leur parallélisme; parce que $B'E' = \frac{BE}{2}$, comme $AB' = \frac{AB}{2}$, le sommet E′ se trouvera constamment sur la droite AE et en sera le milieu, comme D′ est celui de AD. Les diverses positions de D′E′ seront donc parallèles aux positions correspondantes de DE; l'angle β' égalera toujours l'angle β, et aura les mêmes relations avec les différentes valeurs de α. En outre, le sommet G du parallélogramme restera au milieu de BE, comme E′ au milieu de AE, puisque E′G sera toujours parallèle à AB. Si donc la tige GP du piston était attachée à la fois au sommet G et au milieu du fléau BE, le mécanisme à parallélogramme pourrait fonctionner en même temps que le mécanisme à fléau, sans que cette tige cessât de se mouvoir comme dans le cas où

elle est attachée au deuxième seulement. Par conséquent enfin, celui-ci peut être remplacé par le premier.

Il est visible d'ailleurs que le mécanisme à parallélogramme contient un petit mécanisme à fléau dont les trois parties AB′, B′E′, D′E′ sont les moitiés des parties AB, BE, DE du grand. Une tige verticale attachée au milieu de B′E′ se mouvrait donc aussi verticalement, et sa course serait moitié de celle de GP. On profite de cette propriété du parallélogramme pour faire jouer une pompe en même temps que le piston à vapeur.

En résumé, les grands côtés BB′, E′G d'un parallélogramme de mécanisme à piston et le contre-balancier D′E′ égalent ordinairement la moitié du bras AB du balancier; les petits côtés B′E′, BG qui s'attachent à ce bras en sont chacun le quart; ce même quart forme la distance verticale D′H des centres d'oscillation A, D′; leur distance horizontale AH vaut la longueur totale du bras, et la tige du piston s'attache au sommet G, le plus éloigné du centre A.

BOITES DES TIGES.

390. Les boîtes qui livrent passage aux tiges des pistons et des soupapes, en fermant toute issue à la vapeur, sont de trois sortes : les *boîtes à cuir*, les *boîtes à étoupes*, et les *boîtes à garniture métallique*.

BOÎTES A CUIR.

Les boîtes à cuir ne peuvent être adaptées qu'aux machines à basse pression; encore la chaleur de la vapeur, desséchant le cuir peu à peu, finit-elle par lui ôter son élasticité. Cette substance animale a été employée de deux manières: en *disques* et en *coupe*. Les

disques, percés d'un trou de même diamètre que le cylindre de la tige, sont pressés les uns contre les autres, et contre le bord de l'orifice, par des vis qui ont leurs écrous dans le couvercle de la boîte. Le fond d'une coupe en cuir est aussi percé d'un trou de même diamètre que le cylindre de la tige; la pression que le bord supérieur éprouve contre le couvercle de la boîte force le bord inférieur à rester constamment en contact avec la tige, malgré l'usure.

BOITES A ÉTOUPES.

391. La boîte à étoupes présente un cylindre court A (P. VI, F. 21) revêtu d'un manchon de chanvre B qui étreint la tige du piston. Le manchon est supporté par l'anneau plat C que forment, sur le couvercle D du corps de pompe, l'orifice de ce couvercle et le cylindre de la boîte; et pour qu'il ne cesse point d'étreindre la tige, ses filaments sont comprimés par le couvercle E de la boîte, dont une portion entre dans le cylindre. Ce couvercle forme d'ailleurs deux coupes : celle d'en bas est renversée, et sert à décomposer la pression verticale de manière que le chanvre soit poussé contre la tige; celle d'en haut renferme le liquide lubrifiant.

BOITE A GARNITURE MÉTALLIQUE.

392. La garniture métallique d'une boîte cylindrique A (P. VI, F. 22) est construite dans le même système que celle d'un piston; elle en diffère seulement par la forme des pièces, par l'absence de tout vide, par une mince couche d'étoupe B placée entre la paroi de la boîte et la garniture, et par deux cercles d'acier C qui aident les ressorts en boudins à comprimer les parties

de cette garniture contre la tige D du piston. Les cercles, fortement tendus, poussent en effet les triangles E et les rectangles échancrés F, tandis que ces rectangles sont poussés par les triangles et par les ressorts en hélices et à goujon G.

Les échancrures des rectangles ont trois rainures circulaires : la supérieure H et l'inférieure I renferment chacune un anneau d'acier qui, faisant ressort, produit une fermeture très-hermétique sans causer beaucoup de frottement. La rainure du milieu K est un réservoir pour la graisse ; mais comme il ne peut servir que pour la partie inférieure de la garniture, on en ménage un autre L, en relevant en voûte le milieu du couvercle de la boîte.

MODÉRATEUR.

393. Le piston d'une machine à vapeur doit faire constamment le même nombre d'oscillations par seconde, pour que la manivelle, le volant, et par suite la machine-ouvrière, aient un mouvement uniforme. Il faut donc que l'ascension et la descente soient opérées toujours par les mêmes forces. Or, la tension de la vapeur varie avec la température. On conçoit que le chauffeur puisse toujours atteindre à la vitesse nécessaire, en augmentant le combustible ; mais il lui est impossible de régler les charges du fourneau de manière à ne point dépasser la température qu'exige cette vitesse. Le mouvement du piston s'accélérerait donc chaque fois, pour ainsi dire, que le feu serait alimenté, si la machine ne portait pas un appareil propre à diminuer l'effluve de vapeur proportionnellement à l'accroissement de la tension. Cet appareil, nommé *modérateur,* se compose d'un registre A placé dans le tuyau de conduite, près du cy-

lindre où joue le piston (P. VI, F. 25), et d'un mécanisme qui peut faire tourner le registre au moyen de la vitesse circulaire que lui imprime l'arbre du volant. Le mécanisme est appelé *pendule conique*. Son arbre vertical BB′ porte, à l'extrémité inférieure, une poulie C qu'embrasse une courroie sans fin, après avoir passé sur une poulie pareille concentrique à l'arbre du volant; en outre, il est traversé, vers le milieu, par l'essieu D de deux leviers coudés EDF, E′DF′, et plus haut, sa partie cylindrique passe dans une douille G que deux tringles égales FG, F′G lient aux leviers. A cette même douille se trouve fixée une équerre H dont la longue branche finit en fourche pour recevoir la manivelle I du registre.

Les bras inférieurs des leviers se terminent par deux boules en fer E, E′ qui, au repos, s'appuient contre des croissants K, K′ implantés dans l'arbre BB′; les bras supérieurs sont ordinairement d'équerre sur les deux autres, et égaux aux tringles FG, F′G. Le quadrilatère DFGF′ est donc un losange; ses quatre sommets sont des articulations.

Lorsque la machine marche avec la vitesse requise ou ordinaire, la force centrifuge qui résulte du mouvement circulaire du pendule conique éloigne un peu les boules de leur position de repos, rend d'environ 30° l'angle EDL, donne au losange les diagonales DG, FF′, et maintient le registre dans un plan horizontal. Le tuyau de conduite est donc entièrement ouvert, et l'effluve de vapeur qui va presser soit le chapeau, soit la base du piston, a tout le volume qu'elle peut avoir. Mais que la vitesse de ce piston vienne à croître, le mouvement du volant s'accélère; il en est de même de la rotation du pendule; la force centrifuge augmente; les boules s'écartent; les bras supérieurs s'élèvent et se

rapprochent; les angles D, G du losange diminuent, ainsi que la diagonale horizontale; au contraire, les angles F, F′ et la diagonale verticale augmentent; la douille G monte, parce que le sommet D est fixe; le registre tourne, ferme plus ou moins le tuyau, et la diminution de l'effluve atténue la vitesse du piston. A mesure que cette vitesse décroît, la force centrifuge du pendule en fait autant; les boules se rapprochent; la douille G descend; le passage de la vapeur s'agrandit; il se retrouve entièrement ouvert, dès que les bras inférieurs des leviers tournent à 30° de l'arbre BB′, et la machine a repris alors sa marche ordinaire.

La vitesse peut devenir assez grande pour qu'il soit nécessaire d'interrompre tout à fait l'effluve pendant quelques instants. Il faut donc que le registre puisse prendre une position verticale, et le pendule, celle que représentent les lignes ponctuées. Ainsi, la douille doit pouvoir monter jusqu'en g, l'articulation F passer en f, et la boule E s'écarter jusqu'en e.

394. Cherchons les conditions qu'imposent au pendule conique ses deux positions extrêmes. Nous ferons abstraction des frottements peu importants des axes, et nous désignerons par v la vitesse de rotation des centres E, E′, par r la distance de chacun à la verticale DL, par h la hauteur arbitraire de l'axe D au-dessus du plan horizontal de rotation EE′, et par F la force centrifuge qui résulte de v. On sait que $F = \frac{v^2}{r}$. Mais cette puissance se décompose, puisque E, lié au point D, est obligé de suivre l'arc vertical ELE′. La partie tangentielle, faisant avec la direction horizontale de F un angle égal à EDL, vaut $F \cos 30°$.

La gravité g se décompose aussi, et sa partie tangentielle, opposée à $F \cos 30°$, faisant avec la verticale

un angle complémentaire de EDL, égale $g \sin 30°$. Cette résistance détruit la puissance, pendant que la machine fonctionne avec sa vitesse ordinaire, puisque E reste à une distance constante r de DL. Conséquemment,

$$F \cos 30° = g \sin 30°, \quad \text{et} \quad \frac{v^2}{r} = g \tang 30°.$$

Comme cette relation est indépendante du poids des boules, on voit qu'il reste arbitraire. Cependant, il doit être assez grand pour que les centres de gravité des bras DE, DE' se trouvent très-voisins des centres des deux sphères, où la force g a été supposée appliquée.

Nous substituerons dans la dernière équation, à la place de tang 30°, sa valeur $\frac{r}{h}$, afin de déterminer v indépendamment de tout angle. Il en résultera

$$v = r\sqrt{\frac{g}{h}},$$

pour la vitesse circulaire et horizontale que doivent avoir habituellement les centres des boules.

La vitesse à l'extrémité du rayon 1 est donc

$$\frac{v}{r} = \sqrt{\frac{g}{h}},$$

et celle qu'il faut à la gorge de la poulie C, dont le rayon sera désigné par R, vaut

$$\frac{R}{r} v = R\sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Mais, si v' est la vitesse angulaire du volant, et R' le rayon de la poulie qui conduit C, la vitesse à la gorge de cette

poulie sera $R'v'$, et comme deux roues qui se conduisent ont la même vitesse à leurs pourtours,

$$R\sqrt{\frac{g}{h}} = R'v'.$$

Conséquemment,

$$R = \frac{R'v'}{\sqrt{\frac{g}{h}}}$$

est la longueur que doit avoir le rayon de la poulie C, pour que les boules tournent habituellement avec une vitesse v.

D'ailleurs, la relation

$$\frac{r}{h} = \text{tang } 30° \quad \text{donne} \quad r = h \text{ tang } 30°,$$

et si l'on désigne par l la longueur du bras inférieur DE de chaque levier coudé, on a

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = h\sqrt{1 + \text{tang}^2 30°}.$$

Quant à la longueur c des côtés du losange, elle doit être moindre que l, afin que l'effort dû à la force centrifuge, étant plus grand en F qu'en E, ait une composante suffisante selon FG, puis selon GB'. Mais, d'un autre côté, si c n'était qu'une petite partie de l, il faudrait un grand écartement des boules pour que l'amplitude du mouvement de la douille G pût faire jouer convenablement le registre A. L'expérience apprend qu'on doit ne point prendre c plus grand que $^2/_3\,l$, ni moins grand que $\frac{l}{2}$.

395. Reste à examiner ce qui résultera d'une augmentation de vitesse. Nous représenterons cette aug-

mentation par le multiple quelconque kv. La vitesse ordinaire v deviendra $v+kv$ ou $v(k+1)$ à l'extrémité du rayon r; l'accroissement de la force centrifuge transportera les boules dans de nouvelles positions e, e', situées chacune à une distance r' de DL; l'angle EDL de 30° prendra l'ouverture eDL que nous indiquerons par α; la hauteur h de D au-dessus de l'horizontale des centres se changera en $h'=$ DL', et l'équilibre exigera entre la nouvelle force centrifuge F' et la pesanteur la relation $F'\cos\alpha = g\sin\alpha$, établie au n.° précédent.

Or, la vitesse qui, dans le premier état du mécanisme, avait lieu à l'extrémité de r', était $\frac{vr'}{r}$. Elle est donc maintenant $\frac{vr'}{r}(k+1)$, et la relation $F'\cos\alpha = g\sin\alpha$ devient

$$\frac{\frac{v^2r'^2}{r^2}(k+1)^2}{r'} = g\operatorname{tang}\alpha, \quad \text{ou} \quad \frac{v^2r'}{r^2}(k+1)^2 = g\frac{r'}{h'},$$

puisque $\operatorname{tang}\alpha = \frac{r'}{h'}$. Substituant à $\frac{v^2}{r^2}$ sa valeur $\frac{g}{h}$, on a

$$\frac{(k+1)^2}{h} = \frac{1}{h'}, \qquad \text{puis} \qquad h' = \frac{h}{(k+1)^2}.$$

Il s'ensuit

$$h - h' = h - \frac{h}{(k+1)^2} = \frac{k^2+2k}{(k+1)^2}h,$$

pour la diminution qu'éprouve h, lorsque la vitesse augmente de kv. Comme la plus grande valeur de k n'excède pas 0,1 dans les machines bien conduites, la plus forte diminution de h s'élève seulement à

$$\frac{0{,}01+0{,}2}{1{,}21}h = 0{,}17\,h.$$

Néanmoins, cette variation, presque double de celle de v, montre que le pendule conique est suffisamment sensible aux changements de vitesse.

Mais on peut mettre la chose plus en évidence par le calcul de l'alongement que prend la diagonale verticale d du losange DFGF'.

Remarquons d'abord que le triangle isocèle EDE' ayant son angle D de 60°, est équilatéral, et que le triangle DFG l'est aussi, puisque ses côtés sont d'équerre sur ceux de EDE'. Nous en conclurons que $d=c$, côté du losange, et qu'en général

$$\frac{d}{c}=\frac{2r}{l}\ \text{ ou }\ d=\frac{2cr}{l}.$$

Les triangles eDe', Dfg sont semblables par la même raison, et donnent, pour la diagonale verticale Dg,

$$\frac{d'}{c}=\frac{2r'}{l}\quad\text{ou}\quad d'=\frac{2cr'}{l}.$$

Par conséquent, l'alongement de d,

$$d'-d=\frac{2c}{l}(r'-r),$$

valeur générale de l'ascension de la douille G.

Dans l'hypothèse d'une ouverture de 30° pour l'angle EDL,

$$d'-d=\frac{2d}{l}(r'-r),$$

et dans celle de

$$c=\frac{2}{3}l,\quad d'-d=\frac{4}{3}(r'-r).$$

Or, h est le sinus de l'angle DEE' pour le rayon l; cet angle vaut 60°, et par conséquent,

$$h=0{,}87l,\quad 2r=l.$$

Donc

$$r = \frac{l}{2} = \frac{h}{1,74} = 0,575h.$$

De plus, $r'^2 = l^2 - h'^2$, et dans le cas de la plus grande augmentation de vitesse,

$$h' = \frac{h}{\left(\frac{11}{10}\right)^2} = \frac{1}{1,21}h.$$

Il s'ensuit

$$r' = \sqrt{\frac{h^2}{(0,87)^2} - \frac{1}{(1,21)^2}h^2} = h\sqrt{\frac{1}{0,757} - \frac{1}{1,464}} =$$

$$h\sqrt{1,321 - 0,683} = h\sqrt{0,638} = 0,8h,$$

et $$d' - d = \frac{4}{3}(0,8 - 0,575)h = 0,3h.$$

Ainsi, tandis que h diminue des 0,17 de sa valeur primitive, la diagonale DG augmente des 0,3 de cette même valeur; en d'autres termes, l'ascension de la douille G surpasse de plus d'un tiers celle du plan de rotation EE'.

396. La longueur de la partie de manivelle I, comprise entre l'axe du registre A et l'équerre H, dépend de la position du pendule conique au moment où le tuyau est complétement fermé. Supposons que les articulations et l'accroissement de la composante de g, qui s'oppose à la composante contraire de F, imposent à l'angle α un maximum de 75°. Il faudra que le registre devienne vertical, dès que l'augmentation de vitesse fera prendre au bras DE la direction relative à ce maximum. Or, alors, on aura

$$d' - d = \frac{2c}{l}(r' - r) = \frac{4}{3}\left(l \sin 75^\circ - \frac{l}{2}\right),$$

puisque le bras c ou DF vaut $^2/_3\, l$, que $r = ^1/_2\, l$, et que $r' = l \sin \alpha = l \sin 75°$. Comme $\sin 75° = 0{,}966$,

$$d' - d = \frac{4}{3}\, l(0{,}966 - 0{,}5) = 0{,}62 l = \text{MM}'.$$

Soit m la longueur MA de la manivelle du registre, qui, étant horizontal, fait un angle de 45° avec cette droite. L'angle MAM' est de 90°, puisque AM' répond à la position verticale de A ;

$$\overline{\text{MM}'}^2 = 2m^2, \quad \text{et} \quad m = \frac{\text{MM}'}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}62 l}{1{,}414} = 0{,}44 l.$$

397. Si l'on veut connaître l'augmentation de vitesse qui fera fermer complétement le tuyau, quand m sera les 0,44 du bras l ou DE, il faut recourir à la relation établie (395) entre h et h'. Elle donne $(k+1)^2 = \frac{h}{h'}$; et d'ailleurs,

$$h' = \sqrt{(l^2 - r'^2)}, \qquad r' = l \sin 75° = 0{,}966 l.$$

Il en résulte

$$h' = \sqrt{l^2 - (0{,}966)^2 l^2} = l\sqrt{1 - 0{,}933} = 0{,}26 l.$$

Or, nous avons trouvé précédemment $h = 0{,}87\, l$. Conséquemment,

$$(k+1)^2 = \frac{0{,}87 l}{0{,}26 l} = 3{,}35, \quad k+1 = \sqrt{3{,}35} = 1{,}83, \quad \text{et} \quad k = 0{,}83.$$

Ce sera donc seulement quand la vitesse circulaire de l'extrémité du rayon r ou LE deviendra $v + 0{,}83 v$, que la vapeur cessera d'affluer dans le cylindre du piston.

CONDENSEUR.

398. Le cylindre A du condenseur (P. VI, F. 24) est placé dans une bâche d'eau froide B qu'une pompe foulante entretient pleine par le tuyau C. C'est le balancier de la machine à vapeur qui fait jouer cette pompe (389). Le tube d'injection D, terminé en pomme d'arrosoir, se trouve assez bas pour que le liquide situé à son niveau s'y élance, en vertu de la charge produite par les couches supérieures. Mais un robinet E, qu'on fait tourner à l'aide d'une tige et d'une poignée F, permet d'ouvrir et de fermer à volonté ce tuyau ; toutefois, il reste constamment ouvert pendant que la machine est en mouvement.

L'eau injectée et celle que donne la vapeur condensée rempliraient bientôt le cylindre A, si elles n'en étaient retirées à mesure qu'elles tombent au fond. Toutes deux d'ailleurs abandonnent des gaz, principalement de l'air, et ces fluides s'accumulant acquerraient bientôt une tension capable d'arrêter la marche du piston. Le condenseur doit donc contenir aussi une pompe propre à vider le cylindre. On l'appelle *pompe à air*, à cause de sa destination principale, ou de son analogie avec celles de la machine pneumatique. Elle a effectivement un piston G percé de deux ouvertures dont les soupapes s'ouvrent en dessus. Lorsque le piston à vapeur s'élève, le piston à air, qui est attaché au même bras du balancier, monte aussi ; ses soupapes se ferment, le clapet H s'ouvre par suite du vide formé au-dessous de G, et les fluides du cylindre A passent dans le cylindre II'. Pendant la descente des deux pistons, les fluides de I refoulés ferment le clapet H, ouvrent les soupapes de G et passent dans la partie I'. A

la seconde ascension, ce qui a été dit de la première se répète, et de plus, les fluides situés au-dessus du piston G sont forcés d'ouvrir le clapet K, et de passer dans une cuvette L d'où les gaz s'échappent dans l'atmosphère, tandis que l'eau chaude est élevée par une pompe M, pour alimenter la chaudière.

Ainsi, l'appareil nommé *condenseur* se compose de quatre parties principales : la bâche B qui opère l'injection et s'empare d'une partie du calorique abandonné par la vapeur, le cylindre A où se fait la condensation, la pompe à air H′, et la cuvette L qu'on doit aussi considérer comme le réservoir de l'appareil alimentaire. A la rigueur, le tuyau N, appelé *reniflard,* forme une cinquième partie ; mais il demeure bouché pendant le jeu de la machine, et sert seulement pour la mise en mouvement, ainsi que nous le dirons plus loin.

PRESSION DU PISTON.

399. Le tuyau O qui fait communiquer le cylindre du condenseur et le cylindre où s'exerce l'effort de la vapeur, porte un manomètre P tout à fait pareil à celui de la chaudière (P. VI, F. 24). C'est la différence des indications de ces deux instruments qui fait connaître la pression exercée sur le piston-moteur.

En effet, nous avons trouvé (354) pour la tension n de la vapeur affluente, en atmosphères,

$$n = \frac{{}^1\!/_2 c}{0^m,38} + 1,$$

${}^1\!/_2 c$ désignant le nombre de mètres marqué sur l'échelle du manomètre de la chaudière. Si n' est la tension du fluide dans le condenseur A, et ${}^1\!/_2 c'$ l'indication du

manomètre P, nous aurons aussi

$$n' = \frac{{}^1/_2 c'}{0^m,38} + 1.$$

Or, la pression supportée par le piston-moteur est évidemment égale à l'excès de la première tension sur la seconde. Sa valeur est donc

$$n - n' = \frac{{}^1/_2 c}{0^m,38} + 1 - \frac{{}^1/_2 c'}{0^m,38} - 1 = \frac{{}^1/_2 c - {}^1/_2 c'}{0^m,38}.$$

La condensation est regardée comme parfaite, quand ${}^1/_2 c' = 0^m,025$. Mais il est rare que ce degré soit atteint, et les machines sont réputées bonnes, lorsque ${}^1/_2 c' = 0^m,04$. Dans ce dernier cas, la pression

$$n - n' = \frac{{}^1/_2 c - 0^m,04}{0^m,38},$$

ou bien elle équivaut à celle d'une colonne de mercure dont la hauteur est $c - 0^m,08$, puisque chaque mètre de l'échelle des manomètres répond à 2^m de différence dans les niveaux des deux branches.

Supposons ${}^1/_2 c = 1^m,14$, la pression du piston en mètres de mercure sera $1^m,14 \times 2 - 0^m,08 = 2^m,2$, et en atmosphères,

$$n - n' = \frac{1^m,14 - 0^m,04}{0^m,38} = \frac{1^m,1}{0^m,38} = 2^{at},9,$$

à fort peu près. Mais les parois de la chaudière n'en seront pas moins soumises à une pression intérieure

$$n = \frac{{}^1/_2 c}{0^m,38} + 1 = \frac{1^m,14}{0^m,38} + 1 = 4^{at},$$

et à la pression atmosphérique extérieurement, ce qui

formera une poussée de 5^{at}. On conçoit effectivement que si la tension de la vapeur du condenseur diminue l'effort exercé sur le piston, elle s'ajoute aux résistances qui, s'opposant à l'ascension ou à la descente, produisent la tension de la vapeur affluente, et par suite, celle que supportent les parois de la chaudière.

EAU D'INJECTION.

400. Le liquide introduit par le tuyau **C** dans la bâche **B** doit être constamment égal en quantité à celui qui jaillit dans le cylindre condenseur **A**, pour que la pression sur l'orifice du tube injecteur **D** ne diminue point et qu'il n'y ait pas de déversement. Les dimensions de la pompe à eau dépendent donc du poids P' de liquide qu'exige, par course, la condensation. Or, ce poids varie avec la chaleur de la vapeur.

L'unité des quantités de chaleur est le calorique spécifique de l'eau, c'est-à-dire le calorique qui élève de 1° la température de 1^{kg} du liquide; cette unité porte le nom de *calorie*. Selon M. Clément, dont les expériences tendent à établir que la vapeur de l'eau contient toujours la même quantité de chaleur, 1^{kg} de ce liquide absorbe 650 calories pour se convertir en vapeur d'une température et d'une tension quelconques. Selon l'Anglais Southern, il faut un nombre de calories égal à $550 + t$ pour transformer 1^{kg} d'eau à 0° en vapeur d'une température t, quelle que soit la pression. Cette opinion, qui fait varier le nombre des calories avec la température, conduit aux mêmes résultats que celle de M. Clément, quand $t = 100^\circ$, et à des résultats peu différents, lorsque t s'éloigne peu de 100°, soit en dessus, soit en dessous. Mais, comme leur désaccord a de l'importance

dans tout autre cas, il faut choisir entre elles. Nous adopterons celle de M. Southern, qui paraît la plus rationnelle.

Ainsi, le poids P_1 de vapeur à la température t qu'il faut condenser après chaque oscillation du piston-moteur, renferme une quantité de chaleur exprimée par $P_1(550+t)$. Or, le poids P' de l'eau d'injection a $P't''$ calories, si t'' indique la température de la bâche; le poids $P'+P_1$ du liquide qui tombe au fond du cylindre a $(P'+P_1)t'$ calories, si t' représente la température du mélange; et la chaleur de ce mélange, aussitôt après la condensation, vaut nécessairement la somme des calories qui existaient un instant auparavant. Par conséquent,

$$(P'+P_1)t' = P't'' + P_1(550+t),$$

ce qui donne

$$P' = P_1 \frac{550+t-t'}{t'-t''}.$$

La température t'' s'élève ordinairement à 12°, à cause de la température constante du puits d'où provient l'eau et de celle du local qu'occupe le condenseur. Le nombre de degrés t' peut être fixé arbitrairement, pourvu qu'il soit pris au-dessous de t et au-dessus de t'': égal à la première de ces limites, il empêcherait toute condensation; égal à la seconde, il rendrait P' infiniment grand. Pour économiser l'eau d'injection, sans trop affaiblir l'effort du piston-moteur, on laisse t' s'élever à 50°, la plus haute température que la main puisse supporter dans l'eau. Conséquemment,

$$P' = P_1 \frac{550+t-50}{50-12} = P_1 \frac{500+t}{38}.$$

Nous avons trouvé (348) pour le poids de vapeur consommé en 1^h,

$$P = \frac{0^{kg},8085nv}{1+0,00375t},$$

v étant le volume du fluide. Si donc v_1 représente le volume occupé par la vapeur dans le cylindre du piston-moteur, le poids consommé à chaque oscillation,

$$P_1 = \frac{0^{kg},8085nv_1}{1+0,00375t}, \qquad P' = \frac{0^{kg},8085nv_1}{1+0,00375t} \times \frac{500+t}{38},$$

et en regardant 1000^{kg} comme le poids du mètre cube d'eau d'injection, ce qui est toujours à peu près vrai, on a généralement pour le volume V' à dépenser par coup de piston,

$$V' = \frac{0,8085nv_1}{1000+3,75t} \times \frac{550+t-t'}{t'-t''},$$

et dans les circonstances ci-dessus indiquées,

$$V' = \frac{0,8085nv_1}{1000+3,75t} \times \frac{500+t}{38}.$$

Supposons $n=3$. La formule du n.° 349 donnera

$$t = \frac{\sqrt[5]{3}-0,2847}{0,007153} = 134°,35,$$

et nous obtiendrons

$$V' = \frac{0,8085 \times 3v_1}{1000+3,75 \times 134,35} \times \frac{500+134,35}{38} = 0,027v_1.$$

Tel est donc aussi le volume d'eau que la pompe doit refouler dans la bâche pendant chaque course du piston.

NIVEAU DE LA BACHE.

401. La relation qui vient d'être établie entre les volumes V', v_1 peut servir à déterminer la hauteur de l'eau dans la bâche.

Soient d le diamètre du tube injecteur, h la hauteur due à la vitesse qu'a le liquide en sortant de l'orifice supérieur de ce tube dégarni de sa pomme d'arrosoir, et τ la durée en secondes d'une oscillation. Le volume d'eau qui jaillit durant ce temps dans le condenseur,

$$V' = \frac{\pi d^2}{4}\tau\sqrt{2gh};$$

et si, pour abréger, nous faisons

$$\frac{0,8085n}{1000+3,75t}\times\frac{500+t}{38}=k,$$

il vient $$V' = kv_1,$$

$$\frac{\pi d^2}{4}\tau\sqrt{2gh}=kv_1, \quad \text{et} \quad h=\frac{16k^2v_1^2}{2g\pi^2\tau^2d^4}.$$

Soit encore h' la distance du centre de l'orifice à la surface de l'eau dans la bâche. La tranche liquide placée en ce point se trouve pressée de bas en haut tant par une colonne d'eau dont le volume est $\frac{\pi d^2}{4}h'$, et le poids, $1000^{kg}\frac{\pi d^2 h'}{4}$, que par la colonne atmosphérique dont l'effort vaut $10334^{kg}\frac{\pi d^2}{4}$, et de haut en bas par le fluide élastique renfermé dans le condenseur, lequel agit (399) avec une force de

$$13598^{kg}\times 0,08\frac{\pi d^2}{4}=1087^{kg},84\frac{\pi d^2}{4}.$$

La tranche supérieure du tube jaillit donc dans le condenseur en vertu de la pression

$$1000^{\text{kg}}\frac{\pi d^2 h'}{4}+10\,334^{\text{kg}}\frac{\pi d^2}{4}-1087^{\text{kg}},84\frac{\pi d^2}{4}=1000^{\text{kg}}\frac{\pi d^2}{4}(h'+9,2462),$$

qui revient à celle d'une colonne d'eau dont la hauteur serait $h'+9^{\text{m}},2462$. Par conséquent, sa vitesse est due aussi à cette hauteur, et $h'+9^{\text{m}},2462=h$. De là se tire la formule

$$h'=\frac{16k^2 v_1^{\,2}}{2g\pi^2\tau^2 d^4}-9^{\text{m}},2462,$$

au moyen de laquelle on détermine aisément la distance du niveau dans la bâche à l'orifice supérieur du tube d'injection. Mais cette formule peut être rendue plus simple encore.

Représentons par H, D, u, respectivement la course, le diamètre et la vitesse du piston-moteur. Nous aurons

$$v_1=\frac{\pi D^2}{4}\text{H},\qquad \frac{\text{H}}{\tau}=u,$$

et

$$h'=\frac{k^2}{2}\cdot\frac{u^2}{g}\left(\frac{\text{D}}{d}\right)^4-9^{\text{m}},2462.$$

EAU D'ALIMENTATION.

402. Il est maintenant aisé de voir que la plus grande partie du liquide élevé de la cuvette L (P. VI, F. 24) doit s'échapper par le tuyau de trop plein de l'appareil alimentaire (357).

En effet, la relation établie (400) entre le poids P′ de l'eau injectée et le poids P_1 de la vapeur condensée à chaque oscillation donne

$$P' + P_1 = P'' = P_1 \frac{500+t}{38} + P_1 = P_1 \frac{538+t}{38},$$

puis
$$P_1 = \frac{38}{538+t} P''.$$

Comme t vaut toujours au moins 100°, le poids P_1 de l'eau qui sort en vapeur de la chaudière pendant chaque oscillation est une fraction assez petite du poids P'' de liquide que la pompe à air fait passer dans la cuvette. Or, la pompe d'alimentation M doit envoyer dans la chaudière seulement un poids d'eau égal à P_1, puisqu'il est nécessaire d'y entretenir un niveau constant. En conséquence, le tuyau d'alimentation D (P. V, F. 17) ne reçoit que $\frac{38}{538+t} P''$, et le reste de P'' s'écoule par le tuyau de trop plein F.

Soit t=100°. L'alimentation exigera $\frac{38}{638} P''$=0,059P'' environ, et le tuyau B, dans lequel la pompe M (P. VI, F. 24) refoule l'eau de la cuvette L, fournira un excès de 0,941P'' en eau chaude dont on pourra disposer.

MISE EN MOUVEMENT.

403. Nous ne pouvons terminer la description théorique des machines à vapeur sans parler de leur mise en mouvement, car il ne suffit pas de produire du fluide élastique en chauffant l'eau de la chaudière, pour que le jeu du piston commence, puisque ce jeu est à la fois effet et cause de celui des soupapes. Ce ne serait même pas encore assez d'ouvrir à la main, une première fois, les orifices du cylindre à vapeur (379), attendu que la machine est remplie d'air; que l'ascension, par exemple, refoulerait cet air dans le condenseur, et qu'il s'y

répartirait entre les cylindres O, A, I (P. VI, F. 24). On conçoit effectivement qu'alors la descente du piston-moteur ne pourrait s'achever, puisque l'air des cylindres O, A s'opposerait à la fuite de la vapeur qui aurait produit la première course.

On doit donc commencer par purger d'air la machine qu'il s'agit de faire passer du repos au mouvement. L'opération consiste à entretenir, durant quelques minutes, un courant de vapeur dans le condenseur A et son appendice O. Pour que ce courant puisse chasser promptement l'air devant lui, il a besoin d'une issue facile. C'est le reniflard N qui la fournit, dès que le bouchon de son orifice supérieur est dévissé. Le sifflement que produit la vapeur en sortant de cet orifice au travers du liquide qui le recouvre, annonce qu'elle est parvenue à expulser l'eau et l'air du condenseur.

Il faut toutefois laisser continuer l'écoulement jusqu'à ce qu'il soit sorti un volume de vapeur à peu près égal à celui des parties creuses de la machine, afin d'obtenir l'évacuation de l'air qui a pu se mêler au fluide aqueux. Lorsqu'elle semble effectuée, on interrompt le courant, le reniflard est rebouché, le tube injecteur D est ouvert; puis, si le piston-moteur se trouve, par exemple, au plus haut point de sa course, on ouvre à la main la soupape par laquelle doit entrer la vapeur pour le faire descendre, et celle qui fait communiquer la partie inférieure du cylindre avec le condenseur. Dans le cas où cet état des choses ne déterminerait pas le mouvement, il faudrait rétablir le courant de vapeur, car la machine n'aurait pas été suffisamment purgée d'air.

Quand le cylindre du piston-moteur a quatre soupapes ou robinets, on produit le courant en ouvrant à la main les deux qui se trouvent près de la même base:

la vapeur venant de la chaudière entre dans le cylindre par l'une des soupapes, et en sort par l'autre, pour passer dans le condenseur. Mais, si la machine a un tiroir ou un robinet à quatre orifices, le fluide ne peut plus passer de la chaudière au condenseur sans faire jouer le piston, et il devient nécessaire, pour obtenir un courant, d'avoir une conduite à robinet qui, partant du tuyau de la chaudière, débouche dans celui O du condenseur : on appelle cette conduite *tuyau de chasse*.

ÉNERGIE DES MACHINES A VAPEUR.

404. L'énergie absolue d'une machine à vapeur dépend de la quantité d'action que le piston-moteur peut produire dans chaque oscillation; car si l'on multiplie cette quantité par le nombre des courses exécutées en 1″, et qu'on divise le produit par 75^k, le quotient indique combien la machine remplace de chevaux capables d'élever 75^{kg} à 1^m dans chaque seconde.

Mais deux machines à vapeur peuvent être du même nombre de chevaux et fort différentes sous le rapport de l'économie : il est possible que l'énergie relative à un poids assigné du combustible brûlé soit, dans l'une, inférieure à ce qu'elle est dans l'autre. Il importe donc, pour les comparer, de savoir déterminer la quantité d'action due à 1^{kg} de combustible.

Ainsi, nous avons à établir au moins deux formules pour chaque espèce de machines à vapeur, c'est-à-dire pour les machines sans détente, les machines à un seul cylindre avec détente, et les machines à deux cylindres. Toutes seront supposées fixes, attendu que l'artillerie n'emploie pas de locomotives, et nous les considérerons d'abord dans le cas où elles ont un condenseur, puis

dans celui où la vapeur se mêle à l'air atmosphérique après avoir produit son effet.

ÉNERGIE DES MACHINES SANS DÉTENTE.

405. Lorsqu'il n'y a pas détente, la vapeur exerce, pendant toute l'ascension, une pression constante sur chaque mètre carré de la base du piston, et la même pression sur le chapeau, pendant toute la descente.

Nommons a l'aire de la base en mètres carrés, p la pression du fluide qui arrive de la chaudière, p' celle du fluide que condense l'eau injectée, h la hauteur de la course. Évidemment, $a(p-p')$ exprime l'effort total et constant auquel le piston se trouve soumis; $ha(p-p')$ représente la quantité d'action produite dans chaque oscillation, et s'il y a n' courses par seconde, le travail pour ce temps, $T=n'ha(p-p')$. Or, $ha=v$, volume de vapeur consommé pour une seule course. La formule théorique de l'énergie absolue est donc

$$T = n'pv\left(1 - \frac{p'}{p}\right).$$

Mais les résistances accessoires, les fuites de vapeur et le refroidissement, qu'on ne saurait empêcher tout à fait, rendent le travail réel du piston fort différent du travail théorique. Ainsi, la formule a besoin d'un coefficient de correction N. Dans la pratique, on calcule la force de la machine au moyen de l'équation

$$T' = NT.$$

La valeur de N varie avec la force théorique et l'état de l'appareil. Le tableau suivant fait connaître le nombre à employer dans chaque cas.

FORCE THÉORIQUE en chevaux	MACHINE en très-bon état.	MACHINE en état passable.
De 4 à 8	N = 0,5	N = 0,42
10 20	0,56	0,47
30 50	0,6	0,54
60 100	0,65	0,6

406. Cherchons maintenant la formule de l'énergie relative à 1^{kg} de combustible. Désignant par δ le poids d'un mètre cube de vapeur, et par P le poids total du volume v, nous avons d'abord

$$v = \frac{P}{\delta}, \qquad T' = Nn'p\frac{P}{\delta}\left(1 - \frac{p'}{p}\right).$$

Or (348)

$$\delta = \delta_1 \frac{1 + 0{,}00375 t_1}{1 + 0{,}00375 t} \cdot \frac{p}{p_1},$$

et quand la vapeur d'eau a une température $t_1 = 100°$, le poids du mètre cube $\delta_1 = 0^{kg},588$; la tension $p_1 = 10\,334^{kg}$, étant due à la pression atmosphérique, seule résistance qui s'oppose à l'ébullition. En conséquence,

$$\delta = 0^{kg},588 \frac{1{,}375}{1 + 0{,}00375 t} \cdot \frac{p}{10334} = p\frac{0{,}000\,078}{1 + 0{,}00375 t},$$

et

$$T' = Nn'P\frac{1 + 0{,}00375 t}{0{,}000\,078}\left(1 - \frac{p'}{p}\right).$$

Il reste à trouver le poids P' de combustible qu'il a fallu brûler pour convertir en vapeur d'une température

t, un poids d'eau $n'P$ qui avait déjà la température t' de l'eau d'alimentation.

Voici d'abord le tableau des nombres de calories produits par 1^{kg} des divers combustibles qui peuvent être consumés dans le foyer d'une machine à vapeur.

COMBUSTIBLES.		CIRCONSTANCES.	CALORIES.	VALEURS de k.
Charbon de bois....		sec ou distillé ...	7 050	3 525
		0,2 d'eau........	6 000	3 000
Coke		pur.............	7 050	3 525
Houille	1.re qualité .	0,02 de cendre...	7 050	3 525
	2.e qualité..	0,1 de cendre...	6 345	3 172
	3.e qualité..	0,2 de cendre...	5 932	2 966
Bois...	séché au feu.	0,52 de charbon..	3 666	1 833
	séché à l'air.	0,2 d'eau... ...	2 945	1 472
Tourbe	1.re qualité.	....	3 000	1 500
	ordinaire...	.. ..	1 500	750

Pour former ce tableau, on a déterminé expérimentalement combien la combustion de 1^{kg} de coke, par exemple, peut fondre de glace à 0°; puis, le produit de 75 calories par les 94^{kg} trouvés a fourni le nombre 7050.

Il faut en effet 75 calories pour liquéfier 1^{kg} de glace à 0°, sans élever la température, car la fusion peut être opérée par 1^{kg} d'eau à 75° qui passe à zéro et perd précisément ce nombre de calories (400).

Mais, des calories produites par un foyer de machine à vapeur, il n'y a guère que la moitié qui entre dans l'eau de la chaudière. On doit donc diviser par 2 tous les nombres du tableau, avant de les employer au calcul de l'énergie relative. Nous représenterons par k chaque

quotient, afin de ne faire aucune hypothèse sur la nature du combustible consommé.

Il est clair maintenant que tout nombre de calories divisé par k donne en kilogrammes la quantité de combustible qui l'a produit, et que $P' = \frac{n'P(550+t-t')}{k}$, car les calories nécessaires au poids d'eau $n'P$ dépendent de l'accroissement $t-t'$ de sa température; d'où suit, d'après la loi de M. Southern (400), que leur nombre vaut $n'P(550+t-t')$.

Ainsi, le travail T' dû au poids $n'P$ de vapeur consommé en $1''$, l'est aussi au poids du combustible brûlé $\frac{n'P(550+t-t')}{k}$. Par conséquent, le travail dû à un seul kilogramme de ce combustible,

$$T'' = \frac{Nn'P\frac{1+0,003\,75t}{0,000\,078}\left(1-\frac{p'}{p}\right)}{\frac{n'P(550+t-t')}{k}} = Nk\frac{1+0,003\,75t}{0,000078(550+t-t')}\left(1-\frac{p'}{p}\right).$$

407. Les valeurs de T, T', T'', conviennent aux machines sans détente qui n'ont point de condenseur, si l'on y remplace p' par la pression moyenne de l'atmosphère, $10\,334^{kg}$, et t' par $10°$, température ordinaire de l'eau de puits, avec laquelle la chaudière est alors alimentée. Il en résulte que les formules à employer pour les machines sans détente et sans condensation sont

$$T = n'pv\left(1-\frac{10\,334}{p}\right),$$
$$T' = NT,$$
$$T'' = Nk\frac{1+0,003\,75t}{0,000\,078(540+t)}\left(1-\frac{10\,334}{p}\right).$$

Elles montrent que la pression p doit être supérieure

à celle de l'atmosphère ; et en effet, s'il en était autrement, le piston, autant ou moins pressé par la vapeur que par l'air extérieur qui s'oppose à la fuite du fluide aqueux, resterait sans mouvement ou en prendrait un contraire à celui du courant sorti de la chaudière.

ÉNERGIE D'UN PISTON A DÉTENTE.

408. Le travail d'une machine où la détente ne commence pas en même temps que l'oscillation, se divise en deux parties : l'une a lieu depuis l'origine de la course jusqu'à la fermeture de l'orifice par lequel afflue la vapeur; l'autre s'accomplit depuis cette fermeture jusqu'à la fin de l'oscillation.

Soit h' la portion de course qu'a parcourue le piston pendant l'affluence d'un poids P de vapeur à température t et à tension p. La première partie du travail, quantité d'action produite le long de h', est, d'après le n.° 405, $aph'=pv'$, si v' désigne la capacité ah' dans laquelle il n'y a pas détente, et si nous faisons momentanément abstraction de la tension dans le condenseur.

Pour trouver la seconde partie du travail, quantité d'action due au parcours du reste $h-h'$ de la course, il faut considérer la détente dans un moment quelconque où le piston, supposé ascendant, par exemple, est arrivé à une hauteur x et reçoit une pression p_1 sur chaque mètre carré. Pendant l'instant suivant, le fluide élastique fait sur ce piston un travail élémentaire ap_1dx.

Mais il résulte de l'échauffement du cylindre que la température de la vapeur est, pendant la détente, à fort peu près la même qu'auparavant. Les tensions relatives à ces deux circonstances sont donc en raison inverse des capacités occupées par le fluide, et comme ces capacités cylindriques, de même base, ont pour

rapport celui de leurs hauteurs,

$$\frac{p_1}{p}=\frac{h'}{x}, \quad p_1=\frac{ph'}{x}, \quad ap_1 dx = aph'\frac{dx}{x}.$$

Ainsi, la seconde partie du travail,

$$\int aph'\frac{dx}{x} = aph' \text{Log}' x + C.$$

Cette intégrale, devant être prise de $x=h'$ à $x=h$, donne

$$aph'(\text{Log}'h - \text{Log}'h') = aph'\text{Log}'\frac{h}{h'}.$$

Mais

$$\frac{h}{h'}=\frac{v}{v'} \qquad \text{et} \qquad ah' = v'.$$

Conséquemment,

$$aph' \text{Log}'\frac{h}{h'} = pv'\text{Log}'\frac{v}{v'}.$$

Afin de n'avoir pas à calculer le logarithme népérien du rapport des volumes, nous le changerons en logarithme ordinaire, au moyen de la relation connue

$$\text{Log}'\frac{v}{v'} = \text{Log}'10 \times \text{Log}\frac{v}{v'} = 2{,}3026\,\text{Log}\frac{v}{v'},$$

et nous aurons

$$pv'\text{Log}'\frac{v}{v'} = 2{,}3026 pv' \text{Log}\frac{v}{v'}$$

Le travail total, somme des quantités d'action produites avant et pendant la détente, est donc

$$pv' + 2{,}3026 pv' \text{Log}\frac{v}{v'} = pv'\left(1 + 2{,}3026\,\text{Log}\frac{v}{v'}\right),$$

abstraction faite de la résistance opposée par la tension p' du fluide qui se condense. Comme cette résistance

agit pendant toute la course, durant la détente et auparavant, elle fait, en sens inverse du mouvement, un travail $ap'h = p'v$. Par conséquent, le piston transmet seulement au balancier, dans chaque seconde, une quantité d'action

$$T = n'\left[pv'\left(1 + 2{,}3026 \operatorname{Log} \frac{v}{v'}\right) - p'v\right].$$

Mais, si p'' désigne la pression qui s'exerce sur le piston à la fin de la détente et de la course,

$$\frac{p}{p''} = \frac{v}{v'}, \qquad v = v'\frac{p}{p''},$$

$$T = n'\left[pv'\left(1 + 2{,}3026 \operatorname{Log} \frac{p}{p''}\right) - p'v'\frac{p}{p''}\right].$$

On a donc enfin, pour formule théorique,

$$T = n'pv'\left(1 + 2{,}3026 \operatorname{Log} \frac{p}{p''} - \frac{p'}{p''}\right),$$

et pour formule applicable,

$$T' = N'T.$$

Le tableau suivant donne les valeurs que prend le coefficient de correction N' dans toutes les machines à détente et à condensation, quel que soit le nombre de leurs cylindres.

FORCE THÉORIQUE en chevaux	MACHINE en très-bon état.	MACHINE en état passable.
De 4 à 8	N' = 0,33	N' = 0,3
10 20	0,42	0,35
20 40	0,5	0,42
60 100	0,6	0,55

Si la valeur de T avait besoin d'une sanction, elle la trouverait dans ce fait qu'il suffit d'y exprimer que la vapeur agit sans détente, pour retomber sur la valeur du n.° 405. Alors, effectivement,

$$p''=p,\quad \text{Log}\frac{p}{p''}=\text{Log}\,1=0,\quad v'=v\quad \text{et}\quad T=n'pv\left(1-\frac{p'}{p}\right).$$

409. Nous obtiendrons la formule de l'énergie relative à 1^k de combustible, en procédant comme au n.° 406. Elle est donc, pour les machines d'un seul cylindre, à détente et à condensation,

$$T''=N'k\frac{1+0{,}00375t}{0{,}000\,078(550+t-t')}\left(1+2{,}3026\,\text{Log}\frac{p}{p''}-\frac{p'}{p''}\right).$$

410. Lorsque la détente n'est pas accompagnée de la condensation (407), le coefficient de correction n'est plus N', $p'=10334^{kg}$, $t'=10°$, et l'on doit employer les formules

$$T=n'pv'\left(1+2{,}3026\,\text{Log}\frac{p}{p''}-\frac{10334}{p''}\right),$$

$$T'=N''T,$$

$$T''=N''k\frac{1+0{,}00375t}{0{,}000078(540+t)}\left(1+2{,}3026\,\text{Log}\frac{p}{p''}-\frac{10334}{p''}\right),$$

dans lesquelles $N''=0{,}4$, si la machine est en très-bon état, et $N''=0{,}35$, si la machine est en état passable.

ÉNERGIE DES MACHINES A DEUX CYLINDRES.

411. Afin de rendre générales les formules des machines à deux cylindres, nous représenterons par m le rapport $\frac{A}{a}$ des bases, et pour les établir, nous considé-

rerons, comme au n.° 408, une portion quelconque x de la course.

La vapeur qui a produit l'ascension du plus petit des pistons-moteurs remplit à la fin le moindre cylindre, y possède la tension p de celle de la chaudière, et se dilate pendant la descente, en se répandant au-dessus du grand piston; de sorte que son volume primitif ah diminue de ax dans le petit cylindre, et augmente de Ax dans l'autre, car les deux pistons, supposés attachés au même point du balancier, ont des vitesses égales. La vapeur détendue prend donc un nouveau volume

$$ah - ax + Ax = ah - ax + max = a[h + (m-1)x].$$

Comme la température ne change pas sensiblement, la nouvelle tension p_1 et la tension primitive p sont inverses des volumes. Ainsi

$$\frac{p_1}{p} = \frac{ah}{a[h + (m-1)x]} = \frac{h}{h + (m-1)x}.$$

Or, la pression p_1 fait sur le petit piston, en sens opposé au mouvement, et dans l'instant qui suit la descente x, un travail élémentaire

$$ap_1 dx = aph \frac{dx}{h + (m-1)x} = aph \frac{d\,\mathrm{Log}'[h + (m-1)x]}{m-1}.$$

Le travail fini relatif à x est donc

$$\frac{aph}{m-1} \mathrm{Log}'[h + (m-1)x] + C.$$

La dilatation commençant et finissant avec la descente, il faut prendre l'intégrale de $x=0$ à $x=h$, ce qui donne

$$\frac{aph}{m-1} (\mathrm{Log}' mh - \mathrm{Log}' h) = \frac{aph}{m-1} \mathrm{Log}' m.$$

D'ailleurs, les deux pistons exécutent la même course, d'où suit $\frac{A}{a} = \frac{V}{v}$; par conséquent, le travail qui s'oppose à la descente du moindre est

$$\frac{pv}{m-1} \operatorname{Log}' \frac{V}{v} = \frac{pv}{m-1} 2{,}3026 \operatorname{Log} \frac{V}{v}.$$

Mais, pendant que ce travail s'effectue contre la base, la pression p agit sur le chapeau dans le sens du mouvement, et produit, pendant la descente, une quantité d'action $aph = pv$. Le travail réel du petit piston durant chaque oscillation est donc

$$pv - \frac{pv}{m-1} 2{,}3026 \operatorname{Log} \frac{V}{v} = pv\left(1 - \frac{2{,}3026}{m-1} \operatorname{Log} \frac{V}{v}\right).$$

Le travail produit par le grand piston en vertu de la détente doit évidemment être exprimé comme celui qu'elle fait sur le petit, si ce n'est qu'au lieu de ah, il faut mettre Ah, ou au lieu de v, $V = mv$. On a donc pour le premier, pendant une oscillation,

$$\frac{pmv}{m-1} 2{,}3026 \operatorname{Log} \frac{V}{v}.$$

Mais le fluide du condenseur, qui possède une tension p', fait sur le même piston, et dans le même temps, un travail contraire $Ap'h = p'V$. Ainsi, le grand cylindre donne, selon le mouvement, une quantité d'action

$$\frac{pmv}{m-1} 2{,}3026 \operatorname{Log} \frac{V}{v} - p'V;$$

la machine entière fournit par course

$$pv\left(1 - \frac{2{,}3026}{m-1} \operatorname{Log} \frac{V}{v} + \frac{m}{m-1} 2{,}3026 \operatorname{Log} \frac{V}{v}\right) - p'V,$$

et le travail relatif à 1″,

$$T = n'\left[pv\left(1 + 2{,}3026\,\text{Log}\,\frac{V}{v}\right) - p'V\right],$$

expression tout à fait conforme à celle qui a été trouvée (408) pour un seul cylindre à détente. Il était aisé de prévoir cette analogie; car si nous remplaçons ici v par v' et V par v, la masse de vapeur, après avoir agi dans un cylindre v' avec la tension p, se dilatera dans un autre cylindre v. Or, évidemment elle doit produire ainsi le même travail qu'en agissant, avec la tension p, d'abord dans une partie v' d'un seul cylindre v, et se dilatant ensuite dans la capacité totale. Nous aurions donc pu, après avoir fait préalablement cette observation, déduire du n.° 408 la nouvelle valeur de T. Mais il était bon de montrer comment se passent les choses dans une machine à deux cylindres.

Pour substituer, comme précédemment, les pressions aux volumes, nous désignerons par p'' la tension qui a lieu dans le grand cylindre à la fin de chaque oscillation. Il s'ensuivra

$$\frac{V}{v} = \frac{p}{p''}, \quad V = \frac{p}{p''}v,$$

$$T = n'\left[pv\left(1 + 2{,}3026\,\text{Log}\,\frac{p}{p''}\right) - p'\frac{p}{p''}v\right],$$

et nous aurons pour formules (408)

$$T = n'pv\left(1 + 2{,}3026\,\text{Log}\,\frac{p}{p''} - \frac{p'}{p''}\right),$$

$$T' = N'T.$$

Ces équations peuvent être employées même quand le rapport des volumes cylindriques parcourus n'est pas

celui des bases; car, si d'un côté, le grand piston, alors attaché plus loin de l'axe du balancier que le petit, fait une course un peu plus longue; de l'autre, la vapeur ayant continuellement à se dilater dans une capacité plus grande, exerce toujours une moins forte pression.

412. Il est évident, d'après le n.° 409 et celui qui précède, que l'énergie relative des machines à deux cylindres et à condenseur a pour formule pratique

$$T'' = N'k \frac{1 + 0{,}00375t}{0{,}000078(550 + t - t')}\left(1 + 2{,}3026 \operatorname{Log} \frac{p}{p''} - \frac{p'}{p''}\right),$$

comme celle des machines de même espèce à un seul cylindre.

413. Enfin, si la machine à deux cylindres n'a point de condenseur (410), les formules sont

$$T = n'pv\left(1 + 2{,}3026 \operatorname{Log} \frac{p}{p''} - \frac{10334}{p''}\right),$$

$$T' = N''T,$$

$$T'' = N''k \frac{1 + 0{,}00375t}{0{,}000078(540 + t)}\left(1 + 2{,}3026 \operatorname{Log} \frac{p}{p''} - \frac{10334}{p''}\right).$$

414. Pour donner un exemple des calculs qu'exige l'étude d'une machine à vapeur, nous appliquerons les formules relatives à celle de Wolf pourvue d'un condenseur.

D'après le lever d'un appareil fonctionnant, et en état passable, le rayon du petit piston $= 0^{m},125$, sa course $= 0^{m},923$, la pression $p = 37023^{kg}$, le rayon du grand piston $= 0^{m},22$, sa course $= 1^{m},24$, la pression $p' = 930^{kg}$, il y a 54 oscillations par minute, et le foyer est alimenté en houille de première qualité.

Il s'ensuit d'abord

$$v = 3{,}1416(0^{m},125)^2 \times 0^{m},923 = 0^{mc},0453,$$

$$V = 3{,}1416(0^m{,}22)^2 \times 1^m{,}24 = 0^{mc}{,}1885,$$

$$p'' = p\frac{v}{V} = 37\,023^{kg}\frac{0{,}0453}{0{,}1885} = 8897^{kg}, \quad n' = \frac{54}{60} = 0{,}9;$$

puis le n.° 411 donne

$$T = 0{,}9 \times 37023 \times 0{,}0453\left(1 + 2{,}3026\,\mathrm{Log}\frac{37\,023}{8897} - \frac{930}{8897}\right) = 3503^k{,}7.$$

La machine équivaut donc théoriquement à un nombre de chevaux

$$\frac{3503{,}7}{75} = 46{,}716;$$

d'après le tableau du n.° 408, $N' = 0{,}42$ à peu près, et l'on a, pour le travail utile,

$$T' = 0{,}42 \times 3503^k{,}7 = 1471^k{,}554.$$

Ainsi, la force réelle de la machine est de

$$\frac{1471^{ch}{,}554}{75} = 19^{ch}{,}62.$$

Si l'appareil était en très-bon état, on aurait $N' = 0{,}5$,

$$T' = 0{,}5 \times 3503^k{,}7 = 1751^k{,}85,$$

et la force serait

$$\frac{1751^{ch}{,}85}{75} = 23^{ch}{,}36.$$

Or, il a été vendu neuf comme étant de 24 chevaux. Les formules méritent donc toute confiance.

Calculons maintenant la force relative à 1^{kg} de combustible. D'après le tableau du n.° 406, $k = 3525$. Le nombre d'atmosphères

$$n = \frac{p}{10\,334} = \frac{37\,023}{10\,334} = 3{,}5827,$$

et la formule du n.° 349 donne

$$t = \frac{\sqrt[5]{3,5827} - 0,2847}{0,007153} = 140^{\circ},64.$$

On trouve de même que la température du condenseur

$$t' = \frac{\sqrt[5]{930 : 10334} - 0,2847}{0,007153} = 46^{\circ},568.$$

Substituant dans la valeur de T'' (412), il vient

$$T'' = \left\{ \frac{0,42 \times 3525 \dfrac{1 + 0,00375 \times 140,64}{0,000078(550 + 140,64 - 46,568)}}{\left(1 + 2,3026 \operatorname{Log} \dfrac{37023}{8897} - \dfrac{930}{8897}\right)} \right\} = 104486^{k}.$$

Comme la machine produit par heure

$$1471^{k},554 \times 60 \times 60 = 5297594^{k},4,$$

elle consomme dans le même temps une quantité de houille qui s'élève à

$$\frac{5297594^{kg},4}{104486} = 50^{kg},7,$$

et en 24^{h}, $\quad 50^{kg},7 \times 24 = 1216^{kg},8.$

Ainsi, pendant ces 24^{h}, il faut brûler, par cheval,

$$\frac{1216^{kg},8}{19,62} = 62^{kg},02.$$

Le calcul de l'eau d'injection (400) a presque autant d'importance que celui du combustible. On y procède au moyen de la formule générale

$$V' = \frac{0,8085 n v_{1}}{1000 + 3,75 t} \times \frac{550 + t - t'}{t' - t''},$$

dans laquelle v_1 représente le volume de vapeur dépensé à chaque oscillation, et t'' la température de la bâche, qui était de 10°. Remplaçant donc v_1 par $0^{mc},0453$, valeur de v, nous aurons, pour le volume d'eau à injecter pendant une course,

$$V' = \frac{0,8085 \times 37\,023 \times 0^{mc},0453}{(1000+3,75 \times 140,64)\,10\,334} \times \frac{550+140,64-46,568}{46,568-10} = 0^{mc},0015.$$

Ainsi, la pompe doit introduire dans la bâche,

en 1″, $\quad 0^{mc},0015 \times \frac{54}{60} = 0^{mc},001\,35$,

en 1^h, $\quad 0^{mc},001\,35 \times 60 \times 60 = 4^{mc},86$,

et en 24^h, $\quad 4^{mc},86 \times 24 = 116^{mc},64$,

ce qui fait par cheval,

$$\frac{116^{mc},64}{19,62} = 5^{mc},945,$$

pour ce même temps.

COMPARAISON DES MACHINES A VAPEUR.

415. Les calculs qui viennent d'être faits, ayant été répétés pour les diverses espèces de machines à vapeur, ont montré que la force de cheval coûte par heure 5 à 6^{kg} de houille dans les machines à basse pression sans détente, mais pourvues d'un condenseur; 8 à 10^{kg} dans les machines à moyenne ou à haute pression, sans détente ni condensation; 3 à 4^{kg} dans les machines à haute pression, avec détente et condensation, quel que soit le nombre des cylindres; 4 à 5^{kg} dans les machines à haute pression, avec détente et sans condenseur. Ce sont donc les machines à haute pression où il y a détente

et condensation, qui doivent être préférées sous le rapport de l'économie du combustible. Les plus mauvaises, sous le même rapport, sont celles qui marchent avec une pression supérieure à celle de l'atmosphère, sans détente ni condensation (407).

416. La tension est trop faible dans les machines à basse pression pour que la vapeur puisse y agir par détente; elles n'ont donc jamais qu'un seul piston, et par suite, les frottements y consomment moins de quantité d'action que dans les machines à deux cylindres. Les fuites y sont aussi moins abondantes que dans les autres appareils, et les explosions beaucoup moins redoutables. Mais, à force égale, elles ont besoin de plus grandes dimensions, et il leur faut bien plus d'eau, tant pour la condensation que pour l'alimentation.

Si les machines à détente et à condensation économisent le combustible, elles ont besoin en revanche d'un mécanisme compliqué pour leurs soupapes, de deux cylindres quand elles doivent être d'une grande puissance, et d'une assez forte quantité d'eau.

Les machines dépourvues de condenseur exigent peu d'eau, et il y entre moins de matière que dans les autres; mais, obligées de fonctionner sous une tension élevée, elles rendent les fuites difficiles à éviter et les explosions redoutables.

MACHINES D'EXPÉRIENCES.

Nous placerons sous ce titre deux machines fort importantes qui servent, l'une aux expériences particulières de l'Artillerie, l'autre aux expériences sur les machines industrielles à rotation. On nomme la première *pendule balistique;* la seconde est le *frein de Prony.*

PENDULE BALISTIQUE.

417. Le pendule balistique se compose d'un tronc de cône creux A en fonte, rempli de terre contenue dans des sacs (P. VI, F. 25), et d'une tige BC attachée à un couteau C que supporte un anneau fixe D. Le projectile est lancé contre la grande base du tronc de cône, selon une direction EF qui forme un angle α avec l'horizontale. Le choc fait osciller le pendule; on peut connaître les degrés de l'arc 2β décrit, dans une demi-oscillation, par l'extrémité de l'aiguille H attachée au massif A; compter les oscillations complètes qui ont lieu pendant quelques secondes; déduire de leur nombre la durée de chacune, et déterminer la vitesse d'entrée du projectile au moyen d'une formule fonction de cette durée, de l'arc β, et de quantités fournies par la machine.

418. Nous nommerons, pour établir la formule, m la masse totale qu'a le pendule quand le projectile s'y trouve logé; m' la masse du même pendule avant la pénétration; m'', v la masse et la vitesse du projectile à la même époque; ω l'arc décrit à l'extrémité du rayon 1, dans l'unité de temps, par suite du choc, c'est-à-dire la vitesse angulaire du pendule; N, f, ρ, la pression qu'éprouve l'axe C de rotation, le coefficient du frottement sur l'anneau D, et la distance de l'arête du couteau à l'axe C; l, R les distances du même axe au centre de gravité G de la masse m, et à la ligne de tir EF.

La masse élémentaire dm', située à une distance r' de C, se trouve animée, après le choc, d'une quantité de mouvement $\omega r'dm'$ dont le moment vaut $\omega r'^2dm'$. Le moment de la quantité de mouvement que possède la masse m' est donc $\omega\int r'^2dm'$. Au même instant, le

projectile, arrêté dans la terre du tronc de cône, a pour moment de sa quantité de mouvement, $\omega \int r''^2 dm''$, si r'' désigne la distance de dm'' à l'axe C, et le moment du frottement qu'éprouve le couteau est $Nf\rho$. Mais, avant le choc, le projectile possédait la quantité de mouvement $m''v$, et c'est celle-là qui produit les trois précédentes. Comme son moment vaut $m''vR$, et qu'il doit y avoir égalité entre les quantités d'action relatives à une rotation déterminée,

$$m''vR = \omega \int r'^2 dm' + \omega \int r''^2 dm'' + Nf\rho.$$

Or, la somme des moments d'inertie de deux masses égale le moment d'inertie de la masse totale; de sorte que $\int r'^2 dm' + \int r''^2 dm'' = \int r^2 dm$, r étant la distance de l'axe C à la particule dm. Conséquemment,

$$m''vR = \omega \int r^2 dm + Nf\rho. \qquad \text{(I)}$$

La pression N est la résultante des quantités de mouvement horizontales et des quantités de mouvement verticales consommées snr l'axe de rotation dans le choc. De ce choc résulte, pour la masse m, une quantité de mouvement $ml\omega$; car cette masse se meut comme si, condensée, elle se trouvait réduite à son centre de gravité G, et $ml\omega$ est une force horizontale, puisque, avant le choc, la verge de suspension BC est verticale. Mais la force $m''v$ a $m''v \cos\alpha$ pour composante horizontale, et $m''v \sin\alpha$ pour composante verticale. Il y a donc une percussion horizontale $m''v\cos\alpha - ml\omega$, une percussion verticale $m''v \sin\alpha$, et

$$N = \sqrt{[(m''v\cos\alpha - ml\omega)^2 + (m''v\sin\alpha)^2]}.$$

Cette valeur de N substituée dans l'équation (I) fournirait une relation entre v, ω et des quantités connues; mais les lignes trigonométriques la rendraient trop com-

pliquée pour les applications. Afin de pouvoir employer une formule plus simple, on tire horizontalement sur le pendule, et de manière que la direction passe à une distance R de l'axe C qui rende nulle la pression N.

Alors $\alpha = 0$, $N = m''v - ml\omega = 0$, $m''v = ml\omega$,

l'équation (I) devient $ml\omega R = \omega \int r^2 dm$; la distance

$$R = \frac{\int r^2 dm}{ml},$$

ce qui montre que le projectile est dirigé vers le centre de percussion du pendule (84), et l'on a entre v et ω la relation

$$v = \frac{ml\omega}{m''}.$$

419. Il faut maintenant une équation qui donne ω en fonction de l'arc 2β. Nous la déduirons du travail que fait le pendule en vertu de la force-vive qui lui est donnée par le choc. Cette force-vive est $\omega^2 r^2 dm$ pour la masse élémentaire dm, et $\omega^2 \int r^2 dm$ pour toute la masse m. La machine se trouve donc capable d'une quantité d'action $\frac{\omega^2 \int r^2 dm}{2}$, et elle l'emploie à élever son centre de gravité, malgré le frottement du couteau.

Le poids élevé mg parvient à une hauteur BG au-dessus de sa position au repos, et BG étant le sinus-verse de 2β degrés pour le rayon l, vaut $l(1 - \cos 2\beta)$. L'ascension due à une demi-oscillation consomme donc une quantité d'action $mgl(1 - \cos 2\beta)$, ou $2mgl \sin^2\beta$, parce que

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = 1 - 2\sin^2\beta.$$

C'est aussi le poids mg qui charge le couteau. Le frottement vaut par conséquent mgf; il s'exerce, pen-

dant la demi-oscillation, le loug d'un chemin $\rho\gamma$, γ étant l'arc 2β rapporté à l'unité de distance du centre C, et il exige une quantité d'action $mgf\rho\gamma$.

Mais la force-vive reçue par le pendule se trouve épuisée, quand il a tourné du nombre de degrés 2β. Il faut donc que

$$\frac{\omega^2 \int r^2 dm}{2} = 2mgl\sin^2\beta + mgf\rho\gamma.$$

De là résulte la relation

$$\omega^2 = \frac{4\,mgl\sin^2\beta + 2\,mgf\rho\gamma}{\int r^2 dm}$$

qui donne la vitesse angulaire, quand 2β est connu. Elle peut être réduite à son premier terme, si l'on considère que le mode de suspension rend très-petit le bras de levier ρ du frottement. On a donc enfin

$$\omega^2 = \frac{4\,mgl\sin^2\beta}{\int r^2 dm}.$$

420. Le moment d'inertie $\int r^2 dm$ est ordinairement remplacé par une fonction du temps t qu'emploie le peudule à faire une oscillation complète. Pour trouver cette fonction, nous chercherons la durée $\frac{1}{2}t$ ou t' d'une demi-oscillation 2β, et nous considérerons le moment où le centre de percussion P, parti de I, est arrivé en K. Alors, la tige BC se dirige selon CK, et il lui reste à parcourir l'arc θ de rayon 1, pour reprendre sa position verticale. Dans l'instant suivant, le centre de percussion décrit uniformément un élément ds de l'arc IK, avec la vitesse due à la hauteur z de I au-dessus de K, et $ds = dt'.\sqrt{2gz}$, ou bien $dt' = \frac{ds}{\sqrt{2gz}}$. Mais IK ou $s = R(\gamma - \theta)$, et parce que γ est constant, $ds = -Rd\theta$.

D'ailleurs,

$$z = \mathrm{CL} - \mathrm{CM} = \mathrm{R}\cos\theta - \mathrm{R}\cos\gamma.$$

Par conséquent,

$$dt' = -\frac{\mathrm{R}d\theta}{\sqrt{[2g\mathrm{R}(\cos\theta - \cos\gamma)]}}.$$

Comme les oscillations du pendule n'ont jamais une grande amplitude, on peut faire

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}, \quad \cos\gamma = 1 - \frac{\gamma^2}{2}.$$

Il en résulte

$$\cos\theta - \cos\gamma = \frac{\gamma^2 - \theta^2}{2},$$

et

$$dt' = \frac{-\mathrm{R}d\theta}{\sqrt{[g\mathrm{R}(\gamma^2 - \theta^2)]}} = \sqrt{\frac{\mathrm{R}}{g}} \cdot \frac{-d\theta}{\sqrt{(\gamma^2 - \theta^2)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{R}}{g}} \cdot \frac{-\frac{d\theta}{\gamma}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\gamma^2}\right)}}.$$

Soit x un arc tel que $\frac{\theta}{\gamma} = \cos x$. Nous aurons

$$d\theta = \gamma\, d\cos x = -\gamma \sin x\, dx, \quad \sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\gamma^2}\right)} = \sqrt{(1 - \cos^2 x)} = \sin x,$$

$$dt' = \sqrt{\frac{\mathrm{R}}{g}} \cdot dx, \quad \text{puis} \quad t' = x\sqrt{\frac{\mathrm{R}}{g}} + \mathrm{C},$$

intégrale qui doit être prise de $\theta = \gamma$ à $\theta = 0$. La première limite donne $\cos x = 1$, $x = 0$, $t' = 0$, puisque le mouvement commence seulement, et $0 = 0 + \mathrm{C}$. De la seconde résulte

$$\cos x = 0, \qquad x = \frac{\pi}{2}, \qquad t' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{R}}{g}} + \mathrm{C},$$

π désignant la longueur de la demi-circonférence dont le rayon est l'unité ; puis, la soustraction des deux états

de l'intégrale conduit à

$$t' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}, \quad \text{et par suite à} \quad t = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Or (418),

$$R = \frac{\int r^2 dm}{ml}.$$

On a donc aussi

$$t = \pi\sqrt{\frac{\int r^2 dm}{mlg}}, \quad \int r^2 dm = \frac{mlgt^2}{\pi^2}, \quad \omega^2 = \frac{4mgl\pi^2 \sin^2\beta}{mlgt^2} = \frac{4\pi^2\sin^2\beta}{t^2},$$

$$\omega = \frac{2\pi\sin\beta}{t}, \qquad v = \frac{2ml\pi\sin\beta}{m''t}.$$

Remplaçant les masses m, m'' par les poids P, p du pendule et du projectile, nous obtiendrons, pour formule applicable à la vitesse du dernier corps,

$$v = \frac{2\pi l\sin\beta}{t} \cdot \frac{P+p}{p}.$$

FREIN DE PRONY.

421. L'appareil nommé *frein*, qu'on emploie pour trouver le travail utile d'un arbre tournant, a été imaginé par feu M. de Prony, à l'occasion de ses expériences sur la machine à vapeur du Gros-Caillou. Il se compose de deux pièces de bois AB, CD (P. VI, F. 26), parallèles, inégales en longueur, échancrées circulairement, pour que chacune embrasse une portion de l'arbre E, et liées l'une à l'autre par deux forts boulons dont les écrous les pressent contre le même arbre.

La machine à laquelle s'adapte le frein est dépourvue de résistance principale, mais elle conserve

toutes ses résistances accessoires. On place les deux pièces de bois horizontalement, et à l'extrémité A de la plus longue, qui se trouve au-dessus de l'autre, est suspendu un plateau chargé d'un poids capable d'empêcher l'arbre d'emporter le frein dans sa rotation, mais non assez grand pour faire tourner le levier AB en sens contraire.

Comme on n'arrive à trouver le poids convenable qu'après plusieurs essais, il est bon, pour prévenir tout accident, d'attacher la grande pièce à deux points fixes, ou de placer sous la petite deux obstacles formés de madriers, de manière à borner les mouvements que peut faire le frein, mais sans les annuler tout à fait; car il faut que l'appareil oscille, pour qu'on puisse reconnaître, au peu d'amplitude de la course du point A, qu'il y a équilibre suffisant.

Le frein doit être *taré* avant de servir à une expérience, c'est-à-dire qu'on doit déterminer en kilogrammes l'effort vertical à exercer de bas en haut sur l'extrémité A, pour que l'appareil, non chargé, reste horizontal et en équilibre sur un couteau placé en F, dans le plan vertical déterminé par les flèches des deux échancrures. Le nombre de kilogrammes trouvé égale précisément l'excès du poids de la partie de gauche sur la partie de droite, rapporté en A, et il faut ajouter cette tare p au nombre P des kilogrammes mis sur le plateau, pour avoir la vraie charge du levier AB.

422. Il s'agit maintenant d'établir la formule qui donne, en fonction du poids $P+p$, le travail utile T dont l'arbre tournant est capable par seconde.

Soient n le nombre de tours qu'exécute en $1''$ l'arbre comprimé par le frein; X la pression inconnue que lui font éprouver les écrous; r son rayon; l la distance

de A, point d'attache du plateau, au plan vertical EF de l'axe.

Le frottement fX, remplaçant la résistance principale, fait un travail égal au travail tangentiel et utile de l'arbre; par conséquent,

$$T = \frac{n}{60}\, 2\pi r f X.$$

Mais l'effort tangentiel, qui vaut fX et s'exerce dans le sens de la rotation, ferait tourner le frein dans le même sens, si la charge $P + p$ n'y mettait obstacle. Il y a donc en équilibre autour de l'axe E deux forces fX, $P + p$ qui agissent, la première à une distance r de cet axe, la seconde à une distance l. L'égalité de leurs moments, pris par rapport au même axe, donne $rfX = l(P + p)$, et conséquemment,

$$T = \frac{n}{60}\, 2\pi l (P + p).$$

Ainsi, le produit fait avec la charge du frein en kilogrammes, la circonférence $2\pi l$ en mètres, et le nombre de tours relatif à 1″, exprime en kilogrammes-mètres le travail utile dont l'arbre tournant est capable dans le même temps.

423. Nous citerons, comme exemple, une expérience faite par des membres de l'académie royale de Metz sur une scierie à quatre lames, dont la roue hydraulique exécutait dix-huit tours et $^1/_{20}$ par minute, devant une vanne élevée de $0^m,106$.

Le chariot, chargé de sa pièce de bois, fut reculé de manière que les scies ne pussent mordre; mais on le laissa en communication avec la roue à rochet, et cette roue continua d'être mise en mouvement par le châssis; de sorte que toutes les résistances restèrent

les mêmes, à l'exception de celle du sciage que remplaça le frottement du frein. Les écrous furent serrés au point convenable pour qu'avec la même hauteur de pertuis, la vitesse restât ce qu'elle était avant l'application de l'appareil à l'arbre hydraulique. Le bras de levier l se trouvait de $3^{m},2$, et la charge $P+p$ s'élevait à environ 22^{kg}, quand la petitesse des oscillations annonça l'équilibre.

On eut alors, pour la quantité d'action consommée en $1''$ par les quatre lames, ou pour le travail utile de la scierie,

$$T = \frac{18,05}{60}\, 2 \times 3,1416 \times 3^{m},2 \times 22^{kg} = 133^{k},07.$$

424. L'emploi du frein a une limite due à celle du serrement des écrous. Il faut en effet que

$$fX = \frac{60T}{2\pi rn},$$

et quand la pression X est à son maximum, le travail à mesurer ne peut croître, si le produit $2\pi rn$ n'augmente pas aussi. Il n'est pas nécessaire toutefois que les deux termes de la valeur de fX croissent proportionnellement; pour qu'on puisse mesurer un travail double, par exemple, la vitesse restant la même, l'arbre n'a pas besoin d'un rayon double; car de l'augmentation du rayon résulte un contact plus étendu entre l'arbre et les deux pièces du frein, et comme la pression des écrous agit sur tous les points communs, le frottement fX devient plus grand, quoique le serrement reste le même.

Ainsi, d'après des expériences de M. Morin, le travail que peut mesurer le frein de Prony vaut celui de 6 à 8 chevaux, quand la vitesse est de 20 à 30 tours

par minute, et le rayon de $0^m,08$; celui de 15 à 20 chevaux, quand la vitesse est de 15 à 30 tours, et le rayon de $0^m,15$ à $0^m,2$; celui de 40 à 60 chevaux, quand la vitesse est de 15 à 30 tours, et le rayon de $0^m,33$ à $0^m,4$.

FIN.

ADDITION AUX MACHINES A TRACTION.

PRESSE HYDRAULIQUE.

81 A. Une presse bien différente de la précédente est employée dans les poudreries pour convertir le poussier en galettes : on l'appelle *presse hydraulique*. Elle est fondée sur une propriété des liquides qu'a découverte Pascal, celle d'exercer par toutes leurs parties et dans tous les sens la pression qu'ils supportent; mais c'est l'Anglais Bramah qui a imaginé la machine.

Dans un réservoir plein d'eau A (P. VI, F. 27) plongent deux pompes aspirantes et foulantes. Le piston de l'une B a 0^m,054 de diamètre, et celui de l'autre C 0^m,027 seulement. Chaque corps est terminé par un crible D qui empêche les matières étrangères contenues dans l'eau de venir gêner le jeu de la soupape E. Le moteur agit à l'extrémité d'un levier rotatif F qu'un contre-poids G maintient en équilibre dans toutes les positions. Le point d'application est à 3^m,248 de l'axe de l'essieu; mais cet essieu se place successivement dans deux trous horizontaux que présente un support H. Le centre du trou employé le premier est à 0^m,1624 du point où l'axe du piston s'attache au levier F; celui de l'autre I se trouve à 0^m,5248 du même point. Un troisième trou K, percé verticalement à l'extrémité supérieure de chaque support, reçoit la tige du piston correspondant et la guide dans sa marche.

Les pistons n'ont pas les dimensions ordinaires : ce sont des cylindres plus longs et d'un moindre diamètre que les corps de pompe. De là résulte qu'ils ne frottent

qu'à l'orifice supérieur, où ils sont comprimés par un anneau de cuir destiné à intercepter toute communication avec l'atmosphère ; qu'ils font le vide en diminuant, par leur ascension, le volume de leur partie contenue dans le corps, et qu'ils refoulent l'eau en augmentant ce même volume par leur descente.

Le liquide refoulé fuit par un tuyau L qui a 0^{m},0135 de diamètre et porte un robinet M à tige taraudée. Lorsque la grande pompe joue, le robinet de la petite est fermé ; quand cette dernière doit marcher, on visse le robinet de la grande et l'on dévisse l'autre. Le robinet dévissé devient une soupape qui s'ouvre de bas en haut, dès que le piston correspondant descend, et se ferme au moment où commence l'ascension.

Les tuyaux de fuite des deux pompes se réunissent en un seul au-delà de leurs robinets, et plus loin, la conduite commune se bifurque pour introduire l'eau dans deux cylindres N d'un diamètre de 0^{m},216. A mesure que le liquide s'y accumule, il fait monter lentement un piston O dépourvu de tige, sur la tête duquel repose un épais madrier P qui remplit toute la section horizontale d'une cage Q en fonte. Ce madrier supporte une couche de poussier humide ; sur la couche on place un plateau, puis sur le plateau une seconde couche, et ainsi de suite jusqu'au chapeau R de la cage.

Pour que chaque presse puisse fonctionner isolément, s'il est nécessaire, les branches qui terminent la conduite commune ont des robinets à vis S, comme celles qui la précèdent, mais ceux-ci ne font pas l'office de soupapes.

Enfin, une soupape de sûreté T est placée au-dessus de la jonction des deux tuyaux de fuite. Elle doit s'ouvrir, et permettre à l'eau de sortir par l'orifice U, avant que la pression ne soit assez grande pour fracturer les parois des canaux en cuivre battu qui font communiquer

les presses aux corps de pompe. Ces conditions sont remplies au moyen d'un levier rotatif **V** (**F.** 28) : il presse la tête de la soupape prés de son essieu **X**, et porte un poids curseur **Y** vers son autre extrémité.

Quant au tuyau de décharge **Z**, muni d'un robinet, il sert à vider l'appareil dans le réservoir **A**, lorsqu'on veut retirer les matières comprimées et leur en substituer d'autres.

81 B. Nous pouvons faire abstraction des résistances accessoires dans la recherche de la relation qui lie la puissance à la résistance principale d'une presse hydraulique; car l'essieu du levier-moteur **F**, ayant un fort petit rayon, n'éprouve qu'un frottement insignifiant; le frottement des pistons sur les anneaux de cuir n'est pas grand; celui des plateaux contre les montants de la cage se trouve nul quand la charge est bien faite, et l'on peut regarder comme nul aussi le travail consommé par le frottement de l'eau sur les parois des tuyaux, puisqu'elle se meut avec une grande lenteur.

Nommons p la pression motrice exercée à l'extrémité du levier **F**, **L** la distance du point d'application à l'axe **I** de l'essieu, **C** la course circulaire du même point, l le bras de levier du piston **B** à tige, c sa course circulaire qui égale sensiblement sa course verticale, d son diamètre, **D** celui des pistons **O** sans tige, h leur course verticale pendant la descente du levier **F**, et **P** la pression totale qu'ils font subir aux matières, ou la résistance qui s'oppose à leur ascension.

Il y a proportion entre les arcs des courses circulaires et leurs rayons; donc, $C : c :: L : l$, $C = c\frac{L}{l}$, et la quantité d'action que dépense le moteur pendant la descente du levier **F**, $pC = pc\frac{L}{l}$.

Le volume d'eau chassé du corps de pompe est $c\frac{\pi d^2}{4}$.

Comme c'est ce même volume qui, entrant dans les cylindres N, produit l'ascension h, on a nécessairement

$$c\frac{\pi d^2}{4} = 2h\frac{\pi D^2}{4} \quad \text{ou} \quad h = \frac{c}{2}\cdot\frac{d^2}{D^2},$$

et la quantité d'action consommée par les deux résistances principales,

$$Ph = P\frac{c}{2}\cdot\frac{d^2}{D^2}.$$

Mais cette quantité d'action doit égaler celle que dépense le moteur. Par conséquent,

$$pc\frac{L}{l} = P\frac{c}{2}\cdot\frac{d^2}{D^2},$$

et la relation cherchée est

$$P = 2p\frac{LD^2}{ld^2}.$$

Lorsque le travail du moteur devient trop pénible, on met l'essieu au trou le plus rapproché de la tige du piston B; alors la distance l doit être remplacée par $\frac{l}{2}$, et la nouvelle valeur de P,

$$P_1 = 4p\frac{LD^2}{ld^2}.$$

Mais un instant arrive où l'effort p ne suffit plus pour faire jouer la grande pompe. Il faut donc appliquer le moteur à la petite, l'essieu étant dans le trou le plus éloigné de l'axe. Il s'ensuit une troisième valeur de P, qu'on obtient en remplaçant dans la première d par $\frac{d}{2}$,

et

$$P_2 = 8p\frac{LD^2}{ld^2}.$$

Enfin, le jeu de la petite pompe causant trop de fatigue, il devient nécessaire de mettre au second trou l'essieu de son levier. P_3 change alors, parce que l devient $\frac{l}{2}$, et il en résulte, pour la force comprimante, une quatrième valeur

$$P_3 = 16p\frac{LD^2}{ld^2}.$$

Ainsi, la presse hydraulique produit successivement, dans chaque cage, une pression double, quadruple et octuple de la première.

81 C. Le tableau III indique 5^{kg} pour l'effort moyen et continu d'un manœuvre exercé qui pousse et tire alternativement selon la verticale. Adoptons ce poids pour la valeur de p, bien qu'il soit un peu faible, nous aurons

$$P = 2 \times 5^{kg}\frac{3,248\,(0,216)^2}{0,1624\,(0,054)^2} = 320^{kg},$$

pour la pression totale qui sera exercée dans les deux cages pendant le jeu de la grande pompe avec son plus long bras de levier; $P_1 = 2 \times 320^{kg} = 640^{kg}$, pour la pression produite par la même pompe avec son petit bras de levier; $P_2 = 2 \times 640^{kg} = 1280^{kg}$, pour la pression due à la petite pompe et à son plus long bras de levier; enfin $P_3 = 2 \times 1280^{kg} = 2560^{kg}$, pour la pression causée par le moindre bras de levier de cette même pompe.

Ainsi, dans le premier cas, la machine donne 64 fois la pression motrice, dans le second 128 fois, dans le

troisième 256 fois, et dans le quatrième 512 fois; mais, bien entendu, ces multiplications de la force ne se font qu'aux dépens du temps, car les chemins h, c parcourus par la résistance et le moteur ont précisément des rapports inverses.

Connaissant la valeur de la pression totale qui s'exerce dans les deux cages, on obtient la pression que supporte l'unité de superficie des madriers P, en divisant par le double de la base d'un de ces prismes rectangles.

81 D. Si q désigne la pression que la feuille de cuivre dont sont faits les tuyaux peut supporter, sans inconvénient, sur une superficie circulaire d'un diamètre égal à l'unité de longueur, et si δ représente le diamètre de la soupape de sûreté mesuré avec la même unité, la pression exercée sur cette soupape pendant le jeu des pompes pourra s'élever à $q\delta^2$, car les cercles se contiennent comme les quarrés numériques de leurs diamètres. Par conséquent, le poids curseur Y (P. VI, F. 28) se déduit de la formule

$$Y = q\delta^2 \frac{l'}{L'},$$

dans laquelle L', l' sont les distances de l'axe de l'essieu X au point de suspension du poids curseur et à l'axe de la soupape T.

Il est quelquefois nécessaire, pour ne pas détériorer les objets comprimés, de limiter la pression qui s'exerce sur chaque unité superficielle des madriers P. On déduit aisément de la limite fixée la pression q' qui en résulte sur l'unité circulaire, et alors l'équation

$$Y = q'\delta^2 \frac{l'}{L'}$$

donne la formule

$$L' = \frac{q'}{Y} \delta^2 l',$$

par laquelle se détermine le point où doit être suspendu le poids curseur, pour que la soupape de sûreté s'ouvre au moment où les pompes ont produit la pression voulue.

81 E. Des expériences ont fait évaluer à 307^{kg} la pression q qu'une feuille de cuivre battu, épaisse comme celle des tuyaux, peut, sans se fracturer, supporter sur un cercle qui a pour diamètre $0^m,01$. Le levier L' est ordinairement de $3^m,248$; $l'=0^m,3248$, et $\delta=0^{cm},34$. Par conséquent, le poids curseur

$$Y = 307^{kg}(0,34)^2 \frac{0,3248}{3,248} = 3^{kg},5.$$

Voyons maintenant quel effort la résistance des tuyaux permet d'appliquer aux pompes. Une pression de 307^{kg} sur un centimètre circulaire en donne une de

$$307^{kg} \frac{(0,027)^2}{(0,01)^2} = 2238^{kg}$$

sur le petit piston, et de celle-ci résulte qu'un effort de

$$\frac{2238^{kg} \times 0,1624}{3,248} = 111^{kg}$$

peut être appliqué à l'extrémité du levier F, quand l'axe du même piston est au plus près du point d'appui.

Ainsi, rien n'empêche de porter à 111^{kg} la pression p, en employant un moteur autre que l'homme. Alors

$$P_2 = 16 \times 111^{kg} \frac{3,248(0,216)^2}{0,1624(0,054)^2} = 56832^{kg},$$

et l'on voit que la presse hydraulique met à même d'exercer, dans chacune de ses cages, l'énorme pression de $28\,416^{kg}$.

Supposons enfin que la nature des matières à comprimer ne permette pas d'élever la pression à plus de

100^{kg} par centimètre carré dans chaque cage, et cherchons quel doit être le point d'application du poids curseur pour que la soupape de sûreté empêche de dépasser cette limite. D'abord, la pression sur le centimètre circulaire, $q' = 100^{kg} \frac{\pi}{4} = 78^{kg},54$; ensuite,

$$L' = \frac{78,54}{3,5}(0,34)^2 \times 0,3248 = 0^m,842,$$

ce qui montre que le poids Y devra être placé à 0^m,842 de l'axe X.

TABLEAU I.

RÉSULTATS MOYENS DU TRAVAIL STATIQUE DE L'HOMME ET DU CHEVAL EMPLOYÉS AU TRANSPORT HORIZONTAL.

MODE DE TRAVAIL.	POIDS trans-porté.	VITESSE.	TRAVAIL par seconde	DURÉE de la jour-née.	TRAVAIL journalier.
	kilog.	mètres	kilog.-m.	heures	kilog.-mètres
Un homme transportant le poids de son corps le long d'un chemin horizontal..	65	1,5	97,5	10	3 510 000
Un manœuvre appliqué à une petite charrette à deux roues et revenant à vide chercher une nouvelle charge..................	100	0,5	50	10	1 800 000
Un manœuvre appliqué à la brouette et revenant à vide chercher une nouvelle charge...........	60	0,5	30	10	1 080 000
Un voyageur chargé à dos.	40	0,75	30	7	756 000
Un manœuvre chargé à dos et revenant à vide chercher une nouvelle charge.	65	0,5	32,5	6	702 000
Un manœuvre appliqué à la civière et revenant à vide chercher une nouvelle charge.................	50	0,33	16,5	10	594 000
Un cheval attelé à la charrette et voyageant au pas.	700	1,1	770	10	27 720 000
Un cheval attelé à une voiture et voyageant au trot.	350	2,2	770	4,5	12 474 000
Un cheval attelé à la charrette, marchant au pas et revenant à vide chercher une nouvelle charge.....	700	0,6	420	10	15 120 000
Un cheval chargé à dos et allant au pas...........	120	1,1	132	10	4 752 000
Un cheval chargé à dos et allant au trot...........	80	2,2	176	7	4 435 000

TABLEAU II.

QUANTITÉS D'ACTION MOYENNES DE L'HOMME EMPLOYÉ A ÉLEVER DES FARDEAUX.

MODE DE TRAVAIL.	POIDS élevé.	VITESSE.	TRAVAIL par seconde.	DURÉE de la journée	TRAVAIL journalier.
	kilog.	metres	kilog.-m.	heures.	kilog.-mètres
Un homme élevant le poids de son corps sur une rampe douce ou sur un escalier.	65	0,15	9,75	8	280 800
Un manœuvre appliqué à la corde d'une poulie fixe, et faisant descendre cette corde à vide . . .	18	0,2	3,6	6	77 760
Un manœuvre élevant des masses à la main.	20	0,17	3,4	6	73 440
Un manœuvre chargé à dos sur une rampe douce ou un escalier et revenant à vide chercher une nouvelle charge.	65	0,04	2,6	6	56 160
Un manœuvre roulant la brouette sur une rampe douce et revenant à vide chercher une nouvelle charge.	60	0,02	1,2	10	43 200
Un manœuvre élevant des terres à la pelle à une hauteur moyenne de $1^m,6$	2,7	0,4	1,08	10	38 880

TABLEAU III.

QUANTITÉS D'ACTION MOYENNES DE L'HOMME ET DU CHEVAL APPLIQUÉS AUX MACHINES.

MODE DE TRAVAIL.	EFFORT	VITESSE.	TRAVAIL par seconde	DURÉE de la journée.	TRAVAIL journalier.
	kilog	metres	kilog.-m	heures.	kilog.-mètres.
Un manœuvre agissant sur une roue à chevilles ou à tambour :					
1.° au niveau de l'axe . . .	60	0.15	9	8	259 200
2.° vers le bas de la roue. . .	12	0,7	8,4	8	241 920
Un manœuvre qui marche en poussant ou en tirant selon l'horizontale	12	0,6	7,2	8	207 360
Un manœuvre appliqué à une manivelle.	8	0,75	6	8	172 800
Un manœuvre exercé poussant et tirant alternativement selon la verticale.	5	1,1	5,5	8	158 400
Un cheval attelé à une voiture et allant au pas	70	0,9	63	10	2 168 000
Un cheval attelé à un manège et allant au pas	45	0,9	40,5	8	1 166 400
Un cheval attelé à un manège et allant au trot.	30	2	60	4,5	972 400

TABLEAU IV. (*)

RAPPORT DU FROTTEMENT A LA PRESSION POUR LES SURFACES PLANES A L'ORIGINE DU MOUVEMENT, APRÈS UN CONTACT DE QUELQUE DURÉE.

CORPS FROTTANTS.		DISPOSITION DES FIBRES.	ÉTAT DES SURFACES.	RAPPORT.
Brique sur	calcaire oolithique	»	sans enduit	0,67
	muschelkalk	»	*id*	0,67
Calcaire oolithique sur	calcaire oolithique	»	*id*	0,74
	muschelkalk	»	*id*	0,75
Chanvre sur chêne	en natte	parallèles	*id*	0,5
			mouillées d'eau	0,87
	en corde	*id.*	sans enduit	0,8
Chêne sur	calcaire oolithique	bois debout	*id*	0,63
	chêne	parallèles	*id*	0,62
		id.	frottées de savon sec	0,44
		d'équerre à plat	sans enduit	0,54
		id.	mouillées d'eau	0,71
		d'équerre debout	sans enduit	0,43
	muschelkalk	»	*id*	0,64
	orme	parallèles	*id*	0,38
Chêne, orme, charme, fer, fonte et bronze, deux à deux		»	enduites de suif	0,1
			enduites d'huile	0,15
			enduites de saindoux	0,15

Cuir en courroie sur	chêne plan	parallèles	sans enduit	0,74
	chêne cylindrique	d'équerre	*id*	0,47
	poulie de fnnte	à plat	*id*	0,28
			mouillées d'eau	0,38
Cuir en garniture de pistnn sur fonte		»	*id*	0,62
			grasses	0,12
Cuir simplement tanné sur chêne		cuir à plat	sans enduit	0,61
		cuir de champ	*id*	0,43
			mouillées d'eau	0,79
Fer sur	calcaire oolithique	»	sans enduit	0,49
	chêue	parallèles	*id*	0,62
			mouillées d'eau	0,65
	fonte	»	sans enduit	0,19
	muschelkalk	»	*id*	0,42
Fonte sur	chêne	parallèles au mouvement	mouillées d'eau	0,65
	fonte	»	uu peu onctueuses	0,16
Frêne, Hêtre	sur chêne	parallèles	sans enduit	0,53
Laitou sur chêne		parallèles au mnuvement	*id*	0,62
Muschelkalk sur	calcaire oolithique	»	*id*	0,75
	muschelkalk	»	*id*	0,7
Orme sur chêne		parallèles	*id*	0,69
		id	frottées de savnu sec	0,41
		d'équerre	sans enduit	0,57
Sapin, Surbier	sur chêne	parallèles	*id*	0,53

(*) Ce tableau a été dressé d'après celui de M. le capitaine Moriu.

TABLEAU V. (*)

RAPPORT DU FROTTEMENT A LA PRESSION POUR LES SURFACES PLANES ET LES PIVOTS PENDANT LE MOUVEMENT.

CORPS FROTTANTS.		DISPOSITION DES FIBRES.	ETAT DES SURFACES.	RAPPORT.
Brique sur	calcaire oolithique	»	sans enduit	0,65
	muschelkalk	»	*id*	0,6
Bronze sur	bronze	»	*id*	0,2
	fer	»	un peu onctueuses	0,16
	fonte	»	sans enduit	0,22
Calcaire oolithique sur	calcaire oolithique	»	*id*	0,64
	muschelkalk	»	*id*	0,65
Chanvre sur chêne		parallèles	*id*	0,52
		d'équerre	mouillées d'eau	0,33
Chêne sur	calcaire oolithique	bois debout	sans enduit	0,38
	chêne	parallèles	*id*	0,48
		id	frottées de savon sec	0,16
		d'équerre à plat	sans enduit	0,34
		id	mouillées d'eau	0,25
		d'équerre debout	sans enduit	0,19
	fonte	parallèles au mouvement	*id*	0,38
	muschelkalk	bois debout	*id*	0,38
Chêne, charme, orme, poirier sauvage, acier, bronze, fer, fonte	deux à deux, ou chacun sur son pareil	»	enduit toujours nouveau	0,05
			lubrifiées par intervalles	0,075
			un peu onctueuses	0,15
Cuir en courroie sur chêne		parallèles au mouvement	sans enduit	0,27

Cuir simplement tanné sur	chêne	»	*id*	0,325
			mouillées d'eau	0,29
	fonte ou bronze	»	sans enduit	0,56
			mouillées d'eau	0,36
			onctueuses	0,23
			huilées	0,15
Fer sur	bronze ou fonte	»	un peu onctueuses	0,18
	calcaire oolithique	parallèles au mouvement	sans enduit	0,69
	chêne	*id*	*id*	0,62
		id	mouillées d'eau	0,26
		id	frottées de savon sec	0,21
	muschelkalk	*id*	sans enduit	0,24
		id	mouillées d'eau	0,3
Fonte sur	orme	*id*	sans enduit	0,25
	bronze ou fonte	»	un peu onctueuses	0,15
	chêne	parallèles au mouvement	sans enduit	0,49
			mouillées d'eau	0,22
			frottées de savon sec	0,19
	orme	*id*	sans enduit	0,2
Frêne Hêtre	sur chêne	*id*	*id*	0,38
Laiton sur chêne		*id*	*id*	0,62
Muschelkalk sur	calcaire oolithique	»	*id*	0,67
	muschelkalk	»	*id*	0,38
Orme sur	chêne	parallèles	*id*	0,45
		id	mouillées d'eau	0,25
		d'équerre	sans enduit	0,43
	fonte	parallèles au mouvement	*id*	0,38
Poirier sauvage sur	chêne	*id*	*id*	0,38
	fonte	*id*	*id*	0,44
Sapin Sorbier	sur chêne	*id*	*id*	0,38

(*) Ce tableau a été dressé d'après celui de M. le capitaine Morin.

TABLEAU VI. (*)

RAPPORT DU FROTTEMENT A LA PRESSION POUR LES TOURILLONS EN MOUVEMENT SUR LEURS COUSSINETS.

CORPS FROTTANTS		ÉTAT DES SURFACES.	RAPPORT. Enduit renouvelé à l'ordinaire.	RAPPORT. Enduit toujours nouveau.
Bronze sur	bronze	Enduit d'huile	0,1	»
		Enduit de saindoux	0,09	»
	fonte	Enduit d'huile, de suif	»	0,048
Fer sur	bronze	Enduit d'huile d'olives, de saindoux, de suif	0,075	0,054
		Enduit de cambouis ferme	0,09	»
		Onctueuses et mouillées d'eau	0,19	»
		Très-peu onctueuses	0,25	»
	fonte	Enduit d'huile d'olives, de suif, de saindoux, de cambouis mou.	0,075	0,054
	gayac	Enduit d'huile, de saindoux	0,11	»
		Onctueuses	0,19	»
Fonte sur	bronze	Enduit d'huile d'olives, de saindoux, de suif, de cambouis mou.	0,075	0,054
		Onctueuses	0,16	»
		Onctueuses et mouillées d'eau	0,16	»
		Très-peu onctueuses	0,19	»
	fonte	Enduit d'huile d'olives, de saindoux, de suif, de cambouis mou.	0,075	0,054
		Même enduit et mouillées d'eau.	0,08	»
		Enduit d'asphalte	0,054	»
		Onctueuses	0,14	»
		Onctueuses et mouillées d'eau	0,14	»
	gayac	Sans enduit	0,18	»
		Enduit d'huile, de saindoux	»	0,09
		Onctueuses d'huile, de saindoux.	0,1	»
		Onctueuses d'un mélange de saindoux et de plombagine	0,14	»
Gayac sur	fonte	Enduit de saindoux	0,12	»
		Onctueuses	0,15	»
	gayac.	Enduit de saindoux	»	0,07

(*) Ce tableau a été dressé d'après celui de M. le capitaine Morin.

TABLEAU VII.

RAIDEUR DES CORDES BLANCHES, LE DIAMÈTRE $2r$ DU CYLINDRE SUR LEQUEL S'ENROULE L'AXE ÉTANT 1^m.

NATURE DE LA CORDE.	DIAMÈTRE de la corde.	POIDS par mètre.	RAIDEUR constante, ou $\frac{d^\mu a}{2r}$.	RAIDEUR par kilogramme de charge, ou $\frac{d^\mu b}{2r}$.
	m	kg	kg	kg
Corde de 30 fils de caret.	0,02	0,283 4	0,222 46	0,009 738 2
Corde de 15 fils de caret.	0,011 4	0,144 8	0,063 514	0,005 518 2
Corde de 6 fils de caret.	0,008 8	0,052 2	0,010 605 8	0,002 380 4

TABLEAU VIII.

RAIDEUR DES CORDES GOUDRONNÉES, LE DIAMÈTRE $2r$ DU CYLINDRE SUR LEQUEL S'ENROULE L'AXE ÉTANT 1^m.

NATURE DE LA CORDE.	DIAMÈTRE de la corde.	POIDS par mètre.	RAIDEUR constante, ou $\frac{nd'}{2r}$.	RAIDEUR par kilogramme de charge, ou $\frac{nb'}{2r}$.
	m	kg	kg	kg
Corde de 30 fils de caret.	0,023 6	0,332 6	0,349 6	0,012 551 4
Corde de 15 fils de caret.	0,016 8	0,163 2	0,105 928	0,006 059 2
Corde de 6 fils de caret.	0,009 6	0,069 3	0,212 08	0,002 596 8

TABLEAU IX. (*)

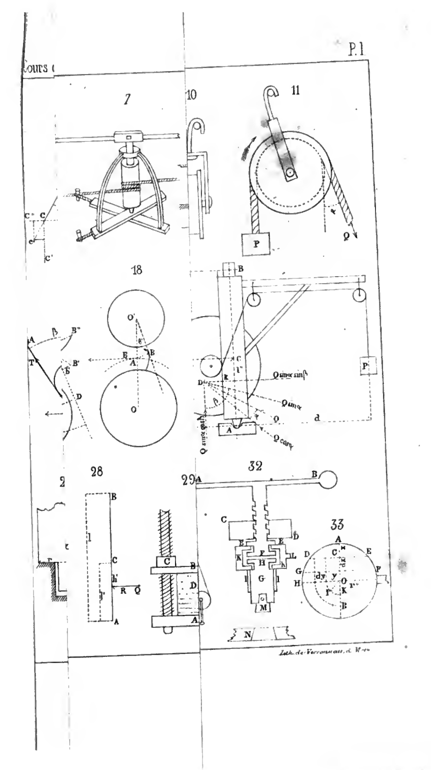
COEFFICIENTS DE DEUX FORCES D'ÉQUERRE P, Q, DANS L'EXPRESSION DE LEUR RÉSULTANTE $\sqrt{(P^2+Q^2)} = \alpha P + \beta Q$.

RELATION DES FORCES.	VALEUR de α.	VALEUR de β.	MAXIMUM de l'erreur.
$P \gtrless Q$..........	0,8284	0,8284	$^1/_6$
$P > Q$..........	0,96046	0,39783	$^1/_{25}$
$P > 2Q$	0,98592	0,2327	$^1/_{71}$
$P > 3Q$.........	0,9935	0,16123	$^1/_{154}$
$P > 4Q$	0,99625	0,1226	$^1/_{256}$
$P > 5Q$.........	0,99757	0,09878	$^1/_{417}$
$P > 6Q$.........	0,99826	0,08261	$^1/_{589}$
$P > 7Q$	0,99875	0,07098	$^1/_{800}$
$P > 8Q$.........	0,99905	0,0622	$^1/_{1048}$
$P > 9Q$.........	0,9993	0,05535	$^1/_{1428}$
$P > 10Q$	0,99935	0,04984	$^1/_{1536}$

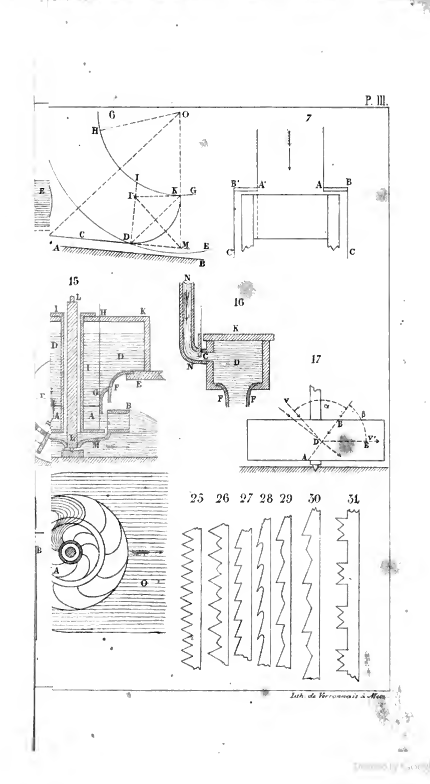
(*) Ce tableau a été calculé par M. le commandant du génie Gosselin, d'après un théorème de M. Poncelet.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE.

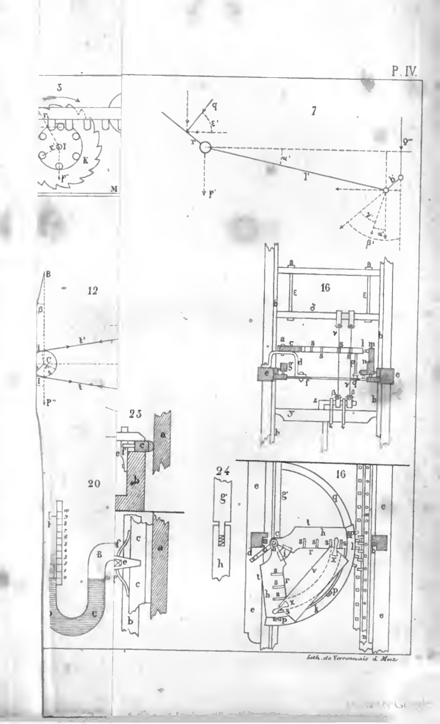

Cours
7
10
11
P
Q
18
O'
O
A
B
B'
B"
D
T
28
B
C
A
R
Q
29
A
B
C
D
32
A
B
C
D
E
F
H
G
M
N
33
A
E
F
G
H
O
K
B
Q sinα sinβ
Q sinα
Q cosα
d
P
Lith. de Verronnais, à Metz


BIBLIOTECA · LUCCHESI · PALLI

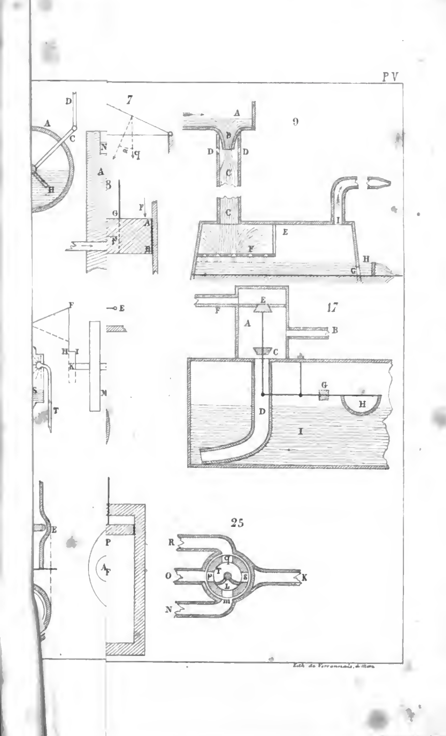


Lith. de Verronnais à Metz

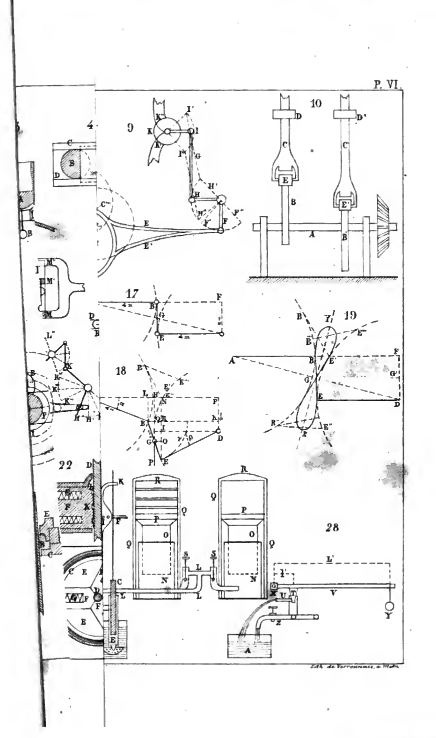



3
7
12
16
23
24
20
16
Lith. de Verronnais à Metz


BIBLIOTECA LUCCHESI PALLI



PV
7
8
9
17
25
Lith. de Verronnais, à Metz


P. VI.
Lith. de Verronnais, à Metz


BIBLIOTECA · LUCCHESI · PALLI


Google

